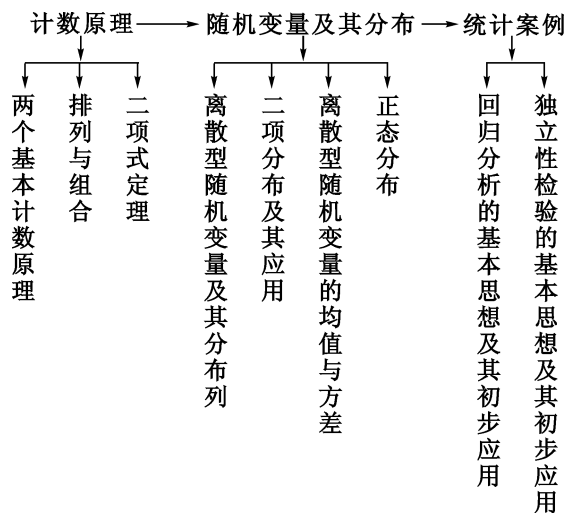


模块整体感悟

模块知识梳理



学法点拨

1. 勤于思考,不断总结

在第一章,我们要在学习两个基本计数原理的基础上,学习排列、组合和二项式定理. 在学习中,要注意对基本概念的深刻理解和对基本模型的准确识别,为此,我们要经历从具体到抽象的概括活动,理解概念本质,通过类比、推广、特殊化等一系列思维活动达到对知识的区分和深化. 两个基本计数原理几乎是一种常识,这种简单朴素的原理易学、好懂,但要达到会用的境界,还需要通过一定量的应用性训练,希望同学们在实践中不断总结,以达到融会贯通.

2. 体会随机思想,把握概率模型

在第二章的学习中,我们要初步掌握利用随机变量来刻画随机现象的本领. 这一章与实际生活联系更加紧密,同学们要善于观察和思考,准确把握几个常见的概率模型,并且要联系前面所学的概率、统计、计数等知识进行学习. 希望通过本章的学习,同学们能够初步学会用统计思想分析和处理随机现象,这是一种基本的数学素养.

3. 善于动手,开展活动

在第三章的学习中,我们将进入丰富多彩的统计世界,探究回归分析和独立性检验等常用的统计方法的奥秘. 同学们在学习这两种方法时,应充分体会统计方法的直观合理性和应用广泛性,并且要善于动手,收集数据,开展一两次统计分析活动.

第一章 计数原理

本章学习导航

先行一步，步步先行

内容概要

本章我们要在学习“分类加法计数原理”和“分步乘法计数原理”的基础上，研究两类基本的计数问题模型——排列与组合，并进一步解决相关的简单应用问题. 在本章的最后，我们要根据多项式乘法的运算法则，结合计数的有关方法，得到二项式定理，并研究二项式系数的性质及其简单应用.

《课程标准》要求

内容标准	学习要求
分类加法计数原理 分步乘法计数原理 通过实例，总结出分类加法计数原理、分步乘法计数原理；能根据具体问题的特征，选择分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决一些简单的实际问题.	1. 准确理解分类加法计数原理和分步乘法计数原理，弄清它们的区别. 2. 会运用分类加法计数原理、分步乘法计数原理分析和解决一些简单的实际问题.

续表

内容标准	学习要求
排列与组合 通过实例,理解排列、组合的概念;能利用计数原理推导排列数公式、组合数公式,并能解决简单的实际问题.	1. 理解排列的意义,并能够正确写出一些简单排列问题的所有排列. 2. 了解排列数的意义,掌握排列数公式及推导方法,并能运用排列数进行计算. 3. 能运用所学的排列知识正确地解决简单的实际问题. 4. 理解组合的意义,能写出一些简单组合问题的所有组合. 5. 明确组合与排列的联系与区别,能判断一个问题是排列问题还是组合问题. 6. 了解组合数的意义,理解排列数 A_n^m 和组合数 C_n^m 之间的联系;掌握组合数公式,能运用组合数公式进行计算. 7. 能运用组合概念分析简单问题,提高分析问题的能力. 8. 利用排列、组合知识以及两个基本原理解决较综合的计数应用题,逐步掌握解决计数问题的常用方法,提高应用意识和分析解决问题的能力.
二项式定理 能用计数原理证明二项式定理;会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题.	1. 掌握二项式定理和二项展开式的通项公式,并能用它们解决与二项展开式有关的简单问题. 2. 掌握二项式系数的四个性质. 3. 在二项式定理得出的过程中,培养归纳猜想、抽象概括、演绎证明等思维能力. 4. 在研究二项式的性质及解决问题时,培养观察发现、抽象概括及分析解决问题的能力.

学法指导

为了顺利地完成本章的学习,我们可以从以下几点着手进行:

1. 注重比较和分析

在本章的学习中,有许多容易混淆的概念,如“分类”与“分步”,“不可重复排列”和“可重复排列”,“排列”和“组合”等,需要我们对相关背景进行充分的比较和分析,把握它们的区别和联系,深刻理解概念.

2. 善于抽象和概括

无论是两个基本计数原理还是排列与组合,都是从实际问题中抽象出的数学模型.在本章中,我们要不断经历“具体—抽象—具体”的思考问题方式,由此,在掌握了知识的同时,也会使我们的抽象概括能力和思维能力得到进一步的提高.

