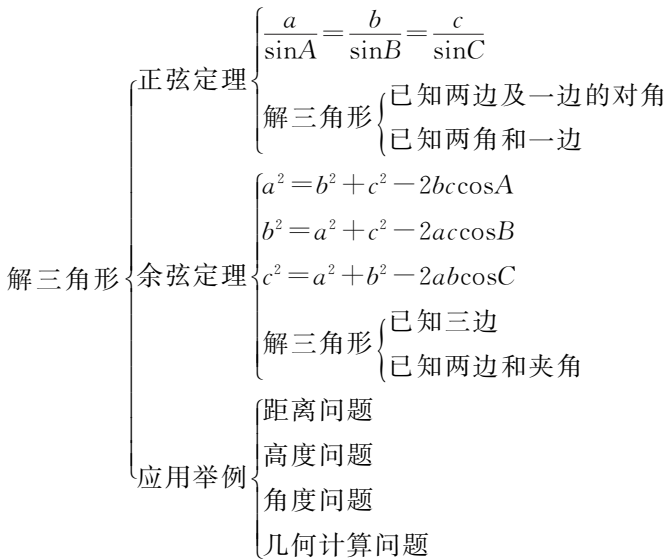


模块整体感悟

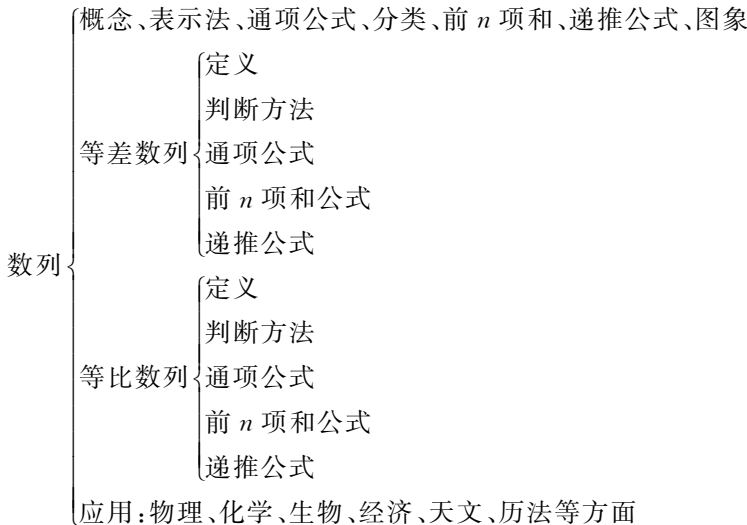
模块知识梳理

《数学 5》是高中数学必修课程 5 个模块中的一个,包括解三角形、数列与不等式三章内容.

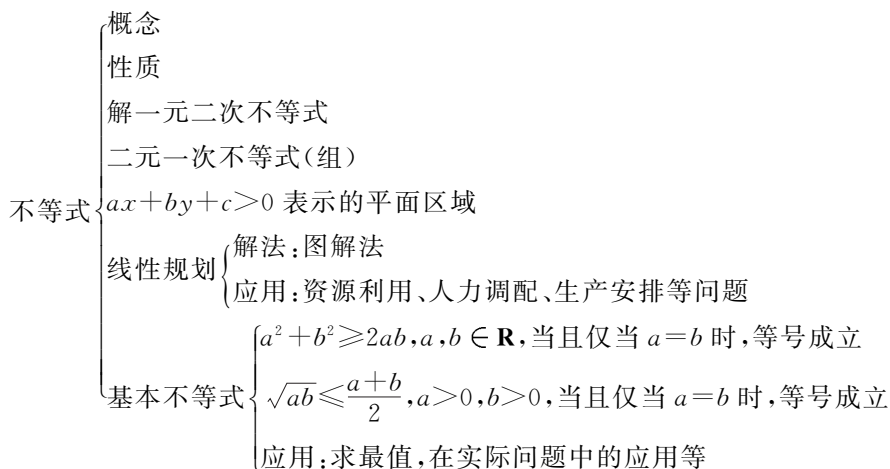
三角形是最基本的几何图形,三角形中的数量关系是最基本的数量关系,有着极其广泛的应用.其具体内容如下:



数列可以看成一种特殊的函数,是反映自然规律的一种基本数学模型.数列在计算机技术中扮演着重要角色.其具体内容如下:



不等关系与相等关系都是客观存在的基本数量关系,是数学研究的重要内容.其具体内容如下:



学法点拨

我们为什么要学数学呢?因为数学对生产实践是有用的,学数学能提高解决实际问题的能力.那么,如何才能学好数学呢?首先要认识到数学是自然的,数学又是清楚的;其次,还需要讲究一点方法.学数学要不断摸索适合自己的学习方法.就本模块的学习而言,需要注意下列事项:

❁ 1. 解三角形作为几何度量问题,要突出其几何背景;数列与函数,不等式与函数、方程等都密切相关,所以学习时要注意数形结合思想、函数与方程思想、算法思想以及从特殊到一般的思想方法的运用.

❁ 2. 学习本模块要注意与初中学习的三角形的边角关系联系,注意与三角函数和平面向量联系,将新旧知识融为一体.善于对比学习数列与函数、等差数列与等比数列,加深对这两方面内容的理解,加深对两种特殊数列本质的理解.解题时多考虑与之相联系的数学思想方法,如类比思想、归纳思想、数形结合思想、算法思想、方程思想以及从特殊到一般的思想方法等.

❁ 3. 通过解三角形实际问题,要学会依题找出量与量之间的关系,作出示意图,将实际问题抽象成解三角形模型,加强与实际问题的联系;通过实际背景和实际问题,充分感受现实世界中存在的不等关系,建立不等关系,从中体验数学来源于生活并应用于生活,从中认识到学习不等关系和不等式的必要性;学会从实际问题中抽象出不等关系,并利用数学知识去解决它,从而提高数学建模能力.

❁ 4. 重视数学知识的形成过程.经历观察、思考、探究的过程,理解函数、方程、不等式的关系,从函数、方程的角度出发,理解不等式,充分利用教材中的“思考”“探究”“阅读与思考”“研究与发现”等栏目的引导,学会自主学习、自主探究,提高逻辑思维能力.

同学们!学数学趁年轻.你们正处在一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期,下点工夫学好数学,将会终生受益.数学家为你们构建了有益于大家成长的数学天地,你们是这片天地的主人,预祝同学们愉快地生活在这片数学天地中!

第一章 解三角形

本章学习先知

先行一步，步步先行

内容概要

在本章，我们将学习解三角形，通过对任意三角形边长和角度关系的探索，得出正弦定理、余弦定理，并运用这两个定理解决一些简单的三角形度量问题。能够运用正弦定理和余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题。

《课程标准》要求

内容标准	学习要求
通过对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题。	1. 通过对任意三角形边角关系的探索，能证明正弦定理和余弦定理。 2. 了解可以通过向量方法、解析方法等多种途径证明正弦定理和余弦定理。 3. 能够应用正弦定理、余弦定理及其推论解三角形。 4. 了解余弦定理和勾股定理之间的关系。 5. 知道解三角形问题的几种情形及其基本解法。 6. 知道解三角形中解的多样性。 7. 会运用方程思想解决有关解三角形的问题。
能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题。	1. 能运用正弦定理、余弦定理解决有关测量两点之间距离的问题。 2. 能运用正弦定理、余弦定理解决有关测量底部不可到达的建筑物的高度的问题。 3. 能运用正弦定理、余弦定理解决有关测量角度的问题。 4. 掌握三角形的面积公式，在不同已知条件下会求三角形的面积。 5. 会运用正弦定理、余弦定理解决关于三角形边角关系的恒等式的证明问题。

学法指导

- ✿ 1. 通过实例,在具体情境中理解解三角形的思路和方法,记准正弦定理和余弦定理及其变式,要注意灵活使用三角函数公式.在解决实际问题时,注意数学知识与问题情境的转化.
- ✿ 2. 在解三角形时,有些较复杂的问题需要正弦定理和余弦定理交替使用.尽管有时不是直接求出结果,但为了过渡,就必须先求出,至于先用哪个定理,则需具体问题具体分析.
- ✿ 3. 在解三角形应用题中,由于具体问题中给出的数据通常为有效近似值,故运算过程较复杂,可以借助计算器进行运算.同时还应达到算法简练、算式工整、计算准确等要求.
- ✿ 4. 如果将正弦定理、余弦定理看成是几个“方程”的话,那么解三角形应用题的实质就是把已知量按方程的思想进行处理.解题时应根据已知量与未知量,合理选择一个比较容易解的方程,从而使解题过程简捷.

1.1 正弦定理和余弦定理

第一学时 正弦定理

板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

同学们,我们知道在任意三角形中有大边对大角,小边对小角的边角关系,那么我们是否能得到这个三角形边角关系准确量化的表示呢?正弦定理的内容是什么?什么叫解三角形?运用正弦定理可以解决什么样的解三角形问题?哪一类解三角形问题的解有多多样性?你会运用公式 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径)吗?

材料链接

- ✿ 1. 通过对特殊事例的观察、分析,类比概括出一般性结论是数学学习中常用的重要思想方法.
- ✿ 2. 教材在引入正弦定理内容时,让学生从已有的几何知识出发,提出探究性问题:“在任意三角形中有大边对大角,小边对小角的边角关系.我们是否能得到这个边、角关系准确量化的表示呢?”在引入余弦定理内容时,提出探究性问题:“如果已知三角形的两条边及其所夹的角,根据三角形全等的判定方法,这个三角形是大小、形状完全确定的三角形.我们仍然从量化的角度来研究这个问题,也就是研究如何从已知的两边和它们的夹角计算出三角形的另一边和另两个角的问题.”在这里体现了量化的数学思想,这是一种重要的基本数学思想.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成



教材导读



问题一

正弦定理的内容是什么?

请阅读教材 p2、p3“思考”栏目之前的内容,思考并回答下列问题:

✿ 1. 在 Rt $\triangle ABC$ 中, A, B, C, a, b, c 之间的数量关系是什么?

✿ 2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 设 AB 边上的高是 CD , 可根据三角函数的定义, 得出 $CD = a \sin B, CD = b \sin A$. 如何得出 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 请写出来. 若设 AC 边上的高是 BD , 你能得出怎样的结论呢?

✿ 3. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, A, B, C, a, b, c 之间的数量关系是什么? 与 Rt $\triangle ABC$ 中的关系一样吗?

✿ 4. 在钝角 $\triangle ABC$ 中, A, B, C, a, b, c 之间的数量关系与 Rt $\triangle ABC$ 和锐角 $\triangle ABC$ 中的关系一样吗? 请推导出来.

✿ 5. 在锐角三角形与钝角三角形中, 正弦定理的证明有何异同? 在证明中运用了什么数学思想方法?



问题二

什么叫解三角形?

请阅读教材 p3、p4 的有关内容, 思考并回答下列问题:

类比所学解方程与解不等式的过程, 阐述“解三角形”的过程.



问题三

利用正弦定理可以解决一些怎样的解三角形问题?

请阅读教材 p3、p4 的有关内容, 自主完成教材例 1 和例 2, 在计算过程中可以借助计算器或者计算机, 思考并回答下列问题:

✿ 1. 如果已知 $\triangle ABC$ 的任意两个角和一边, 你能根据三角形内角和定理、正弦定理计算出三角形的另一角和另两边吗?

✿ 2. 如果已知 $\triangle ABC$ 的任意两边与其中一边的对角, 你能根据正弦定理计算出三角形其他的边和角吗?

✿ 3. 教材例 1 中已知 $\triangle ABC$ 的两角和其中一角的对边, 这个三角形确定吗?

✿ 4. 教材例 2 中已知 $\triangle ABC$ 的两边和其中一边的对角, 这个三角形确定吗?

5. 在教材例2中,解三角形时产生两解,探究其原因.当已知 a, b, A 解三角形时,一定会有两解吗?

自主测评

1. (2015·北京)在 $\triangle ABC$ 中, $a=3, b=\sqrt{6}, A=\frac{2\pi}{3}$,则 $B=$ _____.

2. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\sin A=\sin B$,则 $\triangle ABC$ 是

- ()
- A. 直角三角形 B. 等腰三角形
C. 锐角三角形 D. 钝角三角形

3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $A=45^\circ, B=60^\circ, c=2$,求 b .

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $(2a+c)\cos B+b\cos C=0$,求角 B 的大小.

疑点归纳

在自主学习、探究的过程中,大家有什么困惑,请记录到问题卡上.记得在课上或课后要及时解决哦!



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题四

对正弦定理的证明,除教材中所给的方法外,还有其他的证明方法吗?

1. 运用向量法能证明吗?证明时需要把三角形分成锐角三角形、直角三角形、钝角三角形三种类型吗?

2. 运用外接圆法能证明吗?证明时需要把三角形分成锐角三角形、直角三角形、钝角三角形三种类型吗?



问题五

哪一类解三角形问题的解有多样性?

1. 已知 $\triangle ABC$ 的两边 a, b 及 A ,求边 c 时解的情况如何?

2. 在上述 $\triangle ABC$ 中,当 A 为锐角时,满足什么条件有两解,有一解,无解?

3. 在上述 $\triangle ABC$ 中,当 A 为直角时,满足什么条件有两解,有一解,无解?

✿ 4. 在上述 $\triangle ABC$ 中, 当 A 为钝角时, 满足什么条件有两解, 有一解, 无解?

✿ 5. 你能利用几何图形给出解释吗?



板块四 展示交流, 探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题六

公式 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 的变式是什么? 怎样用?

✿ 1. 对于公式 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 你能得出它的一些变式吗?

✿ 2. $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A}$ 成立吗? 请给出证明.

✿ 3. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 等式 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 成立吗? 请给出证明.

✿ 4. 等式 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 的变式有哪些?

展题设计

✿ 展题 1 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, $B = 120^\circ$, 解三角形.

指导要求: 已知三角形两边和其中一边的对角解三角形时, 应运用什么定理求解? 需要判定解的情况吗? 在 $\triangle ABC$ 中, 当 A 为锐角时, 若 $a > b \sin A$, 则有两解; 若 $a = b \sin A$, 则有一解; 若 $a < b \sin A$, 则无解; 当 A 为直角时, 若 $a > b$, 则有一解; 当 A 为钝角时, 若 $a > b$, 则有一解. 此题属于哪种情况?

✿ 展题 2 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $a = \sqrt{13}$, 求 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ 的值.

指导要求: 此题运用正弦定理能解吗? 利用正弦定理得出 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径) 的结论可以求解吗?

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.



板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中,若 $A=2B$,则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 ()

- A. $(1, 2)$ B. $(1, \sqrt{3})$
C. $(\sqrt{2}, 2)$ D. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=15, b=10, A=60^\circ$, 则 $\cos B$ 等于 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
C. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $A=60^\circ, C=45^\circ, b=2$, 则边长 $c=$ _____.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, C 为钝角, $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$, $\sin A = \frac{1}{3}$, 则 $\sin B =$ _____.