3. 尽量从多角度分析问题

从多个角度分析问题,可以使我们对问题的本质有更加深刻的理解.在本章中,一方面,我们要通过一题多解掌握解题的方法;另一方面,我们要通过“算两次”的方法得出一些重要的知识和有趣的性质.相信通过本章的学习,你的思路会不断地打开,你分析问题和解决问题的能力会有进一步的提高.

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第一学时 分类加法计数原理 与分步乘法计数原理



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

随着我国人民生活水平的不断提高,“家庭理财”已经成为普通家庭经常关注的一个问题.某公司李先生选择了人民币定期储蓄和购买国债两种投资形式.其中人民币定期储蓄从一年期和两年期两种中选择一种;购买国债从一年期、两年期、三年期三种中选择一种.

问题1:李先生工作初期,由于工资收入有限,工资节余只可从上述方案中选择一种来投资,李先生共有多少种不同的投资方法?

问题2:由于李先生工资逐年提高,他决定将节余的钱分成两笔,其中一笔存为人民币定期储蓄,另一笔购买国债,定期储蓄种类和购买国债种类与“问题1”相同,此时李先生共有多少种不同的理财方法?

以上是我们在生活中常常遇到的有关计数的问题.关于这类问题,我们一般是怎样思考和解决的呢?

材料链接

1. 计数问题与现实生活密切联系,如电

话号码的编排、密码的设定、彩票奖项的设计等.

2. 回顾你的成长历程,在幼儿园时,你是怎样数数的?在小学时,你是如何数清楚你们班上一共有多少人的?数数的能力体现着我们的数学思维水平.

3. 解决较复杂的问题时,我们可以将问题分成若干类,将每类的任务完成,这个问题就解决了,这是一种分类思想;我们也可以将此问题的解决分成几个步骤,每一步完成,这个问题就解决了,这是一种分步的思想.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读



问题一

什么是分类加法计数原理?

请阅读教材 p2、p3“思考”栏目之前的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 教材 p2“思考”栏目中的问题与“问题呈现”中的“问题1”有什么相同的特点?你是用什么方法解决这两个问题的?

2. 事实上,上述问题的解决体现了一种“分类”的思想,你能否举出生活中类似的例子呢?

3. 请利用“分类”思想计算:若完成一件

事有 n 类办法,第 1 类办法有 m_1 种方法,第 2 类办法有 m_2 种方法……第 n 类办法有 m_n 种方法,其中 $m, n \in \mathbf{N}^*$,那么完成此事共有多少种不同的方法?

 问题二

什么是分步乘法计数原理?

请阅读教材 p3~p6 的有关内容,思考并回答下列问题:

 1. 教材 p3“思考”栏目中的问题与“问题呈现”中的“问题 2”有什么相同的特点?你是什么方法解决这两个问题的?

 2. 事实上,上述问题的解决体现了一种“分步”的思想,你能否举出生活中类似的例子呢?

 3. 请利用“分步”思想计算:若完成一件事有 n 个步骤,第 1 步有 m_1 种方法,第 2 步有 m_2 种方法……第 n 步有 m_n 种方法,其中 $m, n \in \mathbf{N}^*$,那么,完成此事共有多少种不同的方法?

 自主测评

- 有不同的红球 8 个,不同的白球 7 个.
- (1)从中任意取出 1 个球,有多少种不同的取法?
- (2)从中任意取出 2 个不同颜色的球,有

多少种不同的取法?

 板块三 合作互助,共析问题
发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力

 问题三

如何正确理解分类加法计数原理和分步乘法计数原理?

 1. 对比“问题呈现”栏目中的“问题 1”和“问题 2”,它们有什么不同之处?

 2. 你如何理解分类加法计数原理中“每一类”的含义,以及分步乘法计数原理中“每一步”的含义呢?试举例说明.

 3. 分类加法计数原理与分步乘法计数原理有什么区别和联系?试举例说明.



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

如何利用分类加法计数原理和分步乘法计数原理正确地解决有关计数问题?

❁ 1. 教材中的例 1、例 2 的解法与例 3、例 4 的解法有哪些相同点和不同点?

❁ 2. 在实际的计数过程中,如何确定是运用分类加法计数原理还是分步乘法计数原理呢? 试举一些例子加以说明.

❁ 3. 运用分类加法计数原理和分步乘法计数原理解决有关计数问题的关键是什么? 试举例说明.

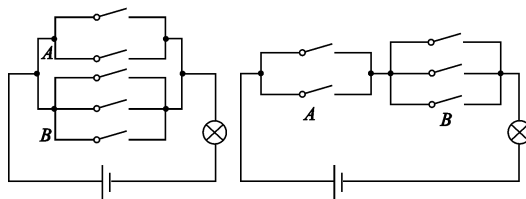


展题设计

❁展题 1 (1)在图①的电路中,只合上一个开关以接通电路,有多少种不同的方法?

(2)在图②的电路中,合上两个开关以接

通电路,有多少种不同的方法?



①

②

指导要求:线路①与线路②有什么明显的不同? 你能将两个基本计数原理与物理中并联电路和串联电路的相关知识进行类比吗? 从中可以使你更加深刻地理解“分类”与“分步”的含义.

❁展题 2 为了确保电子信箱的安全,在注册时,通常要设置电子信箱密码. 在某网站设置的信箱中:

(1)密码为 4 位,每位均为 0~9 这 10 个数字中的 1 个,这样的密码共有多少个?

(2)密码为 4 位,每位均为 0~9 这 10 个数字中的 1 个,或是 A~Z 这 26 个英文字母中的 1 个,这样的密码共有多少个?

(3)密码为 4~6 位,每位均为 0~9 这 10 个数字中的 1 个,这样的密码共有多少个?

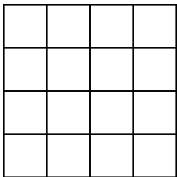
指导要求:依题设置一个密码要搞清楚哪些关键性的条件? 问题(3)与(1)(2)有什么明显的不同? 涉及需综合运用分类与分步计数原理计数时,我们要怎样思考?

门进,从另一个门出,则不同走法的种数是 ()

- A. 8
- B. 7
- C. 11
- D. 12

3. 乘坐交通工具从甲地到相距较远的乙地,可以乘飞机,也可以乘火车,还可以乘长途汽车. 一天中,飞机有 2 班,火车有 4 班,长途汽车有 10 班. 问:一天中,乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有 _____ 种不同的方法.

4. 将“福”“禄”“寿”填入如图所示的 4×4 小方格中,每格内只填入一个汉字,且任意的两个汉字既不同行也不同列,则不同的填写方法有 _____ 种.



B. 能力提升

5. 从 1~9 的正整数中任意抽取 2 个数相加,所得的和为奇数的不同取法的种数是 ()

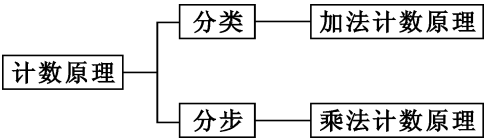
- A. 20
- B. 30
- C. 40
- D. 24

6. 在三个袋内分别装有 m_1, m_2, m_3 个各不相同的小球.

- (1) 从三个袋内任取 1 个小球,有 _____ 种不同的取法;
- (2) 从三个袋内各取 1 个小球,有 _____ 种不同的取法.

7. 乘积 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_l) \cdot (y_1 + y_2 + \cdots + y_m) \cdot (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$ 展开后有多少项? (请写出详细的解题过程)

归纳总结



板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 某班有男生 26 人,女生 24 人,要从中选 1 位同学作数学科代表,则不同的选法种数是 ()

- A. 50
- B. 26
- C. 24
- D. 616

2. 某商场共有 4 个门,购物者若从一个

8. (1)连续抛掷一枚骰子两次,用树形图画出掷出的点数的所有可能情况;

(2)第一次抛1元硬币,第二次抛5角硬币,第三次抛1角硬币,用树形图画出三次抛掷后三枚硬币向上的一面是正面或是反面的所有可能情况.

C. 拓展创新

9. 用数字2,3组成四位数,且数字2,3都至少出现1次,这样的四位数共有多少个?

10. 有4位教师在同一年级的4个班中各教1个班的数学,在数学检测时要求每位教师不能在本班监考,则不同的监考方法共有多少种? 请你分别利用分类加法计数原理和分步乘法计数原理解答.

再生新疑

第二学时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的应用举例

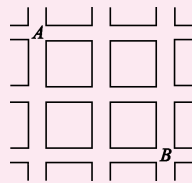


板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

暑假,一位同学到某城市旅游.他打算从城中的A处沿街道走到B处(如图),路程最近的走法有多少种呢?你能利用分类加法计数原理和分步乘法计数原理来解决这个实际问题吗?



材料链接

✿ 1. 解决有关计数问题我们有两类办法:一是利用“数数”的方法,将研究对象的个数与自然序列对应,一个一个数清楚,这是最基本、最原始的计数方法;二是利用“基本计数原理”的方法,即将要完成的事情进行“分类”或者“分步”,分类则采用加法计数原理计数,分步则采用乘法计数原理计数.

✿ 2. 分类加法计数原理和分步乘法计数原理可以分别与实数运算中的加法运算和乘法运算进行类比,而分类思想和分步思想可以分别与物理电路中的并联电路和串联电路进行类比.

✿ 3. 分类思想和分步思想是我们解决日常问题时常用的两种思考方式.一般地,若要解决的问题比较复杂,我们需要综合地运用这两种

思想,这时常常采取先分类后分步的思考方式.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

如何正确运用两个基本计数原理解决有关的简单计数问题?

阅读教材 p6~p8 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 你能够根据所学知识自主完成教材中的例 5、例 6、例 7 吗? 请将你的解答与教材中的解答进行比较.

2. 在解决教材例 5、例 6、例 7 中的问题的过程中,你分别运用了什么方法? 请试着说明你为什么运用这些方法解决问题.



问题二

如何综合运用两个基本计数原理解解决有关计数问题?

阅读教材 p8~p10 的有关内容,思考并回答下面的问题:

1. 请自主完成教材中的例 8、例 9,将你的解法与教材中的解法相比较,你有怎样的想法?

2. 教材中的例 8、例 9 有什么共同的特点? 你认为该如何思考 and 解决具有这一类特点的问题呢?