B. 能力提升

5. (2014·江西)在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $3a=2b$, 则 $\frac{2\sin^2 B - \sin^2 A}{\sin^2 A}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$
C. 1 D. $\frac{7}{2}$

6. (2017·山东)在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,且满足 $\sin B(1+2\cos C) = 2\sin A \cos C + \cos A \sin C$, 则下列等式成立的是 ()

- A. $a=2b$ B. $b=2a$
C. $A=2B$ D. $B=2A$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $A=60^\circ, c=4, a=2\sqrt{3}$, 则此三角形有 _____ 解.

8. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $B=60^\circ, b=2, a=x$. 若 C 有两组解,求 x 的取值范围.

C. 拓展创新

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=2, c=\sqrt{6}, A=45^\circ$, 解此三角形.

10. (2014·全国大纲卷) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $3a \cos C = 2c \cos A, \tan A = \frac{1}{3}$, 求角 B .

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b\cos B + c\cos C = a\cos A$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

12. (2015 · 全国卷 I) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$, $BC = 2$, 求 AB 的取值范围.

再生新疑

运用正弦定理解三角形时, 已知条件中往往不直接给出三角形的角, 而是以三角函数形式给出, 这样的问题应如何处理呢?

第二学时 余弦定理(一)



板块一 创设问题, 引领目标

导入问题, 直指学时重点

问题呈现

同学们, 我们知道: 如果已知一个三角形的两条边及其所夹的角, 根据三角形全等的判定方法, 这个三角形是大小、形状完全确定的三角形. 从量化的角度来研究这个问题, 如何从已知的两边和它们的夹角计算出三角形的另一边和另两个角呢? 余弦定理的内容是什么? 余弦定理能解决怎样的解三角形问题?

材料链接

1. 在学习余弦定理时, 要与正弦定理紧紧联系在一起, 明确各自能解决的问题的范围. 在解题的过程中要注意两者的结合, 合理选择, 灵活运用.

2. 由于解三角形的运算量较大, 建议使用计算器.

3. 判定三角形全等的方法: 边角边(SAS)定理, 边边边(SSS)定理, 角角边(AAS)定理等.



板块二 自学思疑, 初探问题

尊重认知规律, 亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

怎样用向量的方法来证明余弦定理?

请阅读教材 p5 的有关内容, 思考并回答下列问题:

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知两边的长 $BC = a$, $AC = b$, 边 BC 和边 AC 所夹的角是 C , 你如何得出用已知的 a, b 和 C 表示第三条边 c 的

一个公式?

❁ 2. 由于涉及边长问题,可以考虑用哪些方法来研究这个问题?

❁ 3. 用向量的方法证明余弦定理时,用到了有关向量的哪些知识?

❁ 4. 用向量的方法证明余弦定理有何优越性? 你体会到向量运算的优势了吗?



问题二

余弦定理的内容是什么?

请阅读教材 p5、p6“思考”栏目之前的内

容,思考并回答下列问题:

❁ 1. 用文字语言叙述余弦定理的内容及其形式特征.

❁ 2. 余弦定理的每个等式中都包含四个不同的量,显然“知三可求一”. 这蕴含了什么数学思想?

自主测评

1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=1, BC=2, B=60^\circ$, 则 $AC=$ _____.

2. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $b=\sqrt{2}, c=1, A=45^\circ$, 则 a 等于 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$
C. 2 D. $\sqrt{3}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=3, b=2, \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 c .

4. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a^2 - c^2 + b^2 = ab$, 则 C 等于 ()

- A. 60° B. 45° 或 135°
C. 120° D. 30°

疑点归纳

在自主学习、探究的过程中,大家有什么困惑,请记录到问题卡上.记得在课上或课后要及时解决哦!



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题三

证明余弦定理的其他方法是什么?

❀ 1. 你能运用坐标法证明余弦定理吗? 还有其它方法吗?

❀ 2. 利用三角恒等变换方法如何证明余弦定理呢? 证明时需分锐角三角形和钝角三角形两种情况,这是为什么?

❀ 3. 与向量法比较,哪一种方法更简捷?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

利用余弦定理能解决怎样的解三角形问题?

❀ 1. 教材 p7 例 3 中已知三角形的两边及其夹角,可解出这个三角形.能否先运用正弦定理,再运用余弦定理来解呢?

❀ 2. 已知三角形的两边和其中一边的对角时,也可以用余弦定理解三角形.如已知 a, b, A , 可先用余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ 求出 c , 那么三角形的解的个数如何确定呢?

展题设计

❀ 展题 1 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2, b = 2\sqrt{2}, C = 15^\circ$, 求角 A 的大小.

指导要求: 本题主要考查余弦定理及其应用. 可用余弦定理求边 c , 再用正弦定理求角 A . 用正弦定理求角时, 必须注意讨论解的情况. 结合三角形大边对大角的性质, 由于三角形中至少有两个锐角, 那么小边对的角一定是锐角. 也可先用余弦定理求边 c , 再用余弦定理的推论求角 A .

展题 2 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $(a+b+c) \cdot (b+c-a) = 3bc$, 且 $\sin A = 2\sin B \cos C$, 试确定 $\triangle ABC$ 的形状.

指导要求: 已知三角形中的边角关系式, 判断三角形的形状, 有两条思路: 其一, 化边为角, 再进行三角恒等变换, 求出三个角之间的关系式; 其二, 化角为边, 再进行代数恒等变换, 求出三条边之间的关系式. 两种转换主要应用正弦定理和余弦定理. 此题首先根据条件 $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$, 利用余弦定理求出一个角, 再利用另一个条件得到另外两个角的关系即可判断.

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会, 通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来, 以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中, 请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.



板块五 应用演练, 再生新疑

分级设题, 精选精练



分层演练

A. 基础巩固

1. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 下列等式不成立的是 ()

A. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

B. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$

C. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

D. $\cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2, b = 3, C = 45^\circ$, 则 c 等于 ()

A. $\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$

B. $13 + 6\sqrt{2}$

C. $13 - 6\sqrt{2}$

D. $\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{3}$, 且 $AB = 1, BC = 4$, 则边 BC 上的中线 AD 的长为 _____.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = \sqrt{2}, b = 2, \cos 2(A+B) = 0$, 则 $c =$ _____.

B. 能力提升

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $C = 120^\circ, c = \sqrt{2}a$, 则 ()

A. $a > b$

B. $a < b$

C. $a = b$

D. a 与 b 的大小关系不能确定

6. 在不等边 $\triangle ABC$ 中, a 是最长的边. 若 $a^2 < b^2 + c^2$, 则 A 的取值范围是 ()

A. $(90^\circ, 180^\circ)$

B. $(45^\circ, 90^\circ)$

C. $(60^\circ, 90^\circ)$

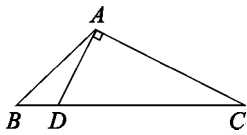
D. $(0^\circ, 90^\circ)$

7. (2013 · 福建) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中,

已知点 D 在 BC 边上,
 $AD \perp AC$, $\sin \angle BAC =$

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $AB = 3\sqrt{2}$, $AD =$

3, 则 BD 的长为 _____.



8. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 60^\circ$, $b^2 = ac$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

C. 拓展创新

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $C = 30^\circ$, 求最大角的度数.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c . 若 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$, $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$, 求角 A .

11. (2015 · 安徽) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{3\pi}{4}$, $AB = 6$, $AC = 3\sqrt{2}$, 点 D 在 BC 边上, $AD = BD$, 求 AD 的长.

12. (2017 · 天津) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a > b$, $a = 5$, $c = 6$, $\sin B = \frac{3}{5}$, 求:

(1) b 和 $\sin A$ 的值;

(2) $\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

再生新疑

我们已经学习了正弦定理和余弦定理, 那么在解决三角形问题时应该如何合理地选择两定理呢?

第三学时 余弦定理(二)



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

装修工人用 10 m 长的木棍制作一个三角形木架,首先把木棍截成 2 m, 3.5 m 和 4.5 m 三段,然后将三段木棍首尾相连钉起来,所组成的三角形木架的各个内角为多少? 由余弦定理可以解决上述问题吗? 将余弦定理变形,用边表示角,你能得出什么结论? 余弦定理的推论是什么? 运用余弦定理的推论能解决怎样的解三角形问题? 在解三角形时,如何灵活地选择正弦定理、余弦定理?

材料链接

✿ 1. 余弦函数的单调性: 函数 $y = \cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上是减函数.

✿ 2. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 则有等式 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A$; $\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C - 2 \sin A \sin C \cos B$; $\sin^2 C = \sin^2 B + \sin^2 A - 2 \sin B \sin A \cos C$.

✿ 3. $\triangle ABC$ 中一些常见的结论. 如: 三内角成等差数列, 则必有一角为 60° ; 若三内角的正弦值成等差数列, 则三边也成等差数列; 内角和定理与诱导公式结合产生的结论: $\sin A = \sin(B+C)$, $\cos A = -\cos(B+C)$, $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$, $\sin 2A = -\sin 2(B+C)$, $\cos 2A = \cos 2(B+C)$ 等.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读



问题一

余弦定理的推论是什么?

请阅读教材 p6 的有关内容,思考并回答下列问题:

✿ 1. 如何能得出余弦定理的推论?

✿ 2. 余弦定理与它的推论是什么关系?

✿ 3. 余弦定理的推论有何形式特征?

✿ 4. 余弦定理及其推论,从数量化的角度刻画了哪种判定三角形全等的方法?



问题二

运用余弦定理的推论可以解决怎样的解三角形问题?

请阅读教材 p6、p7 的有关内容,思考并回答下列问题:

✿ 1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知三边长分别为 a, b, c , 能用 a, b, c 表示出角 A, B, C 吗?

✿ 2. 运用余弦定理的推论解三角形, 解有多样性吗? 为什么?

✿ 3. 教材 p7 例 4 中用余弦定理的推论求出了角 A 的大小. 那么对于角 B, 能运用正弦定理求解吗?



问题三

余弦定理和勾股定理有什么关系?

请阅读教材 p6 的有关内容, 思考并回答下列问题:

✿ 1. 你能根据余弦定理和余弦函数的性质对余弦定理和勾股定理的关系进行探究吗?

✿ 2. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a^2 + b^2 < c^2$, 则此三角形是什么三角形? (按锐角三角形、直角三角形、钝角三角形进行分类)

✿ 3. 你能运用余弦定理来判断三角形的形状吗? (按锐角三角形、直角三角形、钝角三角形进行分类)

自主测评

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3, b=4, c=2$, 则 $\cos B$ 等于 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{3}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 若角 C 为钝角, 则下列结论成立的是 ()

A. $a^2 + b^2 > c^2$

B. $a^2 + b^2 < c^2$

C. $a^2 + b^2 = c^2$

D. $-\cos C < 0$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $2a \cos B = c$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $a, b, c = 2, \sqrt{6}, (\sqrt{3} + 1)$, 求 $\triangle ABC$ 各内角的度数.

疑点归纳

在自主学习、探究的过程中, 大家有什么困惑, 请记录到问题卡上. 记得在课上或课后要及时解决哦!

同学们, 在 $\triangle ABC$ 中, 若角 C 为钝角, 则有 $a^2 + b^2 < c^2$; 若角 C 为锐角, 则有 $a^2 + b^2 > c^2$. 你能给出解释吗?



板块三 合作互助, 共析问题

发展创新思维, 形成主动探究与合作的意识和能力



问题四

解三角形的问题可以分为几种类型?

✿ 1. 解三角形的问题可以分为几种类型?

❁ 2. 分别是怎样求解的?

❁ 3. 要求解三角形,是否必须已知三角形一边的长?请类比全等三角形的判定定理,说出你的见解.

❁ 4. 哪一类解三角形问题的解有多样性?



问题五

解三角形时如何选择运用正弦定理、余弦定理?

❁ 1. 在解三角形的过程中,求某一个角时可以用余弦定理,也可以用正弦定理,两种方法各有什么利弊?

❁ 2. 在解三角形时,选择正弦定理、余弦定理的标准是什么?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题六

将正弦定理和余弦定理结合起来,能得到什么结论?

❁ 1. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的

三个内角,等式 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$ 成立吗?请给出证明.

❁ 2. 当 $A+B+C=k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 时,上式成立吗?为什么?

❁ 3. 等式 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$ 能解决怎样的问题?



展题设计

❁ 展题 1 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=7, b=3, c=5$,求最大角和 $\sin C$.

指导要求:在三角形中,大边对大角,所以 a 边所对的角最大.根据已知三边求三角,可用余弦定理求解.

❁ 展题 2 在 $\triangle ABC$ 中, $A+C=2B, a+c=8, ac=15$,求 b .

指导要求:此题没有直接给出 $\triangle ABC$ 的角与边的大小,而是给出边角的关系,可以考虑用方程求解.由已知条件及三角形内角和定理求出 B ,再由 $a+c=8, ac=15$,结合余弦定理求 b .

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.



板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=3, b=4, c=5$, 则 $\sin A$ 等于 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{5}$
C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{3}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=5, BC=6, AC=8$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形
C. 钝角三角形 D. 任意三角形

3. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $A=120^\circ, AB=5, AC=7$, 则 $BC=$ _____.

4. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=2, b=3, c=4$, 则 $\cos C=$ _____.

B. 能力提升

5. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $b=2c\cos A, c=2b\cos A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()

- A. 直角三角形
B. 锐角三角形
C. 等边三角形
D. 等腰直角三角形

6. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对应边分别为 a, b, c , 且满足 $\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq 1$, 则角 A 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ B. $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$
C. $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ D. $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right)$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=b+2, b=c+2$, 又知最大角的正弦值等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $a=$ _____.

8. (2016 · 北京) 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$, 求:

- (1) 角 B 的大小;
(2) $\sqrt{2}\cos A + \cos C$ 的最大值.

C. 拓展创新

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3}{2}b$, 求证: $2b = a + c$.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $c = 4, b = 7$, BC 边上的中线 AD 的长为 $\frac{7}{2}$, 求 a .

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 边 a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且满足 $b \cos C = (3a - c) \cos B$.

(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 4, b = 4\sqrt{2}$, 求 a, c 的值.

12. (2014 · 安徽) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别是 a, b, c , 且 $b = 3, c = 1, A = 2B$. 求:

(1) a 的值;

(2) $\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

再生新疑

在解三角形时, 常常会用到三角函数的知识, 那么三角形中的三角函数问题你能解决吗?

1.2 应用举例

第一学时 应用举例(一)



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

在一次军事演习中,红方侦察员发现河的对岸有两个目标 A 与 B ,现在要量出 A, B 两点间的距离(不能到河对岸去测量),若你是侦察员,如何解决这个问题? 结合所学的正弦定理、余弦定理,请你设计出解决此问题的方案.若要测量两个不可到达的点之间的距离,又该如何解决?