3. 你能顺利地回答教材 p10 两个“思考”栏目中的问题吗? 你是如何理解分类要做到“不重不漏”;分步要做到“步骤完整”这两句话的? 试举例说明.

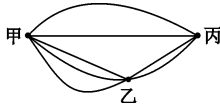
自主测评

1. 如图,从甲地到乙地有 3 条路可走,从乙地到丙地有 2 条路可走,从甲地不经过乙地到丙地有 2 条路可走,则

(1) 从甲地经乙地到丙地共有 _____ 种不同的走法;

(2) 从甲地到丙地共有 _____ 种不同的走法.

2. 由 1,2,3 这三个数字可以组成多少个无重复数字的整数?





板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题三

根据两个基本计数原理解决有关计数问题时首先要搞清楚什么问题?其中体现了怎样的思想?

❁ 1. 利用分类加法计数原理和分步乘法计数原理解题,首先要搞清楚“完成一件什么事”.例如:若计算乘积 $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)$ 展开后共有多少项,你认为要完成的“一件事”是什么呢?

❁ 2. 事实上,为了解决展开式中共有多少项的问题,我们要着手研究如何做出它的展开式中的一个项,在这里“多”是“一”的具体体现,“一”是“多”的抽象概括,其中体现了“一”与“多”之间的辩证关系.有人说:运用计数原理解决有关计数问题是人类抽象思维能力发展的必然结果.你同意这种说法吗?



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

根据分类加法计数原理和分步乘法计数原理解有关计数问题时一般要经过怎样的思考?

❁ 1. 你能总结出根据计数原理解有关计数问题的基本的思考步骤吗?试举例说明.

❁ 2. 事实上,根据分类加法计数原理和分步乘法计数原理解有关计数问题,一般要经过三个步骤的思考:第一步,确定要完成一件什么事(What);第二步,如何完成这件事(How),是用分类还是用分步;第三步,计数(Compute).若分类,则将每一类的方法数相加;若分步,则将每一步的方法数相乘.你能试着按照此步骤分别解决教材中例5~例9中的问题吗?

❁ 3. 当计数问题比较复杂时,往往要综合运用分类加法计数原理和分步乘法计数原理.你认为此时是先分类再分步好呢,还是先分步后分类好呢?试举例说明,并展示出来,与老师和同学们进行交流.

🔗 展题设计

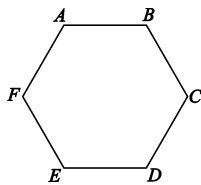
※展题 1 (1) 设集合 A 中有 m 个元素, 集合 B 中有 n 个元素, 那么从集合 A 到集合 B 可以建立多少个不同的映射?

(2) 要将 4 封不同的信投入 3 个不同的信箱, 共有多少种不同的投递方式?

(3) 4 名同学参加 3 个运动项目, 每个项目设冠军 1 名, 则共有多少种不同的冠军产生方式?

指导要求: 上述问题(1)(2)(3)要完成的“一件事”分别是什么? 你要如何去完成它们? 你能观察出(1)(2)(3)之间有怎样的关系吗? 你能否再举出一些与上述问题类似的例子?

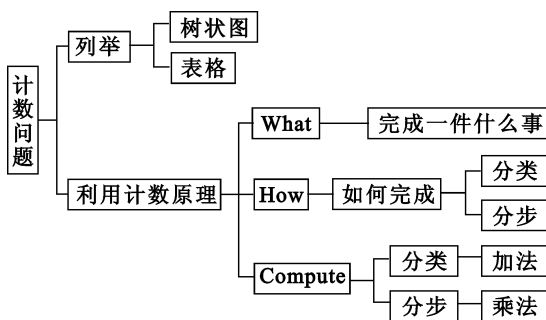
※展题 2 如图, A, B, C, D, E, F 六人站在一个六边形的六个顶点上玩传球游戏, 游戏规则为: 每一次传球, 持球者只能沿六边形的边传递给与他相邻的两人之中的一人, 如 A 持球, 可传给 B , 也可传给 F .



现由 A 发球, 那么经过 4 次传递之后, 球又回到 A 手中的不同传递方法共有多少种?

指导要求: 你能直接运用两个计数原理解决上述问题吗? 当涉及数目不是很多, 并且直接利用计数原理解决有些困难时, 你会考虑用怎样的方法解决有关计数问题?

🔗 归纳总结



板块五 应用演练, 再生新疑

分级设题, 精选精练

🔗 分层演练

A. 基础巩固

1. 多项式 $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + (a_3 + a_4)(b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9)$ 展开后共有 ()

- A. 8 项 B. 18 项
C. 20 项 D. 28 项

2. 用 2 个 1, 1 个 2, 1 个 0, 可组成不同的四位数的个数是 ()

- A. 9 B. 12
C. 16 D. 18

3. 从 1, 2, 3, 4 四个数字中, 每次取出两个数字组成一个两位数.

(1) 如果数字不允许重复使用, 能得到

_____个不同的两位数；

(2) 如果数字允许重复使用，能得到
_____个不同的两位数.

4. 已知集合 $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{2, 3, 4, 5\}$.

(1) 任取一个奇数 $n, n \in M \cup N$, 共有多少种不同的取法?

(2) 设点 $Q(x, y), x \in M, y \in N$, 共有多少个不同的点?

(3) 在(2)中, 有多少个点 $Q(x, y)$ 不在直线 $y = x$ 上?

B. 能力提升

5. 从分别标有 $1, 2, \dots, 9$ 的 9 张卡片中不放回地随机抽取 2 次, 每次抽取 1 张, 则抽到的 2 张卡片上的数奇偶性不同的概率是

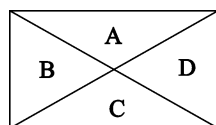
- ()
- A. $\frac{5}{18}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

6. 将字母 a, a, b, b, c, c 排成三行两列, 要求每行的字母互不相同, 每列的字母也互不相同, 则不同的排列方法共有 ()

- A. 12 种 B. 18 种
C. 24 种 D. 36 种

7. (2019·上海) 有一个三位数密码锁, 每个位置为 $0 \sim 9$ 中的某数, 则恰有两位数字相同的概率是_____.

8. 如图, 矩形的对角线把矩形分成 A, B, C, D 四部分. 现用 5 种不同颜色给四部分涂色, 每部分涂 1 种颜色, 要求共边的两部分颜色互异, 则共有_____种不同的涂色方法.



C. 拓展创新

9. 方程 $ay = b^2x^2 + c$ 中的 $a, b, c \in \{-3, -2, 0, 1, 2, 3\}$, 且 a, b, c 互不相同. 在所有这些方程所表示的曲线中, 不同的抛物线共有多少条?

10. 用 a 代表红球, b 代表蓝球, c 代表黑球. 由加法原理及乘法原理, 从 1 个红球和 1 个蓝球中取出若干个球的所有取法可由 $(1+a)(1+b)$ 的展开式 $1+a+b+ab$ 表示出来, 如: “1”表示一个球都不取, “ a ”表示取出 1 个红球, 而“ ab ”则表示把红球和蓝球都取出来. 依此类推, 下列各式中, 其展开式可用来表示从 5 个无区别的红球、5 个无区别的蓝球、5 个有区别的黑球中取出若干个球, 且所有的蓝球都取出或都不取出的所有取法的是

- ()
- A. $(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)(1+b^5)(1+c)^5$
B. $(1+a^5)(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5)(1+c)^5$
C. $(1+a)^5(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5)(1+c^5)$
D. $(1+a^5)(1+b)^5(1+c+c^2+c^3+c^4+c^5)$

再生新疑

1.2 排列与组合

第一学时 排列和排列数



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点



问题呈现

六位同学要站成一排照相,一共有多少种不同的站法?你会用怎样的方法解决这个问题呢?这类问题在我们的生活中是常常遇到的,除了用计数原理解决外,我们还有没有更加简捷的解决方法呢?



材料链接

✿ 1. 在日常生活中,当计算完成一件事情的方法数时,如果是很简单的计数问题,可以用一个一个去数的办法,但对于较复杂的问题,我们需要综合运用分类加法计数原理和分步乘法计数原理来解决.

✿ 2. 在小学和初中的学习中,我们曾经利用“树形图”或“列表格”的办法计数,它的特点是直观明了.

✿ 3. 关于数的运算,我们已经学习了六种,分别是加、减、乘、除、乘方和对数运算,它们都有相应的运算符号.对于一些与自然数有关的特殊的运算,我们也有一些简单的运算符号.如,在《数学3》中,我们知道 $1+2+3+\cdots+n=$

$$\sum_{i=1}^n i.$$



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成



教材导读



问题一

什么是排列?

阅读教材 p14~p16 的有关内容,思考并回答下列问题:

✿ 1. 运用列举法计数,可以培养有序、全面地思考问题的习惯.你能通过“树状图”用列举法解决教材中的“问题1”和“问题2”吗?

✿ 2. 运用基本计数原理计数,体现了我们的抽象思维能力.你能利用基本计数原理来解决教材中的“问题1”和“问题2”吗?此时,在“问题1”和“问题2”中要完成的“一件事”分别是什么?它们有什么共同特点?

✿ 3. 什么是“从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的一个排列”?它具有怎样的特征?你如何理解排列定义中“按照一定的顺序”的含义呢?试举例说明.



问题二

什么是排列数？如何计算排列数？

阅读教材 p16~p18 的有关内容,思考并回答下列问题:

✿ 1. 从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的排列数的意义是什么? 用什么符号表示? 其中 A 是英文 arrangement(排列)的第一个字母,你知道吗?

✿ 2. 你能用分步乘法计数原理计算从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数 A_n^m 吗? 教材中导出排列数公式用的是什麼方法? 在推导 $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 时,为什么第 m 个位置共有 $(n-m+1)$ 种填法?

✿ 3. “ n 的阶乘”的含义和表示是什么? 你能否推导出排列数的阶乘公式? 特别地, 0 的阶乘是多少呢?

✿ 4. 排列数公式有两种不同的形式,请你概括一下这两个公式的特点并进行记忆. 在应用中你应该怎样选择?



自主测评

1. 写出:(1)北京、上海、广州 3 个城市之间的所有直达航线的始发站与到达站不同的飞机票种类;

(2)由 1,2,3,4 这四个数字组成的没有重复数字的所有四位数.

2. 计算:

(1) A_6^3 ;

(2) A_{100}^2 ;

(3) $A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + A_4^4$.