材料链接

- ✿ 1. 在初中我们学习了一些测量距离的方法,如应用全等三角形、相似三角形和解直角三角形进行距离测量.
- ✿ 2. 测角仪是指度量角度大小的装置,又称测角器、测角计、角度计、量角仪等.
- ✿ 3. 解三角形应用题的基本思路:实际问题 $\rightarrow$ 数学问题 $\rightarrow$ 数学问题的解 $\rightarrow$ 实际问题的解.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读



问题一

如何解决从一个可到达的点到另一个不可到达的点之间距离的测量问题?

请阅读教材 p11、p12 的有关内容,思考并回答下列问题:

- ✿ 1. 设 A, B 两点在河的两岸,要测量 A, B 两点间的距离,能否把 AB 放在一个三角形中,通过解三角形来解决?
- ✿ 2. 在教材例 1 中,测量 $\angle BAC$ 和 $\angle ACB$ 所用的工具是什么? 测量 AC 的距离的工具是什么?
- ✿ 3. 在教材例 1 中,已知 $\triangle ABC$ 中的 $\angle BAC, \angle ACB$ 及 AC ,运用什么定理可以解出 AB ? 能求出 $\angle ABC$ 和 BC 吗?
- ✿ 4. 教材例 1 中运用了什么数学思想方法?

❁ 5. 解决此类问题的一般步骤是什么?



问题二

如何解决两个不可到达的点之间距离的测量问题?

请阅读教材 p11、p12 的有关内容,思考并回答下列问题:

❁ 1. 教材例 2 中涉及几个三角形? 每个三角形都可解吗?

❁ 2. 在教材例 2 中,求 AB 时,可把 AB 放置在哪个三角形中?

❁ 3. 在教材例 2 的 $\triangle ABC$ 中, AC,BC 可求吗? 若不可求, AC 和 BC 需放置在哪个三角形中求解?

❁ 4. 教材例 2 中运用了什么数学思想方法? 依此数学思想方法,想一想还有没有别的测量方法?



问题三

如何测量、计算出地球和月球之间的距离?

请阅读教材 p12 的有关内容,思考并回答下列问题:

❁ 1. 什么叫做基线?

❁ 2. 基线的选取有何要求?

❁ 3. 地球上所能用的最长的基线是什么?

❁ 4. 如何测量、计算出地球和月球之间的距离?

自主测评

1. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $A = 120^\circ, AB = 5, BC = 8$,则 $\sin C =$ _____.

2. 海上有 A, B 两个小岛,相距 10 n mile,从 A 岛望 C 岛和 B 岛成 60° 的视角,从 B 岛望 C 岛和 A 岛成 75° 的视角,则 B 岛和 C 岛间的距离为 ()

- A. $10\sqrt{3}$ n mile B. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ n mile
C. $5\sqrt{2}$ n mile D. $5\sqrt{6}$ n mile

3. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB = \sqrt{3} - 1, BC = \sqrt{3} + 1, AC = \sqrt{6}$,求角 B 的大小.

4. 一架飞机在海拔 2 km 的高空飞行,在空中测出前下方海岛两岸的俯角分别为 30° 和 45° ,求这个海岛的宽度.

疑点归纳

在自主学习、探究的过程中,大家有什么困惑,请记录到问题卡上.记得在课上或课后要及时解决哦!

同学们,若实际问题中涉及一个图形中有两个或多个三角形,已知这些三角形的边长和角,你能利用两定理(正弦、余弦定理)计算出未知的边和角吗?



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题四

对于教材例 2 中的问题,我们还有别的测量方法吗?

1. 请同学们思考解决教材例 2 中问题的其他方法.

2. 与教材例 2 中所给的方法比较,这些方法有什么异同?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题五

通过对教材中例 1 和例 2 的学习,总结所学习的这些测量距离的方法在实际中有什么应用?请举一些实际例子.

1. 测量距离的方法在实际中有什么应用呢?

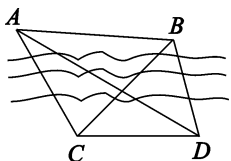
2. 怎样测量两个不可到达的点之间的距离?

3. 在解决测量距离问题的过程中,如何灵活运用正弦定理和余弦定理?



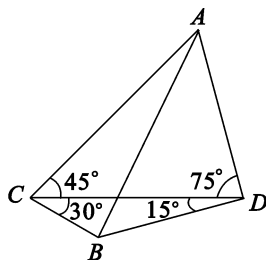
展题设计

※展题 1 如图,两目标 A, B 都在河的对岸,但不能到达,在岸边选取相距 $\sqrt{3}$ km 的 C, D 两点,并测得 $\angle ACB = 75^\circ, \angle BCD = 45^\circ, \angle ADC = 30^\circ, \angle ADB = 45^\circ$ (A, B, C, D 在同一平面内),求两目标 A, B 之间的距离.



指导要求:这类问题的情境一般属于“测量有障碍物相隔的两点间的距离”.在测量过程中,要根据实际需要选取合适的基线长度,测量工具要有较高的精确度.本题要求求出两目标 A, B 之间的距离,可在 $\triangle ABC$ (或 $\triangle ADB$) 中去找关系.但不管在哪个三角形中, $AC(BD), BC(AD)$ 这些量都是未知的,需要从三角形中找出合适的关系式,求出它们的值,剩下的就只需解三角形了.

※展题 2 某炮兵阵地位于地面 A 处,两观察所分别位于地面 C 和 D 处.已知 $CD = 6\ 000$ m, $\angle ACD = 45^\circ, \angle ADC = 75^\circ$,目标出现在地面 B 处时,测得 $\angle BCD = 30^\circ, \angle BDC = 15^\circ$,如图.求该炮兵阵地到目标的距离(结果保留根号).



指导要求:根据题意,结合图形,发现题中的 A, B, C, D 四点可构成四个三角形.在 $\triangle ADB$ 中,有 $\angle ADB = 75^\circ + 15^\circ = 90^\circ$.若求出 AD, BD 的长,就可以求出 AB 的长.

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.



板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=16$, $\angle BAC=45^\circ$, $\angle ACB=75^\circ$, 则 AB 等于 ()

- A. $\frac{4}{3}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$ B. $\frac{8}{3}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$
C. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{2}{3}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos B = \cos C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- A. 直角三角形 B. 等腰三角形
C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形

3. 已知两座灯塔 A, B 与海洋观察站 C 的距离都等于 a km, 灯塔 A 在观察站 C 的北偏东 20° 方向, 灯塔 B 在观察站 C 的南偏东 40° 方向, 则灯塔 A 与灯塔 B 间的距离为 _____ km.

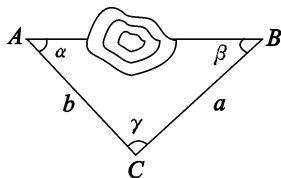
4. 在相距 2 km 的 A, B 两点处测量目标 C . 若 $\angle CAB=75^\circ$, $\angle CBA=60^\circ$, 则 A, C 两点之间的距离是 _____ km.

B. 能力提升

5. 一艘船以 4 km/h 的速度沿着与水流方向成 120° 的方向航行. 已知水流速度为 2 km/h, 则经过 $\sqrt{3}$ h 后船的实际航程为 ()

- A. 4 km B. 5 km
C. 6 km D. 8 km

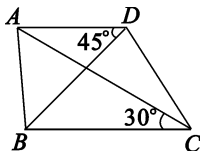
6. 如图, 为了测量某障碍物两侧 A, B 间的距离, 给定下列四组数据, 测量时应选用数据



- A. α, a, b B. α, β, a
C. a, b, γ D. α, β, b

7. 一艘船以每小时 15 km 的速度向东航行, 船在 A 处看到灯塔 B 在北偏东 60° 方向, 行驶 4 h 后, 船到达 C 处, 看到灯塔 B 在北偏东 15° 方向, 这时船与灯塔 B 的距离为 _____ km.

8. 如图所示, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB=5$, $AC=9$, $\angle ACB=30^\circ$, $\angle ADB=45^\circ$, 求 BD 的长.

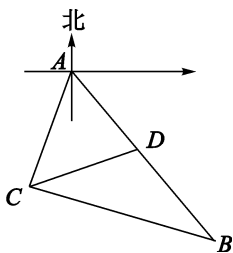


C. 拓展创新

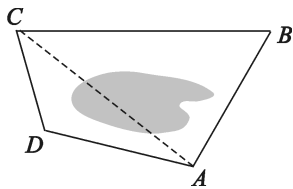
9. 某河段的两岸可视为平行, 为了测量该河段的宽度, 在河段的一岸边选取两点 A, B , 观察对岸的点 C , 测得 $\angle CAB=75^\circ$, $\angle CBA=45^\circ$, 且 $AB=100$ m. 求:

- (1) $\sin 75^\circ$ 的值;
(2) 该河段的宽度.

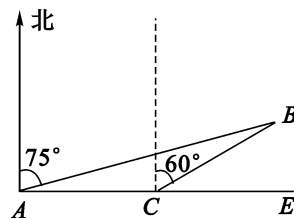
10. 如图所示, 某观测站 C 在 A 城的南偏西 20° 方向上. 从 A 城出发有一条公路, 走向是南偏东 40° . 在 C 处测得距 C 处 31 km 的公路 B 处有一人正沿着公路向 A 城走去, 走 20 km 后到达 D 处, 测得 $CD=21$ km. 这时此人距 A 城多少千米?



11. 如图所示, 为了测量 A, C 两点间的距离, 选取同一平面上的 B, D 两点, 测出四边形 $ABCD$ 各边的长度(单位: km): $AB=5, BC=8, CD=3, DA=5$, 且 $\angle B$ 与 $\angle D$ 互补, 求 AC 的长.



12. 如图, 海中有一小岛 B , 周围 3.8 n mile 内有暗礁. 一军舰从 A 地出发由西向东航行, 在 A 处望见小岛 B 在北偏东 75° 方向上, 航行 8 n mile 到达 C 处, 望见小岛 B 在北偏东 60° 方向上. 若此舰不改变航行的方向继续前进, 问此舰有没有触礁的危险?



再生新疑

在解决实际问题时, 需要画出图形, 根据图形的直观性求解. 若图形中涉及的各个三角形条件都不够, 不能直接解出, 那么对于这样的问题该如何处理?

第二学时 应用举例(二)



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

同学们,初中我们学过哪些测量物体高度的方法?欲测量一座山的高度,但山的底部不可到达.现有测角仪器和钢卷尺,你能利用这些工具测量并计算出山的高度吗?在测量和计算高度问题时如何运用正弦定理和余弦定理?

材料链接

在解决与三角形有关的实际问题时,经常出现一些有关的名词、术语,如仰角、俯角、方位角、方向角、铅垂平面等.

(1)仰角与俯角:指在同一铅垂平面内视线与水平线的夹角.当视线在水平线之上时,称为仰角;当视线在水平线之下时,称为俯角.

(2)方位角:从指北方向线顺时针旋转到目标方向线所成的水平角.

(3)方向角:指北或指南的方向线与目标线所成的小于 90° 的水平角.

(4)铅垂平面:是指与水平面垂直的平面.

(5)视角:由物体两端射出的两条光线在眼球内交叉而成的角.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

- 如何测量底部不可到达的建筑物的高度?
- 请阅读教材 p13 的有关内容,思考并回答下列问题:
- 1. 在教材例 3 中,选择水平基线有什么限制?
 - 2. 在教材图 1.2-4 中有几个三角形?边 AB 是哪些三角形的边?
 - 3. 在教材图 1.2-4 的 $\triangle ACD$ 中,求边 AC 运用了什么定理?边 AD 可求吗?进而可求 AB 吗?
 - 4. 测量中测角仪器的高度需要测量吗?为什么?
 - 5. 测量高度的问题与测量距离的问题有相似之处吗?是什么?

问题二

- 如何测量山的高度?
- 请阅读教材 p13、p14 的有关内容,思考并回答下列问题:
- 1. 观察教材图 1.2-5 中的 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$, 看其元素之间有何关系?

❀ 2. 对于教材例 4, 在 $\triangle ACB$ 中已知的条件有哪些? 求 AB, BD 时运用了什么定理和什么边角关系?

❀ 3. 对于教材例 4, 在 $\triangle ABD$ 中, 已知的条件有哪些? 此三角形可解吗? 在 $\triangle ACD$ 中, 已知的条件有哪些? AC 可求吗? 在此三角形中可求出山高 CD 吗?

❀ 4. 在教材例 5 中, 在 $\triangle DCB$, $\triangle DCA$ 和 $\triangle ABC$ 在同一平面吗? CD 在哪些三角形中? 在 $\triangle BCD$ 中要计算 CD , 需要求出 BC 吗? BC 在 $\triangle ABC$ 中, 能根据已知条件求出吗? 求解时运用了什么定理?

❀ 5. 教材例 4、例 5 中都是测量山的高度的问题, 两种测量方法有何相似之处与不同之处?

自主测评

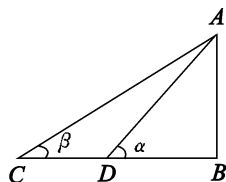
1. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=C=30^\circ, BC=8$, 则 BC 边上的高为 _____.

2. 从 A 处望 B 处的仰角为 α , 从 B 处望 A 处的俯角为 β , 则 α, β 的关系是 ()

- A. $\alpha > \beta$ B. $\alpha = \beta$
C. $\alpha + \beta = 90^\circ$ D. $\alpha + \beta = 180^\circ$

3. 在一幢 20 m 高的楼的楼顶测得对面一塔顶的仰角为 60° , 塔基的俯角为 45° , 求这座塔的高度.

4. 如图所示, C, D, B 三点在地面同一直线上, $DC=a$, 从 D, C 两点测得 A 点的仰角分别为 $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$, 求证: A 点离地面的高 AB 为 $\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.



疑点归纳

在自主学习、探究的过程中, 大家有什么困惑, 请记录到问题卡上. 记得在课上或课后要及时解决哦!



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题三

结合教材中的三个实例,你能总结出测量高度的方法吗?

✿ 1. 教材例 3 中的测量高度问题有何特征? 解决此类测量高度问题的方法是什么?

✿ 2. 教材例 4 中的测量高度问题有何特征? 解决此类测量高度问题的方法是什么?

✿ 3. 教材例 5 中的测量高度问题有何特征? 解决此类测量高度问题的方法是什么?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

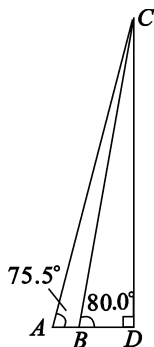
实际情境中的解三角形问题会涉及一个图形中有多个三角形,那么如何利用几个三角形之间的关系解三角形呢?

✿ 1. 测量高度问题会涉及一个图形中有多个三角形,如何寻求各个三角形之间的关系呢?

✿ 2. 当一个图形中有多个三角形不在同一平面时,如何利用立体几何知识处理问题?

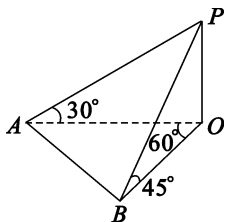
✿ 3. 在解决涉及一个图形中有多个三角形的问题时是如何利用方程思想的?