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题三

在本学时的学习中,我们能感受到怎样的思考和解决问题的方法? 体现了哪些数学思想?

能够利用排列数公式解决的计数问题一定能够利用乘法原理解决. 事实上,利用排列数公式解有关排列的计数问题本质上是一种

思维的“简化”，你对这种模式化的思考问题方式有怎样的感受？试着说出你的想法，与同学和老师进行交流。



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

如何解决与排列有关的简单计数问题？

1. 你能够分别用分步乘法计数原理和排列数公式解决教材例 2 中的问题吗？对比这两种解法的特点，你能否说出它们的区别与联系？两种解法哪一种更加简捷呢？为什么？

2. 解决有关排列的应用问题的关键在于“模型识别”，在哪种情形下，我们可以直接利用排列数公式计数呢？请举例说明。



展题设计

展题 1 求证： $A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m$.

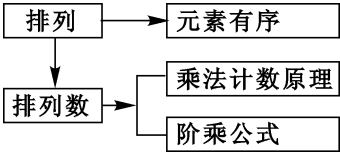
指导要求：根据问题的特点，你准备用排列数公式的哪一种形式来证明上面的等式？观察所证等式，你应该从左向右证，还是从右向左证？为什么？

展题 2 某信号兵用红、黄、蓝三面旗从上到下挂在竖直的旗杆上表示信号，每次可以挂一面、两面或三面，并且不同的顺序表示不同的信号，一共可以表示多少种不同的信号？

指导要求：本题是否为排列问题？你是根据什么进行判断的？根据条件特点，在解决此题时，还需要怎样的思考方式？



归纳总结



板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练



分层演练

A. 基础巩固

1. $18 \times 17 \times 16 \times \cdots \times 9 \times 8$ 等于 ()
- A. A_{18}^8 B. A_{18}^9
C. A_{18}^{10} D. A_{18}^{11}
2. 下列各式中,不等于 $n!$ 的是 ()
- A. A_n^n B. $\frac{1}{n+1} A_{n+1}^{n+1}$
C. A_{n+1}^n D. $n A_{n-1}^{n-1}$
3. 写出:(1)从 a, b, c, d, e 中取出 4 个元

素的排列中 a 不在首位的所有排列;

(2) 从 a, b, c, d, e 中取出 4 个元素的排列中 a 不在首位且 b 不在末位的所有排列.

4. 某高三毕业班有 40 人, 同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言, 那么全班共写了 _____ 条毕业留言. (用数字作答)

B. 能力提升

5. (1) 已知 $A_{10}^m = 10 \times 9 \times \cdots \times 5$, 那么 $m =$ _____.

(2) 已知 $A_n^2 = 56$, 那么 $n =$ _____.

6. 计算:

(1) $4A_4^2 + 5A_5^3$;

(2) $\frac{2A_{12}^7 A_5^3}{A_{12}^{12}}$;

(3) $\frac{A_{10}^3 A_7^7}{10!}$.

7. 已知 $\frac{A_n^7 - A_n^5}{A_n^5} = 89$, 求 n 的值.

8. (1) 一辆公交车到站, 有 5 人上车, 他们发现车上还有 3 个空座位. 若每个座位只坐一人, 且每个座位都有人坐, 那么不同的坐法共有多少种?

(2) 一辆公交车到站, 有 3 人上车, 他们发现车上还有 5 个空座位. 若每个人都坐到一个座位, 那么不同的坐法有多少种?

C. 拓展创新

9. 求证: $(n+1)! - n! = n \cdot n!$, 并利用它来化简 $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + 10 \times 10!$.

10. 规定 $A_x^m = x(x-1)\cdots(x-m+1)$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, m 为正整数, 且 $A_x^0 = 1$, 这是排列数 A_n^m (n, m 是正整数, 且 $m \leq n$) 的一种推广.

(1) 求 A_{-15}^3 的值.

(2) 我们已经知道对于排列的公式, 有① $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$, ② $A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m$ (其中 m, n 是正整数), 这两个性质能否推广到 A_x^m ($x \in \mathbf{R}, m$ 是正整数) 的情形? 试说明理由.

再生新疑

第二学时 排列的应用问题



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

九位同学要站成一排照相,要求甲在中间、乙在排头、丙在排尾,有多少种站法?如果要求不能同时出现甲在中间、乙在排头、丙在排尾的站法,又有多少种站法?这是排列问题吗?你会用怎样的方法解决这个问题呢?对于稍复杂的排列应用问题,我们一般要怎样去思考解决呢?

材料链接

- 1. 利用计数原理解决有关计数的应用问题一般要经过三个步骤的思考:(1)What:完成一件什么事?(2)How:怎样去完成?(3)Compute:计数,分类地去完成,则用加法计数;分步地去完成,则用乘法计数.
- 2. 排列数 $A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$. 从形式上看, A_n^m 是右边的乘积形式和阶乘形式的简单记法,实质上排列数是一种在模式识别基础上的思维简化. 因此,并不是所有计数问题都是排列问题,而排列问题只是在用计数原理解决有关应用问题时的第三个步骤中涉及的问题. 我们学习排列数,主要是为了计数的方便.
- 3. 一道题目常常有多种解法. 经过一题多解的练习,同学们可以学会从不同的角度分析、解决问题.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

元素可重复排列与元素不可重复排列的主要区别是什么?

阅读教材 p18、p19 例 3,思考并回答下列问题:

- 1. 填写银行卡的六位密码,是否可以认为是从 10 个元素中取出 6 个元素的一个排列呢?为什么?
- 2. 请先用乘法原理解决教材例 3 中的两个问题,然后比较这两个问题的相同点和不同点,其中哪一个是排列问题?
- 3. 事实上,例 3 中第(1)问对应于从 5 个不同元素中任取 3 个元素(元素不可重复,即取了之后不可再取)的一个排列,第(2)问对应于从 5 个不同元素中任取 3 个元素(元素可重复,即取了之后还可再取)的一个排列. 我们所说的 A_n^m 是指哪一种排列的排列数? 元素可重复排列与元素不可重复排列的主要区别是什么? 你如何计算从 n 个元素中任取 $m(m \leq n)$ 个元素,元素可重复排列的排列数?



问题二

如何解决有一个约束条件的排列问题?

阅读教材 p19、p20 的相关内容,思考并回答下列问题:

❁ 1. 在教材例 4 中,由于 0 不能排在百位上,因此 0 是一个特殊元素;另一方面,由于百位必须是非 0 的,因此百位是一个特殊位置. 按照“先特殊,后一般”的思考原则,可以“先排特殊元素”或者“先排特殊位置”. 请你从这种想法出发,分别用两种不同的方法解决这个问题. 试着将你的解法与教材中的“解法 1”和“解法 2”比较,你会有怎样的发现?

❁ 2. 教材例 4 中的“解法 3”运用的是“间接法”. 先不考虑约束条件进行排列,然后将不满足条件的排列去掉,由此得到符合条件的排列数. 这种方法体现了怎样的解决问题的方式? 它有什么特点? 在什么情况下可以用这种方法来解决问题?

❁ 3. 从不同的角度分析一个问题,可以使我们将问题理解得更加透彻. 通过解决教材例 4 中的问题,你能否总结一下,当遇到有一个约束条件的排列问题时,我们可以怎样考虑呢?



自主测评

用 0,1,2,3,4,5 这 6 个数字,

(1) 可以组成多少个三位数?

(2) 可以组成多少个没有重复数字的三位数?

(3) 可以组成多少个没有重复数字的末位是 5 的三位数?



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题三

解决关于排列的计数应用问题时需要注意些什么?

关于排列的应用问题往往可以从多种途径考虑,因此,其解法具有较大的灵活性. 通过前面的学习,你认为解决这类问题需要注意些什么? 正确解决它的关键是什么? 试着把你的想法展示出来,与老师和同学进行交流.



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

如何解决有两个约束条件的排列问题?

✿ 1. 在前面的学习中,我们主要研究了含有一个约束条件的排列问题.在现实生活中,有没有含有两个约束条件的排列问题呢?请试着举出一些例子来.(可参考“展题 1”)

✿ 2. 若一件事情有一个约束条件 A ,你会采取怎样的策略去解决它?进一步来讲,当做一件事情有两个约束条件 A 和 B 时,我们要根据 A 和 B 的关系着手进行解决:若 $A \cap B = \emptyset$,则可分别考虑 A 和 B ;若 $B \subseteq A$,则要先考虑 B 再考虑 A ;若 $A \cap B \neq \emptyset$ 且 $B \not\subseteq A$,则应按照 B 中元素是否包含于 A 进行分类,转化成前面的两种情形再进行考虑.你能用以上策略解决上面你所举出的例子吗?试一试吧!(可参考“展题 1”的解答)



问题五

如何解决某些元素必须相邻和某些元素必不相邻的排列问题?

✿ 1. 在我们的日常生活中,经常会遇到某些元素必须相邻和某些元素必不相邻的排列问题,你能分别举出一些例子吗?(可参考“展题 2”)

✿ 2. 关于某些元素必须相邻的排列问题,你可以用什么样的方法解决?(可参考“展题 2”第(1)问的解答)

✿ 3. 关于某些元素必不相邻的排列问题,你用什么方法解决?(可参考“展题 2”第(2)问的解答)

展题设计

✿ 展题 1 由 0~9 这 10 个数字可组成多少个无重复数字的

- (1)首位为奇数的四位偶数?
- (2)四位奇数?
- (3)四位偶数?

指导要求:本题中的问题与教材例 4 最明显的差异是什么?在问题中设满足千位的数字组成集合 A ,满足个位的数字组成集合 B ,你能用图形表示在问题(1)(2)(3)的情况下,集合 A 与集合 B 之间的关系吗?对应于(1)(2)(3)三种不同的集合关系,参照对“问题三”的研究,你将要采取什么样的办法解决相应的问题呢?

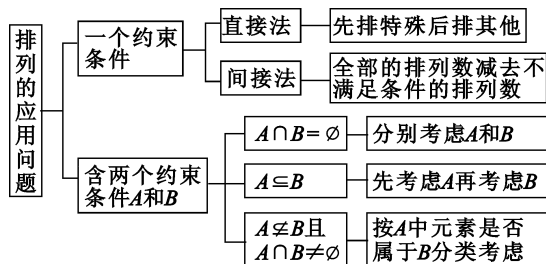
※展题 2 将包含甲、乙、丙在内的 6 个人排一排.