展题 1 如图,为了测量上海东方明珠塔的高度,某人站在 A 处测得塔尖的仰角为 75.5° ,前进 38.5 m 后,到达 B 处测得塔尖的仰角为 80.0° . 试计算东方明珠塔的高度(精确到 1 m).



指导要求: 本题考查正弦定理的应用,属于测量高度的实际问题. 设塔高为 CD , 由于 CD 难以直接求解, 我们可借助解直角三角形求解. 只要能计算出 BC 的长, 则在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 可求得塔高 CD , 而 BC 的长可在 $\triangle ABC$ 中利用正弦定理求得.

展题 2 如图,地面上有一旗杆 OP ,为了测得它的高度,在地面上选一基线 AB ,测得 $AB=20\text{ m}$,在 A 处测得点 P 的仰角为 30° ,在 B 处测得点 P 的仰角为 45° ,同时可测得 $\angle AOB=60^\circ$,求旗杆的高度(精确到 1 m).



指导要求: 此题涉及立体几何的相关知识. 设旗杆的高度为 h . 由题意知, $\angle OAP=30^\circ$, $\angle OBP=45^\circ$, 旗杆 OP 垂直于地面, 即 $\triangle AOP$ 和 $\triangle BOP$ 都是直角三角形. 在 $\triangle AOB$ 中, 可利用余弦定理构造方程求解.

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.



分级设题,精选精练

1. 已知两座灯塔 A, B 与海洋观察站 C 的距离相等, 灯塔 A 在观察站 C 的北偏东 40° 方向, 灯塔 B 在观察站 C 的南偏东 60° 方向, 则灯塔 A 在灯塔 B 的 ()

- A. 北偏东 10° 方向
- B. 北偏西 10° 方向
- C. 南偏东 10° 方向
- D. 南偏西 10° 方向

()

- C. $10\sqrt{2}$ m D. $10\sqrt{3}$ m

仰角为 β , 则山顶的仰角为_____.

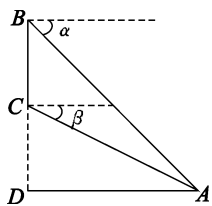
角为 30° , 则乙楼高 _____ m.

B. 能力提升

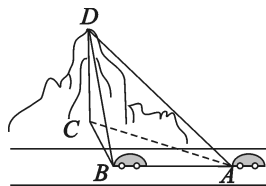
样继续爬行可回到出发点处,那么 x 等于

- C. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ cm D. 20 cm

m.

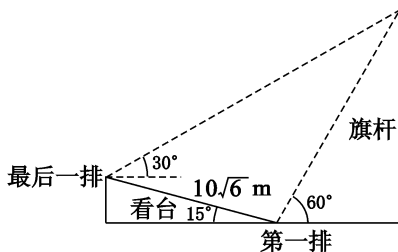


m.

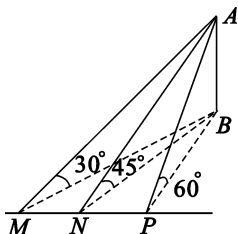
距离为 $h \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$.

C. 拓展创新

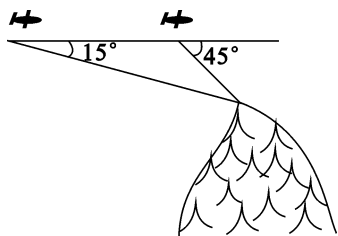
升旗的速度.



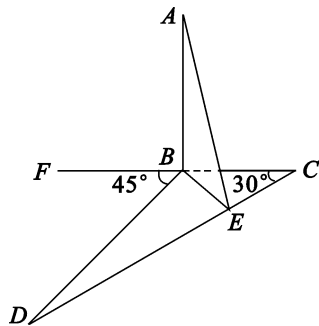
10. 如图,测量人员沿直线 MNP 的方向测量,在 M, N, P 三点处测得塔 AB 的仰角分别是 $\angle AMB = 30^\circ$, $\angle ANB = 45^\circ$, $\angle APB = 60^\circ$, 且 $MN = PN = 500$ m, 求塔高.



11. 如图,航空测量组的飞机航线和山顶在同一铅直平面内. 已知飞机的高度为海拔 10 000 m, 速度为 180 km/h. 飞机先看到山顶的俯角为 15° , 经过 420 s 后又看到山顶的俯角为 45° , 求山顶的海拔高度 ($\sqrt{2} \approx 1.4$, $\sqrt{3} \approx 1.7$).



12. 如图,某人在塔 AB 的正东方向 C 处沿着南偏西 60° 的方向前进 80 m 后到达 D 处,望见塔在东北方向上. 若沿途测得塔的最大仰角为 30° , 求塔高.



再生新疑

测量高度的问题涉及的图形常常不在同一平面,这就需要将问题转化为立体几何问题,那么如何利用立体几何知识去解决这些问题呢?

第三学时 应用举例(三)



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

星期天,同学们到公园的小河中划船. 在静水中划船的速度是每分钟 40 m, 水流的速度是每分钟 20 m. 如果船从岸边 A 处出发,要想沿着与水流垂直的航线到达对岸,那么船前进的方向应指向河流的上游并与河岸垂直方向所成的角为多少度? 如何运用正、余弦定理解决测量角度的问题? 两定理在运用中有何利弊?

材料链接

应用正弦、余弦定理解决斜三角形应用题的一般步骤:

(1)分析:理解题意,分析已知与未知,画出示意图;

(2)建模:根据已知条件与求解目标,把已知量与求解量尽量集中到一个三角形中,建立一个解斜三角形的模型;

(3)求解:利用正弦、余弦定理有序地解三角形,求得数学模型的解;

(4)检验:检验上述所求得解是否符合实际,从而得出实际问题的解.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读



问题一

如何运用正弦定理和余弦定理解决测量角度的问题?

请阅读教材 p15、p16 的有关内容,思考并回答下列问题:

✿ 1. 在教材例 6 的 $\triangle ABC$ 中,可由已知条件求出的角是哪一个?

✿ 2. 由已知条件可以解出 AC ,求解时运用了什么定理?

✿ 3. 求 $\angle CAB$ 时运用余弦定理可以吗?

✿ 4. 在解三角形问题中,求某些角的度数时,最好用什么定理?你能说出原因吗?

自主测评

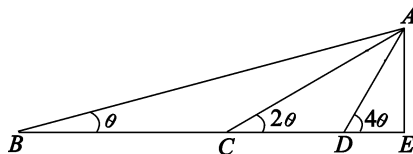
1. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3, b=4, \sin A = \frac{1}{3}$,

则 $\cos B =$ _____.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $c=6, a=4, B=120^\circ$, 则 b 等于 ()

- A. 76 B. $2\sqrt{19}$
C. 27 D. $2\sqrt{7}$

3. 如图所示,在点 B 处测得建筑物 AE 的顶端 A 的仰角为 θ ,沿 BE 方向前进 30 m 至点 C 处,测得顶端 A 的仰角为 2θ ,再继续前进 $10\sqrt{3}$ m 至点 D 处,测得顶端 A 的仰角为 4θ ,求 θ 的大小和建筑物 AE 的高.



4. 甲船在 A 点发现乙船在北偏东 60° 方向的 B 处,此时乙船以 10 n mile/h 的速度向正北方向航行. 已知甲船的速度是 $10\sqrt{3}$ n mile/h,问甲船应沿着什么方向前进,才能最快与乙船相遇?

疑点归纳

在自主学习、探究的过程中,大家有什么困惑,请记录到问题卡上.记得在课上或课后要及时解决哦!



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题二

解决角度计算问题的步骤是什么?

❁ 1. 涉及角度计算的问题的解决步骤是什么?

❁ 2. 问题中涉及多个三角形时,应如何运用各三角形之间的关系?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题三

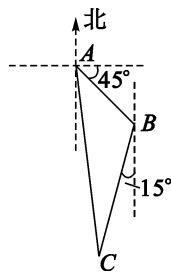
在解决测量距离、高度和角度的问题时运用的思想方法有哪些?

❁ 1. 如何运用数形结合的思想方法去解决实际问题?有什么优势?

❁ 2. 如何运用方程思想去解决实际问题?有什么优势?

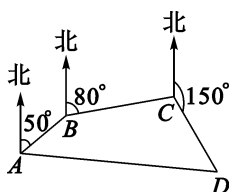
展题设计

❁ 展题 1 如图,甲船在 A 处,乙船在 A 处的南偏东 45° 方向的 B 处,距 A 处 9 n mile ,并以 20 n mile/h 的速度沿南偏西 15° 方向行驶.若甲船以 28 n mile/h 的速度行驶,应沿什么方向(精确到度),最快用多少小时能追上乙船?



指导要求:假设用 $t \text{ h}$ 在 C 处追上乙船,则在 $\triangle ABC$ 中,已知的条件有哪些?能否直接解 $\triangle ABC$? 在 $\triangle ABC$ 中, AC, BC 能用 t 来表示吗? 此题中用到的思想方法是什么?

※展题 2 如图,某人沿一条小路前进,从 A 到 B ,方位角是 50° ,距离是 470 m;从 B 到 C ,方位角是 80° ,距离是 860 m;从 C 到 D ,方位角是 150° ,距离是 640 m. 试计算出从 A 到 D 的方位角和距离.



指导要求: 计算从 A 到 D 的方位角,需构造三角形,连接 AC . 在 $\triangle ABC$ 中,用余弦定理求出 AC ,进而求出 $\angle BAC$,再在 $\triangle ACD$ 中,求出 AD 和 $\angle CAD$.

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.



板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB = BC = 5$, AC 边上的高为 3,则 $\cos B$ 等于 ()

- A. $\frac{7}{25}$ B. $\frac{8}{25}$
C. $-\frac{8}{25}$ D. $-\frac{7}{25}$

2. 已知 A, B 两点在正北方向上, C 到 A, B 两点的距离相等. 设 C 在 B 的南偏东 20° 方向,则 C 在 A 的 ()

- A. 北偏东 20° 方向
B. 北偏东 70° 方向
C. 南偏东 20° 方向
D. 南偏东 70° 方向

3. 一轮船从 A 点出发,向正东方向航行 10 km 后,到达海岛 B . 然后从 B 处出发,沿北偏东 30° 方向航行 10 km 后到达海岛 C . 如下次航行直接从 A 出发到达 C ,则此船应沿 ()

- A. 北偏东 60° 方向航行
B. 北偏东 30° 方向航行
C. 北偏东 45° 方向航行
D. 正东方向航行

4. 炮兵为定位目标 A ,选用观察点 B 和 C ,测得 $BC = m$ km, $\angle CBA = \alpha$, $\angle ACB = \beta$,则 A 和 B 之间的距离为 _____ km.

B. 能力提升

5. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, $AB = 3$,

$BC=4, CD=5, AD=6$, 则 $\cos A$ 等于 ()

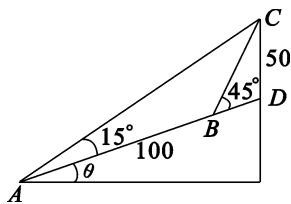
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{12}$
C. $\frac{1}{19}$ D. $\frac{1}{21}$

6. 某海上缉私小分队驾驶缉私艇以 40 km/h 的速度由 A 处出发, 沿北偏东 60° 方向航行, 进行海面巡逻, 当行驶半小时到达 B 处时, 发现北偏西 45° 方向上有一艘船 C . 若 C 船位于 A 处北偏西 30° 方向上, 则缉私艇 B 与船 C 的距离是 ()

- A. $10(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ km}$
B. $10(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ km}$
C. $20(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ km}$
D. $20(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ km}$

7. 在某电线杆的正东方向的 A 点处, 测得电线杆顶端的仰角是 60° , 在电线杆的南偏西 60° 的 B 点处, 测得电线杆顶端的仰角是 45° . 若 A, B 间的距离是 35 m , 则此电线杆的高度是 _____.

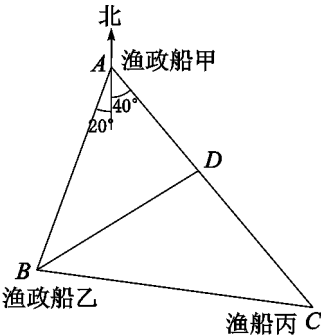
8. 如图, 在斜度一定的山坡上一点 A 处测得山顶上一建筑物 CD 的顶端 C 对于山坡的斜度为 15° , 向山顶前进 100 m 后, 又从点 B 处测得建筑物顶端 C 对于山坡的斜度为 45° . 假设建筑物高 50 m , 求此山坡对于地平面的斜度 θ .



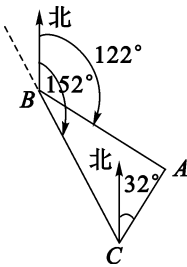
C. 拓展创新

9. 我缉私巡逻艇在一小岛 A 南偏西 50° 的方向, 距小岛 12 n mile 的 B 处, 发现隐藏在小岛边上的一走私船正开始沿小岛北偏西 10° 的方向航行, 测得其速度为 10 n mile/h , 问我巡逻艇需用多大的速度朝什么方向航行才能恰好在 2 h 后截获该走私船 (参考数据: $\sin 38^\circ \approx 0.62$)?

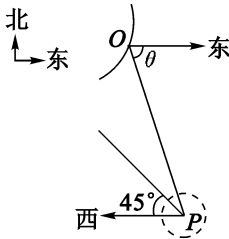
10. 如图,正在海上 A 处执行任务的渔政船甲和在 B 处执行任务的渔政船乙,同时收到同一片海域上一艘渔船丙的求救信号,此时渔船丙在渔政船甲的南偏东 40° 方向距渔政船甲 70 km 的 C 处,渔政船乙在渔政船甲的南偏西 20° 方向的 B 处. 两艘渔政船协调后立即让渔政船甲向渔船丙所在的位置 C 处沿直线 AC 航行前去救援,渔政船乙仍留在 B 处执行任务. 渔政船甲航行 30 km 到达 D 处时,收到新的指令另有重要任务必须执行,于是立即通知在 B 处执行任务的渔政船乙前去救援渔船丙(渔政船乙沿直线 BC 航行前去救援渔船丙),此时 B, D 两处相距 42 km. 问渔政船乙要航行多少千米才能到达渔船丙所在的位置 C 处实施营救?



11. 如图,货轮在海上以 35 n mile/h 的速度沿方位角(从正北方向顺时针转到目标方向线的水平角)为 152° 的方向航行. 为了确定货轮的位置,在 B 点处观测到灯塔 A 的方位角为 122° . 半小时后,货轮到达 C 点处,观测到灯塔 A 的方位角为 32° . 求此时货轮与灯塔之间的距离.



12. 在某海滨城市附近海面有一台风,据监测,当前台风中心位于城市 O(如图)的东偏南 θ ($\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$) 方向 300 km 的海面 P 处,并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动,台风侵袭的范围为圆形区域,当前半径为 60 km,并以 10 km/h 的速度不断增大,问几小时后该城市开始受到台风的侵袭? 受到台风侵袭的时间为几小时?



再生新疑

我们知道运用向量的数量积可以解决有关角度的问题,那么在实际问题中涉及角度计算时能运用向量的方法吗?如何运用?

第四学时 应用举例(四)



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

在 $\triangle ABC$ 中,已知三角形的两边长分别为 b, c ,两边的夹角为 A ,如何用已知量表示这个三角形的面积?正弦定理和余弦定理能解决与三角形有关的哪些问题?三角形的面积公式有哪些运用?

材料链接

1. 三角形的面积公式有多个. 比如:

$$① S = \frac{1}{2} ah_a \quad (h_a \text{ 表示 } BC \text{ 边上的高});$$

$$② S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A};$$

$$③ S = \frac{1}{2} (a+b+c)r \quad (r \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 内切}$$

圆半径);

$$④ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p =$$

$$\frac{1}{2} (a+b+c);$$

$$⑤ S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2}.$$

(在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c)

2. 半角定理:在 $\triangle ABC$ 中,三个内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c ,三个角的半角的正切和三边之间有如下的关系:

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1}{p-a} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{1}{p-b} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{1}{p-c} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

其中 $p = \frac{1}{2} (a+b+c)$.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读



问题一

如何推导出三角形的面积公式 $S =$

$$\frac{1}{2} ab \sin C ?$$

请阅读教材 p16 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 在 $\triangle ABC$ 中,如何运用正弦定理得出边 BC, CA, AB 上高的计算公式呢?

✿ 2. 运用以上高的计算公式可以推导出三角形的面积公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, 另两个公式是什么? 试由此面积公式推导出正弦定理.

✿ 3. 三角形的面积公式有什么作用?

✿ 4. 你能写出三角形的面积公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ 的一些变式吗?

✿ 5. 从方程角度看面积公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, 它能解决知几量求几量的问题?

问题二

已知三角形的三边长为 a, b, c , 如何求三角形的面积?

请阅读教材 p16 ~ p18 例 7、例 8 的内容, 思考并回答下列问题:

✿ 1. 若要运用公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ 求面积, 需先求 $\sin C$, 那么 $\sin C$ 如何求呢? 求解时需运用什么定理?

✿ 2. 能由三角形的三边长 a, b, c 直接表示出三角形的面积吗?

问题三

如何运用正弦、余弦定理进行三角形边角关系等式的证明呢?

请阅读教材 p18 的有关内容, 思考并回答下列问题:

✿ 1. 证明恒等式的思路有哪些?

✿ 2. 在进行三角形边角关系恒等式证明时, 运用正弦定理和余弦定理进行边角互化, 可以统一到边的形式, 也可以统一到角的形式, 两者各有什么特点?

❀ 3. 结合对教材例 9 的学习,总结出三角形边角关系恒等式的证明方法和思路.

❀ 4. 证明过程中体现了什么数学思想?

自主测评

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=10, c=8, B=120^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 .

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B=C=60^\circ, b=4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A. $3\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$

C. $5\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=3, b=4, c=5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

4. (2017·全国卷Ⅲ) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\sin A + \sqrt{3}\cos A = 0$, $a = 2\sqrt{7}, b = 2$.

(1) 求 c ;

(2) 设 D 为 BC 边上一点, 且 $AD \perp AC$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

疑点归纳

在自主学习、探究的过程中,大家有什么困惑,请记录到问题卡上.记得在课上或课后要及时解决哦!



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题四

除了上述三角形的面积公式之外,你还知道哪些? 各有什么特点?

❀ 1. 请写出你知道的三角形的面积公式.

❀ 2. 运用这些面积公式如何求三角形的面积?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题五

平面内多边形的面积如何求?

❁ 1. 求多边形面积的问题如何转化为求三角形的面积问题?

❁ 2. 解三角形的问题在求三角形的面积时如何体现?



展题设计

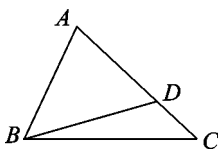
❁展题 1 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\sin \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AB=2$,点 D 在线段 AC 上,且 $AD=$

$$2DC, BD = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

(1) 求 BC 的长;

(2) 求 $\triangle DBC$ 的面积.

指导要求:图中几个三角形都不能直接求解,可考虑设出 BC 和 AC ,通过解方程得到 BC 和 AC .分析 $\triangle DBC$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积的关系,即可得出 $\triangle DBC$ 的面积.



❁展题 2 在 $\triangle ABC$ 中,求证: $a\cos B -$

$$b\cos A = \frac{a^2 - b^2}{c}.$$

指导要求:(1)观察所要证明的等式,发现左边含有 $\cos B, \cos A$,由余弦定理的推论,把等式左边含角的式子化为边.(2)观察到等式两边是差的形式,可以利用余弦定理的两关系式相减.



归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.



板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练



分层演练

A. 基础巩固

1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=6, A=30^\circ, B=120^\circ$,则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()

A. 9

B. 18

C. $9\sqrt{3}$

D. $18\sqrt{3}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=5, b=4, \sin C = \frac{4}{5}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于 ()

- A. 4 B. 6
C. 8 D. 16

3. 在钝角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=12, b=15, C = \frac{3\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于 _____.

4. (2017·浙江) 已知 $\triangle ABC, AB=AC=4, BC=2, D$ 为 AB 延长线上一点, $BD=2$, 连接 CD , 则 $\triangle BDC$ 的面积是 _____.

B. 能力提升

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=2, b=3, c=\sqrt{19}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. 2

6. 平行四边形两条邻边的长分别是 $4\sqrt{6}$ cm 和 $4\sqrt{3}$ cm, 它们的夹角为 45° , 则它的面积为 ()

- A. 36 cm^2 B. 40 cm^2
C. 48 cm^2 D. $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 为它的三边, 且三角形的面积为 $\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$, 则 $C =$ _____.

8. (2016·浙江) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $b+c=2a\cos B$.

(1) 证明: $A=2B$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{a^2}{4}$, 求角 A 的大小.

C. 拓展创新

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A} = \frac{\cos B}{\cos C}$.

10. (2017·北京) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ, c = \frac{3}{7}a$.

(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 若 $a=7$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

11. (2014·全国新课标I(改编)) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a=2$, 且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

12. (2015 · 全国卷 II) 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

(1) 求 $\frac{\sin B}{\sin C}$ 的值;

(2) 若 $AD=1, DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 BD 和 AC 的长.

再生新疑



第一章学习报告

请根据自己对本章内容的学习和体会,列出本章内容主要涉及的知识点、公式、图象、方法等,并通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“书面表达”等方式将你所列出的内容系统化.要注意和别的同学多交流,并及时记录下其他同学的优点,补充完善自己的不足之处.

指导要求:阅读教材 p23 的有关内容,思考下列问题.在此基础上建立更全面的符合你的学习过程的“知识网络图”或“思维导图”.

❀ 1. 正弦定理和余弦定理有什么重要作用? 利用它们能解决哪些问题?

❀ 2. 在三角形中,将正弦定理和余弦定理结合在一起,能得出怎样的结论?

❀ 3. 在解三角形中应用两个定理时要注意些什么问题?

❀ 4. 一个图形中有多个三角形时,你如何来解这些三角形呢?

❀ 5. 三角形的面积公式有哪些? 各有什么特点与作用?

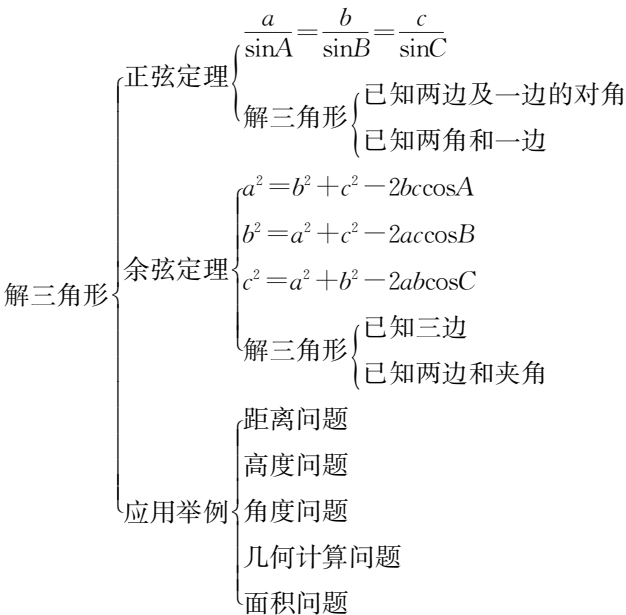
❀ 6. 解三角形的应用主要体现在哪些方面?

❀ 7. 三角恒等式的证明需要用到三角函数公式,你能把三角函数公式和两个重要定理结合起来用吗?

❀ 8. 从初中到高中,我们研究过哪些测量河流宽度和物体高度的方法? 它们的适用范围有哪些不同?

❀ 9. 本章研究解三角形问题用到的思想方法有哪些?

10. 本章所研究内容的基本框架如图所示：



数学探究活动

体验数学研究的过程和创造的激情

数学探究

秦九韶与三斜求积术

周教六艺，数实成之……大则可以通神明，顺性命；小则可以经世务，类万物，诂容以浅近窥哉！

——《数书九章序》秦九韶

前言

众所周知，三角形面积公式是：面积 = 底 × 高 ÷ 2. 这算式虽然简单，但是实际使用起来，又似乎不大“方便”. 试想想：如果我们在一个球场上画了一个很大的三角形，要在地面上准确地定出某条底边的高并不容易，而且过程亦很繁复. 不过，很明显，这个三角形三条边的长不难求得，只要用一把足够长的尺子去度量就可以了. 于是我们自然会问：知道三角形三

条斜边的长度，可以求出三角形的面积吗？

上述问题的答案是肯定的，而且该面积公式已被发现了好几百年. 下面为大家介绍中国南宋时期的数学家秦九韶以及他的“三斜求积术”.

秦九韶

秦九韶生于 1202 年，卒于 1261 年，正是我国战乱频发的南宋时期，虽然秦九韶的父亲是一名太守，但仍然逃不过需要四处迁徙逃避战祸的命运. 正因此，秦九韶自小就跟父亲到过很多地方. 此外，他自幼就思想活跃，对天文、音律、算术、建筑等都有浓厚的兴趣. 在 1247 年，他从他以往研究过的数学问题中，精选了 81 道题目，将它们编写成一本名叫《数书九章》的书. 由于这本书的内容丰富，题目生动有趣，所以深受后世数学家的重视和喜爱，因此该书亦被认为是我国数学史上

的巨著之一.

在《数书九章》的第三章中,秦九韶就提出了以下的问题:

问有沙田一段,有三斜.其小斜一十三里,中斜一十四里,大斜一十五里……欲知为田几何.

意思就是叫读者求边长分别为 13 里、14 里和 15 里的一个三角形的面积.秦九韶称这道题目为“三斜求积”,而后世人就称书中求面积的方法为“三斜求积术”了.

三斜求积术

在《数书九章》中,秦九韶对求三角形面积的方法有如下的阐释:

以小斜幂并大斜幂,减中斜幂,余半之,自乘于上;以小斜幂乘大斜幂,减上,余四约之为实……开平方得积.

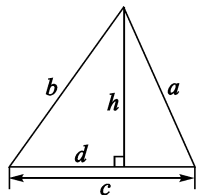
转成现代的数学符号,即:如果三角形三条边的长度分别为 a, b 和 c , 则

$$\text{面积} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2}.$$

依照公式,代入 $a = 13, b = 14, c = 15$, 就得到三角形的面积为 84 平方里了.

此公式看起来很复杂,而且正如中国其他古代数学书一样,秦九韶并没有在书中给出这个公式的证明,但是只要大家懂得“勾股定理”和代数式自乘的法则,就不难获得此式的证明,方法如下:

如图所示,



$$d = c - \sqrt{a^2 - h^2},$$

$$\begin{aligned} \therefore b^2 &= (c - \sqrt{a^2 - h^2})^2 + h^2 \\ &= a^2 + c^2 - 2c\sqrt{a^2 - h^2}. \end{aligned}$$

$$\therefore c\sqrt{a^2 - h^2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}.$$

两边平方,得

$$a^2 c^2 - c^2 h^2 = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2.$$

$$\text{面积} = \frac{ch}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2}.$$

秦氏三角

后世人对《数书九章》也有不少批评,其中一项就是指它“脱离现实”.好似上面讨论过的例子,我们根本不可能有一块田,它的一边长“一十五里”.这个数字实在大了一点.不过,批评秦九韶的人似乎忘记了,秦九韶所引用的例子,其实有一个特点:这个三角形的边长是三个连续整数,而且面积亦刚好又是一个整数!只要大家细想想就会了解,这是一个很难得的“巧合”.秦九韶一定是经过细心的选择,才引用这个例子的.

因此有数学家就称具有上述特点的三角形为“秦氏三角”.除了 (13, 14, 15) 可以组成“秦氏三角”外,还有 (3, 4, 5)、(51, 52, 53)、(193, 194, 195)、(723, 724, 725) 等等.现在更有数学家发现:如果 k 是一个正整数,只要 $\sqrt{3(k^2 - 1)}$ 亦是一个正整数,则 $(2k - 1, 2k, 2k + 1)$ 就可组成一个“秦氏三角”了.

海伦公式

最后要提的是,秦九韶并不是历史上第一位懂得“三斜求积”方法的人.在公元 100 年左右,希腊数学家海伦早已提出了一个计算三角形面积而且更简单的公式.不过,他当时提出的证明方法非常复杂.如果从秦九韶的公式出发,我们会比较容易获得“海伦公式”:

$$\begin{aligned} \text{面积} &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16} [4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{1}{16}(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{16}[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{16}(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}
 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c \right)},$$

最后设 $s = \frac{a+b+c}{2}$ ，则面积 =

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，这就是“海伦公式”了。

第一章综合测试

(时间:90 分钟 满分:100 分)

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $B = 30^\circ$, 则角 A 等于 ()

- A. 30° B. 60°
C. 120° D. 60° 或 120°

2. (2016·全国卷Ⅲ) 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$, 则 $\cos A$ 等于 ()

- A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$
C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

3. 根据下列情况判断三角形解的情况, 其中正确的是 ()

- A. $a = 8$, $b = 16$, $A = 30^\circ$, 有两解
B. $a = 16$, $b = 20$, $A = 60^\circ$, 有一解
C. $a = 5$, $b = 2$, $A = 90^\circ$, 无解
D. $a = 30$, $b = 25$, $A = 150^\circ$, 有一解

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $(b+c)(c+a)(a+b) = 456$, 则 $\sin A \sin B \sin C$ 等于 ()

- A. $\frac{6}{54}$ B. $\frac{7}{58}$
C. $\frac{3}{57}$ D. $\frac{4}{56}$

5. (2015·广东) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c . 若 $a = 2$, $c = 2\sqrt{3}$, $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $b < c$, 则 b 等于 ()

- A. 3 B. $2\sqrt{2}$
C. 2 D. $\sqrt{3}$

6. (2014·全国新课标卷Ⅱ) 钝角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}$, $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, 则 AC 等于 ()

- A. 5 B. $\sqrt{5}$
C. 2 D. 1

7. 某人要做一个三角形, 要求它的三条高的长度分别是 $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{5}$, 则此人将 ()

- A. 不能做出满足要求的三角形
B. 做出一个锐角三角形
C. 做出一个直角三角形
D. 做出一个钝角三角形

8. (2014·江西) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 所对的边分别是 a , b , c . 若 $c^2 = (a-b)^2 + 6$, $C = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()

- A. 3 B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

9. 三角形两边之差为 2, 夹角的余弦值为 $\frac{3}{5}$, 面积为 14, 那么这个三角形这两边的长分别是 ()

- A. 3 和 5 B. 4 和 6
C. 6 和 8 D. 5 和 7

10. 在 200 m 高的山顶上测得山下一塔顶与塔底的俯角分别为 30° , 60° , 则塔高为 ()

- A. $\frac{400}{3}$ m B. $\frac{400\sqrt{3}}{3}$ m

C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ m D. $\frac{200}{3}$ m

二、填空题(本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=3$, $A=60^\circ$, $B=45^\circ$, 则 $c=$ _____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A \sin B = \sqrt{2}$, $c^2 = b^2 + \sqrt{2}bc$, 则三内角 A, B, C 的度数依次是 _____.

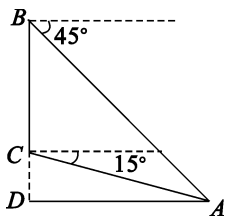
13. 已知三角形的三边长分别为 $a, b, \sqrt{a^2+ab+b^2}$, 则三角形最大内角的大小为 _____.

14. (2014 · 福建) 在 $\triangle ABC$ 中, $A=60^\circ$, $AC=4$, $BC=2\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于 _____.

15. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边, S 是 $\triangle ABC$ 的面积. 若 $a=4$, $b=5$, $S=5\sqrt{3}$, 则边 c 的值为 _____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $2\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin A$, $\sin(B-C) = 4\cos B \sin C$, 则 $\frac{b}{c} =$ _____.

17. 如图, 在山顶铁塔上 B 处测得地面上点 A 的俯角为 45° , 在塔底 C 处测得点 A 的俯角为 15° . 已知铁塔 BC 的高为 30 m, 则山高 $CD =$ _____.



18. 在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边长分别是 a, b, c . 若 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 6\cos C$, 则 $\frac{\tan C}{\tan A} + \frac{\tan C}{\tan B} =$ _____.

三、解答题(本大题共 5 小题, 共 46 分.

解答应写出必要的文字说明、证明过程或推演步骤)

19. (本小题满分 8 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 且 $2a\sin A = (2b-c)\sin B + (2c-b)\sin C$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\sin B \sin C = \sin^2 A$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

20. (本小题满分 8 分)

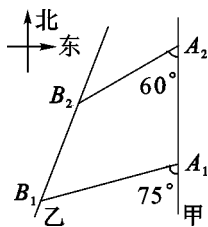
(2017 · 全国卷 II) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\sin(A+C) = 8\sin^2 \frac{B}{2}$.

(1) 求 $\cos B$ 的值;

(2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 的面积为 2, 求 b .

21. (本小题满分10分)

如图,甲船以 $30\sqrt{2}$ n mile/h 的速度向正北方向航行,乙船按固定方向匀速直线航行.当甲船位于 A_1 处时,乙船位于甲船的南偏西 75° 方向的 B_1 处,此时两船相距 20 n mile;当甲船航行 20 min 到达 A_2 处时,乙船航行到甲船南偏西 60° 方向的 B_2 处,此时两船相距 $10\sqrt{2}$ n mile,问乙船每小时航行多少海里?



22. (本小题满分10分)

(2017·全国卷I) 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$.

(1) 求 $\sin B \sin C$ 的值;

(2) 若 $6\cos B \cos C = 1, a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

23. (本小题满分10分)

(2016·四川) 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

(1) 求证: $\sin A \sin B = \sin C$;

(2) 若 $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{6}{5}bc$, 求 $\tan B$.

第二章 数 列

本章学习先知

先行一步，步步先行

内容概要

在本章中,我们将学习一般数列的概念和表示方法,并将研究两类特殊的数列——等差数列和等比数列.

数列作为一种定义在正整数集或其有限子集上的特殊的函数,是一种基本的数学模型.本章强调用函数的背景和研究方法来认识、研究数列.在通过实际问题引入数列概念后,大家要体会数列的函数背景,感受数列是研究现实问题情境的数学模型.

等差数列和等比数列作为特殊的数列,在现实生活中有着广泛的应用.通过对本章内容的学习,同学们要经历从日常生活中的实际问题抽象出等差数列和等比数列模型的过程,探索并掌握其中的一些基本数量关系,感受这两种数列模型的广泛应用,并利用它们解决一些实际问题.

《课程标准》要求

内容标准	学习要求
通过日常生活中的实例,了解数列的概念和几种简单的表示方法(列表、图象、通项公式),了解数列是一种特殊的函数.	1. 通过实例引入数列概念后,体会数列的函数背景,感受数列是研究现实问题情境的数学模型. 2. 学会用联系的观点看问题.
通过实例,理解等差数列、等比数列的概念,探索并掌握等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和公式,能在具体的问题情境中,发现数列的等差关系或等比关系,并能用有关知识解决相应的问题.体会等差数列、等比数列与一次函数、指数函数的关系.	1. 运用类比的思想方法学习等差数列和等比数列的概念,通项公式以及前 n 项和公式. 2. 运用归纳的思想求给定前几项的数列的通项公式,体会由特殊到一般的思想. 3. 会用待定系数法以及公式法求等差数列、等比数列的通项公式和前 n 项和,体会数形结合思想、方程思想等.

学法指导

1. 重视数列的函数背景.

数列作为一种特殊的函数,是反映自然规律的基本数学模型.

2. 掌握重要的思想方法.

本章内容突出了某些重要的数学思想方法,如类比思想、归纳思想、数形结合思想、算法思想、方程思想以及由特殊到一般的思想方法等.

3. 注意学科知识间的内在联系.

如数列与函数、算法、方程等的联系.

4. 体会“现实情境—数学模型—应用于现实问题”的特点.

2.1 数列的概念与简单表示法

第一学时 数列的概念与简单表示法(一)

板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

在实际生活中,我们经常会遇到与数列有关的问题,那么,什么是数列?数列与数集有什么不同?数列和函数之间有什么区别和联系?如何表示数列,它的分类如何?带着这些问题,我们将进入本学时的学习.

材料链接

1. 古希腊毕达哥拉斯学派

传说古希腊毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前570—公元前500年)学派的数学家

经常在沙滩上研究数学问题.他们在沙滩上画点或用小石子来表示数,在特定背景下研究数字的排列或变化规律.比如,把1,3,6,10,...这样的数称为三角形数,而把1,4,9,16,...这样的数称为正方形数.....

(如果你想进一步了解毕达哥拉斯学派在数学方面的成就,请上网或者通过其他途径查询)

2. 数学与生活

1202年,意大利数学家斐波那契(Leonardo Fibonacci,约1170—1250)出版了他的《算盘全书》.他在书中提出了一个关于兔子繁殖的问题:从第一个月开始,以后每个月的兔子总对数是1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,...,遵循某种数学规律.人们在研究它的过程中,又发现了许多意想不到的结果.如树木的分杈、花瓣的数量、植物种子的排列等等,也遵循某种数学规律.所以有人说:“大自然是懂数学的.”

(有兴趣的同学可以通过浏览互联网或查阅相关书籍搜集资料,进一步了解上述内容)



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

通过实际问题引入数列的概念,与数列有关的概念有哪些?

请阅读教材 p28、p29 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 教材图 2.1-1 中的三角形点阵,即三角形数分别代表哪些数? 这些数有什么规律? 这些数与它所表示的三角形的序号有什么关系?

2. 教材图 2.1-2 中的正方形数分别代表哪些数? 这些数有什么规律吗? 这些数与它所表示的正方形的序号有什么关系? 你能否再举一些像这样按一定次序排列的一列数?

3. 数列的定义是什么? 有什么特征? 数列和数集有什么区别和联系?

4. 数列的一般形式可以写成什么? 如何对数列进行分类? 分类的标准是什么?

问题二

数列与函数之间有什么联系?

1. 上述三角形数、正方形数的共同特点是什么? 请用函数的观点,从数目的变化和图形的序号的变化关系上进行分析.

2. 数列中的数和它的序号有什么关系? 哪个是变动的量,哪个是随之变动的量?

3. 有人说数列是一种特殊的函数,你同意这种观点吗? 它的特殊性体现在哪里?

4. 什么是数列的通项公式? 通项公式有什么作用? 利用通项公式,你能确定数列哪些方面的性质?

自主测评

- 下列判断不正确的是 ()
 - 任何数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 都是项数 n 的函数
 - 任何数列都有唯一的通项公式
 - 如果给出了数列的一个通项公式,那么就可以求出这个数列的任意项
 - 一天内24小时的气温可以形成一个数列
- 数列在平面直角坐标系中的图形是 ()
 - 一群孤立的点
 - 一条线段
 - 一条直线
 - 一条线段或一条弧
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 9n\left(\frac{2}{3}\right)^n$,则此数列的前4项分别为_____.

疑点归纳

本节课是学习数列的起始课,在学习中可能会有以下疑惑:

- 对数列定义中的关键词“按照一定顺序”的理解有些模糊.
- 对数列与函数的关系认识不清.
- 对数列的通项公式 $a_n = f(n)$ 感到困惑,不理解数列的通项公式可以不唯一.
- 由数列的前几项写不出数列的通项公式.



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题三

数列与数列的通项公式之间的关系.

- 是不是所有的数列都有通项公式? 数列的通项公式唯一吗? 对教材 p29 例1中

的数列,你能写出其他可能的通项公式吗?

- 数列的通项公式给定,是不是数列就唯一确定了?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

给出数列的前几项,如何求数列的通项公式?

- 给出数列的前几项,能否确定数列的通项公式? 若能,通项公式唯一吗?

- 上述过程中用到了什么数学思想和方法?



展题设计

展题1 写出下面数列的一个通项公式,使它的前4项分别是:

$$(1) \frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5};$$

$$(2) -\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, -\frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}.$$

指导要求: 观察给出式子的结构, 探求“项”与“项数”之间的规律.

※展题 2 已知数列的通项公式 $a_n = n^2 - 3n - 4$, 则 (1) $a_4 =$ _____; (2) 104 是这个数列的第 _____ 项; (3) 这个数列从第 _____ 项起各项均为正数.

指导要求: 数列可以看成是定义在正整数集或其有限子集上的函数, 所以, 可以考虑从函数的角度来分析、解决数列的问题.

归纳总结

- ※ 1. 数列的概念.
- ※ 2. 数列的分类.
- ※ 3. 数列与函数的关系.
- ※ 4. 数列的通项公式

在总结过程中, 注意知识间的联系以及其中渗透的数学思想方法.



板块五 应用演练, 再生新疑

分级设题, 精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 已知 $a_{n+1} - a_n - 3 = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 是 ()

- A. 递增数列 B. 递减数列
C. 常数列 D. 不能确定

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $p, q \in \mathbb{N}^*$ 满足 $a_{p+q} = a_p + a_q$, 且 $a_2 = -6$, 那么 a_{10} 等于 ()

- A. -165 B. -33
C. -30 D. -21

3. 由数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, x , 21, 34, 55 中各数的排列规律知, x 可以为 _____.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-3, & x \leq 7, \\ a^{x-6}, & x > 7. \end{cases}$ 数

列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, 且数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 a 的取值范围是 _____.

B. 能力提升

5. 下面说法中正确的是 ()

- A. 数列都有通项公式
B. 有通项公式的数列都是无穷数列
C. 当数列的通项公式确定时, 数列就确定了
D. 给定数列的若干项, 它的通项公式也就唯一确定了

6. 数列 $1, \frac{8}{5}, \frac{15}{7}, \frac{24}{9}, \dots$ 的一个通项公式 a_n 是 ()

- A. $\frac{n^2}{2n+1}$ B. $\frac{n(n+2)}{n+1}$
C. $\frac{(n+1)^2-1}{2(n+1)}$ D. $\frac{n(n+2)}{2n+1}$

7. (2013·陕西)观察下列等式: $1^2=1$,
 $1^2-2^2=-3$, $1^2-2^2+3^2=6$, $1^2-2^2+3^2-4^2=-10$,照此规律,第 n 个等式可为

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$,求 a_3, a_{10}, a_{2n-1} .

C. 拓展创新

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = n^2 + \lambda n (n \in \mathbf{N}^*)$,且 $a_{n+1} > a_n$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 均成立,求实数 λ 的取值范围.

10. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - 7n + 50$,求数列 $\{a_n\}$ 中的最小项.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$,求证:此数列为递增数列.

12. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = (n+1) \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^n$.

- (1)求证:数列 $\{a_n\}$ 先递增,后递减;
- (2)求数列 $\{a_n\}$ 中的最大项.

再生新疑

1. 数列的通项公式与函数的解析式之间有什么关系?
2. 求数列的通项公式有哪些方法?
 请同学们查阅相关资料加以解决.

第二学时 数列的概念与简单表示法(二)



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

我们研究的数列往往具有一定的规律性.有一种给出数列的方法叫递推法,具备递推关系的式子叫数列的递推公式.那么,什么是数列的递推公式?利用数列的递推公式又是如何给出数列的?带着这些问题,我们将进入本学时的学习.

材料链接

多米诺骨牌效应

在一个相互联系的系统中,一个很小的初始能量就可能产生一连串的反应,人们就把它称为“多米诺骨牌效应”或“多米诺效应”。

延伸阅读:1849年8月16日,一位名叫多米诺的意大利传教士把这种象牙制作的骨牌带回了米兰。作为最珍贵的礼物,他把骨牌送给了小女儿。多米诺为了让更多的人玩上骨牌,制作了大量的木制骨牌,并发明了各种玩法。不久,木制骨牌就迅速地在意大利及整个欧洲传播,骨牌游戏成了欧洲人的一项高雅运动。

后来,人们为了感谢多米诺给他们带来这么好的一项运动,就把这种骨牌游戏命名为“多米诺”。到19世纪,多米诺骨牌已经成为世界性的运动。在非奥运项目中,它是知名度最高、参加人数最多、扩展地域最广的体育运动。



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读



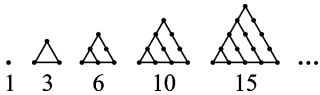
问题一

数列的简单表示法有哪些?

请阅读教材 p29~p31 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 类比函数的表示方法,得出数列的表示法有哪几种?分别是什么?

2. 观察下列图形,得出三角形数的一般表达式是什么?



3. 解决上述问题的关键是什么?

4. 你能借鉴上述方法,得出正方形数的一般表达式吗?



问题二

数列的递推关系是怎样的?它与通项公式以及对应函数的解析式之间的关系如何?

1. 数列的递推公式是什么?“材料链接”中的多米诺骨牌效应与数列的递推关系之间有什么关系?

2. 数列的递推公式和通项公式之间有什么关系?你能给出教材 p30 例 2 中数列的一个递推公式吗?

❀ 3. 数列的通项公式与对应函数的解析式之间的关系是什么?

❀ 4. 根据教材例1、例2、例3,归纳给出一个数列有哪些方法?

自主测评

1. (2012·江西)观察下列各式: $a+b=1$, $a^2+b^2=3$, $a^3+b^3=4$, $a^4+b^4=7$, $a^5+b^5=11$, 则 $a^{10}+b^{10}$ 等于 ()

- A. 28 B. 76
C. 123 D. 199

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 是 ()

- A. 递增数列 B. 递减数列
C. 摆动数列 D. 不确定

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - n - 50$, 则 -8 是该数列的 ()

- A. 第5项 B. 第6项
C. 第7项 D. 非任何一项

疑点归纳

❀ 1. 对由数列的递推公式给出数列的方法不理解.

❀ 2. 对数列的递推公式和通项公式的理解存在疑惑.



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题三

由数列的递推公式如何得出数列的通项公式?

❀ 1. 由数列的递推公式是否可以求出数列的通项公式?

❀ 2. 由数列的递推公式求数列的通项公式的方法有哪些?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

求一般数列的通项公式有哪些方法?

❀ 1. 请同学们总结一下,给出数列的前几项,求数列通项公式的一般方法有哪些?

❀ 2. 给定数列的递推公式,求数列通项公式的一般方法有哪些?

展题设计

※展题 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1) \cdot a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1} \cdot a_n = 0 (n \in \mathbf{N}^*)$, 求 a_n .

指导要求: 认真分析题目中给出的信息, 将已知条件进行合理转化, 进而化繁为简, 化未知为已知.

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会, 通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来, 以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中, 请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.



板块五 应用演练, 再生新疑

分级设题, 精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$, 则 a_5 等于 ()
- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前四项分别为 2, 0, 2, 0, 则下列各式不可以作为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式的是 ()

- A. $a_n = 1 + (-1)^{n+1}$
B. $a_n = 2 \sin \frac{n\pi}{2}$
C. $a_n = 1 - \cos n\pi$
D. $a_n = \begin{cases} 2, n \text{ 为奇数,} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$

3. 数列 1, 2, 1, 2, 1, 2, ... 的一个通项公式是 _____.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n} (n \geq 1)$, 则 $a_{16} =$ _____.

B. 能力提升

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, 且 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, 则 a_6 的值为 ()

- A. -3 B. -11 C. -5 D. 19

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = -2n^2 + 29n + 3$, 则此数列最大项的值是 ()

- A. 107 B. 108
C. $108\frac{1}{8}$ D. 109

7. 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, 以后各项由 $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n-1)} (n \geq 2)$ 给出, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

8. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

C. 拓展创新

9. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1}$ ($n \geq 2$), 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

10. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - 5n + 4$, 试问:

(1) 此数列中有多少项为负数?

(2) 当 n 取何值时, a_n 有最小值? 并求出最小值.

再生新疑

前面我们学习了数列的概念、表示、分类、递推公式以及通项公式, 了解了数列是一种特殊的函数, 是反映自然规律的基本数学模型. 在日常生活中, 我们还会经常遇到一些特殊的数列, 如: $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, 或 $2, 4, 8, 16, 32, \dots$, 构成这些数列的数有什么特征? 这样的数列又有什么规律?

2.2 等差数列

第一学时 等差数列(一)



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

10 个兄弟分 100 两银子,长兄最多,依次减少相同数目. 现知老八分得 6 两,问相邻两兄弟相差多少? 同学们知道涉及了哪些数学问题吗? 大家能发现它们遵循的数学规律吗? 通过本学时的学习,这些问题都会得到解决.

材料链接

按揭贷款中的数列问题

随着中央推行积极的财政政策,购置房地产按揭贷款制度的推出,极大地刺激了人们的消费欲望,扩大了内需,有效地拉动了经济增长.

众所周知,按揭贷款可采用按月等额还本付息. 这个等额数是如何得来的,此外若干月后,还应归还银行多少本金,这些人们往往很难做到心中有数.

学习了这一章之后相信同学们会找到这一问题的解决办法.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读



问题一

等差数列的概念是什么?

请阅读教材 p36、p37 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 等差数列的定义是什么? 请仿照教材 p36 的 4 个数列模型,举例说明.

2. 如何判断一个数列是否为等差数列?

3. 两个数的等差中项与这两个数的平均数相等吗? 为什么?



问题二

等差数列的通项公式是怎样的?

请阅读教材 p37、p38 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 等差数列的通项公式是什么? 其推

导过程中体现出的数学思想方法是什么?

❁ 2. 等差数列的通项公式还可以用什么方法推导出来?

❁ 3. 等差数列的通项公式有什么特征? 与对应的函数解析式之间有什么区别与联系?

❁ 4. 如何求等差数列的通项公式?

自主测评

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 6n - 1$. 问: 这个数列是等差数列吗? 若是等差数列, 其首项与公差分别是多少?

2. 等差数列 $2, 5, 8, \dots, 107$ 共有多少项?

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 - a_4 - a_8 - a_{12} + a_{15} = 2$, 则 $a_3 + a_{13} =$ _____.

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_5 = 10$, $a_{15} = 25$, 求 a_{25} .

5. 在 -1 与 7 之间顺次插入三个数 a, b, c , 使这 5 个数成等差数列, 试求出这个数列.

疑点归纳

❁ 1. 等差数列的概念、等差数列的通项公式的推导方法.

❁ 2. 对等差数列的通项公式与相应的一次函数之间的关系存在疑惑. 通过比较, 进一步体会数列与函数的关系.



板块三 合作互助, 共析问题

发展创新思维, 形成主动探究与合作的意识和能力



问题三

通过对以上内容的学习, 你能独立解决“问题呈现”中提出的问题吗? 请试一试.



板块四 展示交流, 探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

请同学们和自己的家长探讨按揭贷款中的数列问题, 可以查阅相关资料.

展题设计

展题 1 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{15} = 33$, $a_{45} = 153$. 试问 217 是否为此数列的项? 若是, 说明是第几项; 若不是, 说明理由.

指导要求: 这是一个探索性问题. 由于在条件中已知两项的值, 所以在求解方法上可以考虑运用方程思想求解基本量 a_1 和 d .

展题 2 (2012 · 江西) 观察下列事实: $|x| + |y| = 1$ 的不同整数解 (x, y) 的个数为 4, $|x| + |y| = 2$ 的不同整数解 (x, y) 的个数为 8, $|x| + |y| = 3$ 的不同整数解 (x, y) 的个数为 12, 则 $|x| + |y| = 20$ 的不同整数解 (x, y) 的个数为 ()

- A. 76 B. 80
C. 86 D. 92

归纳总结

※ 本学时的知识点有 _____;
重点是 _____.

在总结过程中, 请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.



板块五 应用演练, 再生新疑

分级设题, 精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. (2012 · 福建) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_5 = 10$, $a_4 = 7$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_4 + a_7 = 39$, $a_2 + a_5 + a_8 = 33$, 则 $a_3 + a_6 + a_9$ 的值为 ()

- A. 30 B. 27
C. 24 D. 21

3. (2015 · 陕西) 中位数为 1 010 的一组数构成等差数列, 其末项为 2 015, 则该数列的首项为 _____.

4. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_1 + a_6 = 9$, $a_4 = 7$, 则公差 $d =$ _____.

B. 能力提升

5. 一个直角三角形的三条边长成等差数列, 则它的最短边与最长边的比为 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{5}{13}$
C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{12}{13}$

6. (2014 · 辽宁) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 若数列 $\{2^{a_n}\}$ 为递减数列, 则 ()

- A. $d < 0$ B. $d > 0$
C. $a_1 d < 0$ D. $a_1 d > 0$

7. 已知函数 $f(x) = 2^x$, 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2. 若 $f(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}) = 4$, 则 $\log_2[f(a_1)f(a_2)f(a_3)\cdots f(a_{10})] =$ _____.

8. 在公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_2 为方程 $x^2 - a_3x + a_4 = 0$ 的根, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

C. 拓展提升

9. 已知 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成等差数列, 那么 $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ 是否也能构成等差数列?

10. 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列, 且 $a_1=35, b_1=75, a_2+b_2=100$, 求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的第 37 项的值.

11. 是否存在数列 $\{a_n\}$, 同时满足下列条件: ① $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差 $d \neq 0$; ② 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 也是等差数列.

12. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, 3a_n a_{n-1} + a_n - a_{n-1} = 0 (n \geq 2)$.

(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

再生新疑

本学时我们学习了等差数列的概念、通项公式, 明确了等差数列的概念, 掌握了等差数列通项公式的特征以及求法.

在学习过程中, 同学们有什么疑惑?

等差数列有什么性质? 利用等差数列的性质能解决哪些方面的问题? 请同学们课后搜集资料, 然后相互交流, 提出相关问题, 自己尝试解决.

第二学时 等差数列(二)



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

现实生活中,有许多问题可以转化为等差数列的问题.如何将这些实际问题转化为数学问题呢?如何求解数学问题的解?等差数列的通项公式有什么性质?

材料链接

意大利比萨饼店的伙计们喜欢将饼切成形状各异的一块一块.他们发现,每一种确定的刀数都可以切出一个最多的块数.例如,切1刀最多可切成2块,切2刀最多可切成4块,切3刀最多可切成7块,如此下去,问切 n 刀最多可切成几块?

同学们能想到它们涉及了哪些数学问题吗?大家能发现它们遵循的数学规律吗?通过本学时的学习,大家能计算出这个结果吗?



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

等差数列的性质有哪些?利用等差数列的知识可以解决哪些方面的问题?

请阅读教材 p38、p39 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 在教材例 1 的求解中,体现了什么数学思想?

2. 用等差数列的知识解决像教材例 2 中这样的实际问题的关键是什么?

3. 通过解决教材例 3 中的问题,归纳判断一个数列是否为等差数列的一种方法.

4. 通过完成教材 p39 的“探究”,说出等差数列的图象特征,以及 $a_n = pn + q$ 中 p 的几何意义,进而可以发现 $a_n = pn + q$ 的图象与 $y = px + q$ 的图象之间有何关系?

自主测评

1. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列,且 $a_3 + a_9 = 4a_5$, $a_2 = -8$, 则该数列的公差是 ()
- A. 4 B. 6
- C. 8 D. 10
2. (2015 · 广东)在等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 25$, 则 $a_2 + a_8 =$ _____.

3. (2013·辽宁)下面是关于公差 $d > 0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的四个命题:

p_1 : 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列;

p_2 : 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列;

p_3 : 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列;

p_4 : 数列 $\{a_n + 3nd\}$ 是递增数列;

其中真命题为 ()

A. p_1, p_2

B. p_3, p_4

C. p_2, p_3

D. p_1, p_4

疑点归纳

✿ 等差数列的性质及应用.



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题二

探究等差数列的通项公式与相应的一次函数之间的关系.

✿ 1. 等差数列的通项公式与相应的一次函数解析式之间的区别与联系是什么?

✿ 2. 能否利用一次函数的相关知识解决等差数列的问题?

✿ 3. 等差数列具有哪些重要性质?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题三

等差数列中的基本量及其关系如何?

✿ 1. 在公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_n, n, d 之间的关系如何?

✿ 2. 如何利用等差数列的定义、通项公式、性质解决一些相关的问题?

✿ 3. 利用等差数列知识解决实际问题的步骤是什么?



展题设计

✿ 展题 1 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{15} = 33, a_{45} = 153$. 试问: 217 是否为此数列的项? 若是, 说明是第几项; 若不是, 说明理由.

指导要求: 这是一个探索性问题. 上学时“展题 1”中我们运用方程思想求解基本量 a_1 和 d . 本学时我们可以利用性质求解; 还可以

运用等差数列的几何意义求解.

※展题 2 成等差数列的四个数之和为 26, 第二个数与第三个数之积为 40, 求这四个数.

指导要求: 解此题的常规方法是利用已知条件, 先求出首项和公差, 进而求出这四个数. 其实, 这里成等差数列的四个数之和已知, 故可设此四个数为 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$, 这样求解更便利, 但必须注意这时的公差应为 $2d$.

归纳总结

※ 1. 等差数列的性质有: _____

※ 2. 利用等差数列的性质解题时, 应注意: _____



板块五 应用演练, 再生新疑

分级设题, 精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前三项依次为 $a-1, a+1, 2a+3$, 则此数列的第 n 项 a_n 等于 ()

- A. $2n-5$ B. $2n-3$
C. $2n-1$ D. $2n+1$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} = 90$, 则 $a_{10} - \frac{1}{3}a_{14}$ 的值为 ()

- A. 12 B. 14 C. 16 D. 18

3. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_p = q, a_q = p (p \neq q)$, 则 $a_{p+q} =$ _____.

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{1}{25}$, 前 10 项中只有第 10 项是比 1 大的项, 则公差 d 的取值范围是 _____.

B. 能力提升

5. (2015 · 北京) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则下列结论中正确的是 ()

- A. 若 $a_1 + a_2 > 0$, 则 $a_2 + a_3 > 0$
B. 若 $a_1 + a_3 < 0$, 则 $a_1 + a_2 < 0$
C. 若 $0 < a_1 < a_2$, 则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$
D. 若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

6. 若关于 x 的方程 $x^2 - x + a = 0$ 和 $x^2 - x + b = 0 (a \neq b)$ 的四个根可以组成首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $a+b$ 的值为 ()

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{11}{24}$ C. $\frac{13}{24}$ D. $\frac{31}{72}$

7. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1 + a_3 + a_5 = 105$, $a_2 + a_4 + a_6 = 99$, 则 $\{a_n\}$ 的公差 $d =$ _____.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = pn^2 + qn (p, q \in \mathbf{R}, \text{且 } p, q \text{ 为常数})$, 当 p 和 q 满足

什么条件时,数列 $\{a_n\}$ 是等差数列?

C. 拓展创新

9. 已知5个数成等差数列,它们的和为5,平方和为 $\frac{85}{9}$,求这5个数.

10. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}$,求 a_{50} .

11. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1=2, a_2=3$,若在每相邻两项之间插入三个数,使它和原数列的数构成一个新的等差数列,求:

(1) 原数列的第12项是新数列的第几项?

(2) 新数列的第29项是原数列的第几项?

12. 某渔业公司年初用98万元购买一艘捕鱼船,第一年各种费用为12万元,以后每年都增加4万元,每年捕鱼收益为50万元,

(1) 问第几年开始获利?

(2) 若干年后,有两种处理方案:

① 年平均获利最大时,以26万元出售该渔船;

② 总纯收入获利最大时,以8万元出售该渔船.

问哪种方案合算.

参考公式: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

再生新疑

❁ 1. 我们在前面学习了一般数列的概念、表示法、分类、单调性、通项公式、递推公式等,又研究了等差数列的概念、通项公式、等差中项等知识并已基本掌握,那么等差数列的前 n 项和如何求? 求和公式应该是什么呢?

❁ 2. 根据等差数列的定义,先推出前面有限几项与首项和公差的关系,进而推出等差数列的通项公式. 这样得到的结论可靠吗? 我们能否给予科学的推理论证呢?

3. 等差数列还具有什么性质呢？

除此之外，你还有哪些疑问呢？通过本学时的学习，相信同学们对等差数列也有了

一定的理解。数列的知识是我们学习和生活中不可或缺的，请同学们通过小组合作探究的方式，尝试解惑。

2.3 等差数列的前 n 项和

第一学时 等差数列的前 n 项和(一)

板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

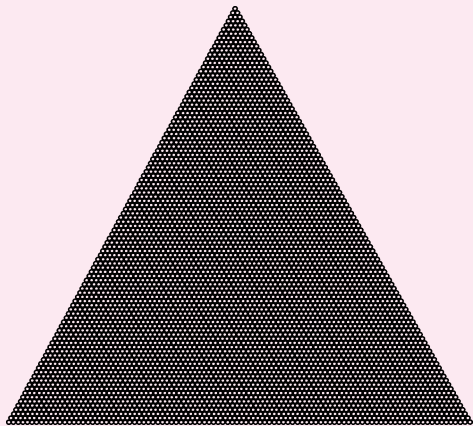
问题呈现



印度泰姬陵(TajMahal)是世界七大建筑奇迹之一,所在地为阿格拉市.泰姬陵是印度古代建筑史上的经典之作,这个古陵墓融合了古印度、阿拉伯和古波斯的建筑风格,是印度伊斯兰教文化的象征.

陵寝以宝石镶饰,图案之细致令人叫绝.传说当时陵寝中有一个等边三角形图案,以相同大小的圆宝石镶饰而成,共有100层(如图),奢华程度可见一斑.大家知道这个图案中一共有多少颗宝石吗?只要计算出 $1+2+3+\cdots+100$ 的结果就是这些宝石的总数.可是如何求这100个数的和呢?

通过本学时的学习,同学们一定能够求出这个和.



材料链接

1. 泰姬陵,全称为“泰吉·玛哈尔陵”,又译为泰姬玛哈,是印度知名度最高的古迹之一,在今印度距新德里200多千米外的北方邦的阿格拉(Agra)城内,亚穆纳河右侧,是莫卧儿王朝第5代皇帝沙贾汗为了纪念他已故皇后阿姬曼·芭奴而建立的陵墓,被誉为“完美建筑”.它由殿堂、钟楼、尖塔、水池等构成,全部用纯白色大理石建筑,用玻璃、玛瑙镶嵌,绚丽夺目、美丽无比,有极高的艺术价值,是伊斯兰教建筑中的代表作.2007年7月7日成为世界新七大奇迹之一.

2. 泰姬陵在水中的倒影呈现了泰姬的少女形象,这一发现为破解印度古老文明历史之谜提供了又一个佐证.

延伸阅读:泰姬陵还被美国《国家地理·旅行家》杂志评为“人一生要去的五十个地方”之一,是人类创造的不朽的“世界奇观”.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读



问题一

等差数列的前 n 项和公式是什么?是如何推导出来的?

请阅读教材 p42 的有关内容,思考并回答下列问题:

❀ 1. 高斯是采用什么方法来巧妙地计算出 $1+2+3+\cdots+100$ 来的?

❀ 2. 高斯算法的妙处在哪里? 这种算法能够推广到求一般等差数列的前 n 项和吗?

❀ 3. 等差数列的前 n 项和公式是什么?

❀ 4. 推导等差数列前 n 项和公式的方法是什么? 该方法利用了等差数列的什么性质?

❀ 5. 用什么方法可以直接推导出公式

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d?$$

自主测评

1. 等差数列 $-10, -6, -2, 2, \cdots$ 前多少项的和是 54?

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_5 + a_{10} + a_{13} + a_{16} + a_{21} = 20$,求 S_{25} .

疑点归纳

✿ 推导等差数列的前 n 项和公式的方法是如何想到的?



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题二

等差数列的前 n 项和公式有几种形式? 如何求?

请阅读教材 p42、p43 的有关内容,思考并回答下列问题:

✿ 1. 等差数列的前 n 项和公式有几种形式? 分别具有什么特征? 说出它们的区别与联系以及由已知条件如何选用公式?

✿ 2. 如何求等差数列的前 n 项和? 可以从哪几方面进行考虑? 其中渗透了哪些数学思想?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题三

等差数列的前 n 项和公式与相应的二次函数之间有什么联系?

✿ 1. 等差数列的前 n 项和公式能表示成关于正整数 n 的二次函数吗?

✿ 2. 能否利用二次函数的知识来分析解决有关等差数列的前 n 项和的问题?



展题设计

✿ 展题 1 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2n^2 - n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

指导要求: 根据已知信息, 运用 a_n 与 S_n 的关系求解.

✿ 展题 2 设等差数列 $\{a_n\}$ 的第 10 项为 23, 第 25 项为 -22. 求:

- (1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 数列 $\{a_n\}$ 前 50 项的绝对值之和.

指导要求: 根据等差数列的定义, 考虑用待定系数的方法求解; 联系等差数列的性质, 也可以考虑其他方法.

归纳总结

1. 推导等差数列的前 n 项和公式的方法是

_____.

2. 等差数列的前 n 项和公式有 _____ 种形式, 分别是 _____.

在总结过程中, 请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.



板块五 应用演练, 再生新疑

分级设题, 精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. (2015·全国卷Ⅱ) 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1 + a_3 + a_5 = 3$, 则 S_5 等于

()

A. 5

B. 7

C. 9

D. 11

2. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 $\frac{1}{2}$, 且 $S_{100} = 145$, 则 $a_2 + a_4 + \cdots + a_{100}$ 的值为

()

A. 60

B. 85

C. $\frac{145}{2}$

D. 其他值

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $\frac{S_5}{5} - \frac{S_2}{2} = 3$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 _____.

4. (2016·北京) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和. 若 $a_1 = 6, a_3 + a_5 = 0$, 则 $S_6 =$ _____.

B. 能力提升

5. (2016·全国卷Ⅰ) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和为 27, $a_{10} = 8$, 则 a_{100} 等于 ()

A. 100

B. 99

C. 98

D. 97

6. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{a_5}{a_3} = \frac{5}{9}$, 则 $\frac{S_9}{S_5}$ 等于 ()

A. 1

B. -1

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

7. 设 $f(x) = \frac{1}{3^x + \sqrt{3}}$, 利用教材中推导等差数列前 n 项和公式的方法, 可求得 $f(-12) + f(-11) + f(-10) + \cdots + f(0) + \cdots + f(11) + f(12) + f(13)$ 的值为 _____.

8. 如果一个等差数列的前 12 项和为 354, 前 12 项中偶数项的和与奇数项的和之比为 32 : 27, 求该数列的首项和公差.

C. 拓展创新

9. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 求证: 以 $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$ 为通项公式的数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.

10. 已知公差大于零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_3 a_4 = 117, a_2 + a_5 = 22$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{S_n}{n+c}$, 是否存在非零实数 c 使得 $\{b_n\}$ 为等差数列? 若存在, 求出 c 的值; 若不存在, 请说明理由.

11. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = -62, S_5 = -75$, 求:

(1) $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及前 n 项和 S_n ;

(2) $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{14}|$.

12. 已知 $f(x) = ab^x$ 的图象过点

$A\left(4, \frac{1}{4}\right)$ 和 $B(5, 1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 记 $a_n = \log_2 f(n)$, n 是正整数, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 解关于 n 的不等式 $a_n S_n \leq 0$.

再生新疑

❀ 1. 我们在前面学习了等差数列的前 n 项和公式以及推导等差数列前 n 项和公式的方法,并掌握了求等差数列前 n 项和的方法.那么,等差数列前 n 项和有什么性质呢?利用等差数列前 n 项和公式能解决哪些问题呢?

❀ 2. 等差数列前 n 项和公式也可以表示成关于正整数 n 的二次函数的形式,能否利用二次函数的相关知识解决有关等差数列前 n 项和的问题呢?

除此之外,你还有哪些疑问,通过本学期的学习,相信同学们对等差数列的前 n 项和也有了一定的理解,请通过小组合作探究的方式,尝试解惑.

第二学时 等差数列的前 n 项和(二)



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

2012年3月28日国务院第197次常务会议通过《校车安全管理条例》.某市根据条例提出了“实施校车安全工程”的总目标:从2012年起利用10年的时间,在全市中小学配备不同数量的校车.据测算,2012年该市用于校车安全工程的经费为500万元,为了保证工程的顺利实施,计划每年投入的资金都比上一年增加50万.那么,从2012年起的未来10年内,该市在校车安全工程中的总投入是多少?

❀ 1. 如何建立恰当的数学模型解决这个问题?

❀ 2. 该问题的解决用到了我们学过的哪些数学知识?其中渗透了哪些数学思想?

材料链接

2012年4月5日国务院总理签署国务院令公布《校车安全管理条例》,自公布之日起施行.根据条例,高中学生上下学不纳入校车服务范围,幼儿入园也以保障幼儿就近入园和由家长接送为原则.要想了解更多关于校车安全管理条例的内容,请同学们上网查阅.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读



问题一

等差数列的前 n 项和的性质有哪些?

请阅读教材 p43~p45 的有关内容,思考并回答下列问题:

❀ 1. 教材例1中构建等差数列模型的关键信息是什么?

❀ 2. 由教材例2体会方程思想的运用,并回答例2旁注中的问题.对于例2,还有其他解法吗?

❀ 3. 通过解决教材例 3 中的问题,归纳利用 S_n 判断一个数列是否是等差数列的方法以及求等差数列通项公式的一种方法?

❀ 4. 由教材例 4 体会把等差数列的前 n 项和公式看成二次函数的应用. 你能利用等差数列的通项公式解答教材例 4 中的问题吗?

自主测评

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2n^2 - 3n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

2. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和, 且 $S_5 < S_6, S_6 = S_7 > S_8$, 则下列结论错误的是

()

- A. $d < 0$
- B. $a_7 = 0$
- C. $S_9 > S_5$
- D. S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $|a_3| = |a_9|$, 公差 $d < 0$, 则使前 n 项和 S_n 取得最大值的自然数 n 是_____.

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $m > 1$, 且 $a_{m-1} + a_{m+1} - a_m^2 = 0, S_{2m-1} = 38$, 则 $m =$ _____.

疑点归纳

❀ 1. 根据等差数列的前 n 项和公式中 n 与 S_n 的二次函数关系说出等差数列前 n 项和的性质.

❀ 2. a_1, a_n, S_n, n, d 之间有什么关系?



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题二

等差数列前 n 项和的性质与二次函数的性质之间有何联系?

❁ 1. 等差数列的前 n 项和有哪些性质? 与二次函数的性质有何相同之处?

❁ 2. 利用等差数列前 n 项和的性质可以解决哪些方面的问题? 解题时需要注意什么?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题三

如何利用等差数列的知识解决有关的实际问题?

❁ 1. 将实际问题转化为数学问题的关键是什么?

❁ 2. 在实际问题的求解过程中,有哪些需要注意的地方?



展题设计

❁展题 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_1 = 25$, 且 $S_9 = S_{17}$, 则数列 $\{a_n\}$ 前几项的和最大?

指导要求:由已知可得什么? 得出所求需知道什么? 如何沟通已知与所求之间的关系? 还可用其他方法求解本题吗?

❁展题 2 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = na + (n-1)nb (n=1,2,\cdots)$, a, b 是常数,且 $b \neq 0$.

(1)求证: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2)求证:以 $\left(a_n, \frac{S_n}{n} - 1\right)$ 为坐标的点 P_n 都落在同一直线上,并求出直线方程;

(3)设 $a=1, b=\frac{1}{2}$, C 是以 (r, r) 为圆心, r 为半径的圆 ($r > 0$), 求使得点 P_1, P_2, P_3 都落在圆外的 r 的取值范围.

指导要求: a_n 与 S_n 的关系如何? 在利用 a_n 与 S_n 的关系求 a_n 的过程中应该注意些什么?

归纳总结

1. 当已知等差数列的前 n 项和、首项和项数的关系时, 通常采用公式 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 易得首项 a_1 与公差 d 的关系式.

当 $d \neq 0$ 时, 该公式是一个二次函数, 可以借助二次函数的知识来求解相关问题.

2. 将 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等差数列的关系直接应用于解题中, 可以使问题简单化.

3. 其他一些规律方法: _____.



板块五 应用演练, 再生新疑

分级设题, 精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $S_4 = 1, S_8 = 4$, 则 $a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20}$ 的值为 ()

- A. 9 B. 12
C. 16 D. 17

2. 在项数为 $2n+1$ 的等差数列中, 所有奇数项的和为 165, 所有偶数项的和为 150, 则 n 等于 ()

- A. 9 B. 10
C. 11 D. 12

3. (2016 · 江苏) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和. 若 $a_1 + a_2^2 = -3, S_5 = 10$, 则 a_9 的值是 _____.

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_4 + a_6 = 6$, 其前 5 项的和 $S_5 = 10$, 则其公差 $d =$ _____.

B. 能力提升

5. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $S_3 = 9, S_6 = 36$, 则 $a_7 + a_8 + a_9$ 等于 ()

- A. 63 B. 45
C. 36 D. 27

6. 设 S_n 和 T_n 分别为两个等差数列的前 n 项和, 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+1}{4n+27}$, 则第一个数列的第 11 项与第二个数列的第 11 项的比是 ()

- A. 4 8 B. 3 2
C. 7 4 D. 78 71

7. (2015 · 安徽) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} (n \geq 2)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和等于 _____.

8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 a_7 = -16, a_4 + a_6 = 0$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

C. 拓展创新

9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 = -5, S_{10} = 15$, 求数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

10. (2016·全国卷Ⅱ) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_4 = 4$, $a_5 + a_7 = 6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = [a_n]$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9] = 0$, $[2.6] = 2$.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 其前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1} (n \geq 2)$, 求证:

(1) 数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列;

(2) 当 $n \geq 2$ 时, $S_1 + \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{3}S_3 + \cdots + \frac{1}{n}S_n < \frac{3}{2}$.

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 = 7$, $a_5 + a_7 = 26$, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 求 a_n 及 S_n ;

(2) 令 $b_n = \frac{1}{a_n^2 - 1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

再生新疑

前面我们学习了等差数列的概念、通项公式、前 n 项和等知识, 明确了相应的概念、公式、性质及其推导方法. 那么, 上述学习方法能否推广、迁移到其他章节的学习中呢?