(1) 甲和乙两人相邻的排法有多少种?

(2) 甲、乙、丙三人两两不相邻的排法有多少种?

指导要求: 本题中的问题(1)(2)对排列中的元素都有哪些特殊的要求? 参照对“问题四”的研究, 你将要分别采取什么样的办法解决相应的问题呢? 为了确保某些特殊元素必须相邻, 我们常常把它们看作一个元素与其他元素排列, 然后再将它们进行排列, 这种方法叫做“捆绑法”; 为了确保某些特殊元素不能相邻, 我们常常先把其余的元素进行排列, 然后再将这些元素“插入”前面所排元素之间的“空隙”, 这种方法叫做“插空法”. 你能否分别利用这两种方法解决问题(1)(2)呢? 在解决时要注意什么问题呢?

归纳总结



板块五 应用演练, 再生新疑

分级设题, 精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. A, B, C, D, E, F 六人围坐在一张圆桌周围开会, A 是会议的中心发言人, 必须坐最北面的椅子, B, C 两人必须坐相邻的两把椅子, 其余三人坐剩余的三把椅子, 则不同的座次有

()

- A. 60 种 B. 48 种
C. 30 种 D. 24 种

2. 用 1, 2, 3, 4, 5 这 5 个数字组成没有重复数字的五位数, 其中奇数的个数为 ()

- A. 24 B. 48
C. 60 D. 72

3. 安排 7 位工作人员在周一至周日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙两人不安排在周一和周二, 不同的安排方法共有 _____ 种.

4. 来自甲、乙、丙 3 个班的 5 名同学站成一排照相, 其中甲班有 2 名同学, 乙班有 2 名同学, 丙班有 1 名同学, 则仅有一个班级的同学相邻的站法种数为 _____.

B. 能力提升

5. 用数字 0, 1, 2, 3, 4 组成没有重复数字且大于 3 000 的四位数, 这样的四位数有

()

- A. 250 个 B. 249 个
C. 48 个 D. 24 个

6. 两对夫妇各带一个小孩到上海迪士尼乐园游玩, 购票后依次入园. 为安全起见, 首尾一定要排两位爸爸, 另外, 两个小孩要排在一起, 则这 6 个人的入园顺序的排法种数是

()

- A. 12 B. 24
C. 36 D. 48

7. 把 4 件不同的产品摆成一排, 若其中

的产品 A 与产品 B 都摆在产品 C 的左侧,则不同的摆法有 _____ 种(用数字作答).

8. 用 0,1,2,3,4,5 这 6 个数字,

(1) 能组成多少个无重复数字的四位偶数?

(2) 能组成多少个无重复数字且能被 5 整除的四位数?

(3) 能组成多少个无重复数字且比 1 325 大的四位数?

C. 拓展创新

9. 包含甲、乙、丙在内的七名同学站成一排.

(1) 甲、乙两人不能站在两端的排法有多少种?

(2) 甲不站排头、乙不站排尾的排法有多少种?

(3) 甲与乙、丙二人不相邻的排法有多少种?

(4) 甲在乙的左边并且丙在乙的右边的排法有多少种?

10. 把 m 个不同的小球放入 n 个有编号的小盒,要求每盒所放球数不超过 1 个,直至

球放完或盒子放满为止,那么有多少种不同的放法?

再生新疑

第三学时 组合和组合数



板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

在产品质量检验时,常从产品中抽出一部分进行检验.若有 100 件产品,从中任意抽出 3 件进行检验,共有多少种不同的抽法? 运用列举法显然太繁琐,你能运用基本计数原理解决吗? 这类问题在我们的生活中是常常遇到的,它与排列问题有怎样的区别和联系呢? 我们一般应用什么方法解决它们呢? 相信通过本学时的学习你能够轻松得到问题的答案.

材料链接

1. 从 n 个不同元素中取出 m 个元素排成一列和从 n 个不同元素中取出 m 个元素组成一组是我们生活中常见的两种模型,前者是排列,后者是组合.如,从 0~9 这 10 个数字中选 3 个不同数字构成一个三位数是一个排列,构成一个三元素的集合是一个组合.

2. 对同一个问题作出两个等价的解释,不仅可以加深我们对问题的理解,而且可以

使我们找到解决问题的方法. 这种“从另一个角度解释问题”的思想方法, 我们称为“算两次”.



板块二 自学思疑, 初探问题

尊重认知规律, 亲历感悟知识生成

教材导读



问题一

什么是组合? 它与排列的主要区别是什么?

阅读教材 p21 的有关内容, 思考并回答下列问题:

❁ 1. 从甲、乙、丙三名同学中选出两人分别担任班长和副班长, 有多少种不同的结果? 从甲、乙、丙三名同学中选出两人作为学生代表, 有多少种不同的选法? 这两个问题有什么相同点和不同点? 你能根据自己的理解, 再举出一些类似的例子进行比较吗?

❁ 2. 事实上, 上述问题中, 前者涉及“从 3 个不同元素中取出 2 个元素的排列”, 后者涉及“从 3 个不同元素中取出 2 个元素的组合”, 你能由此说出“从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列”与“从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合”的相同点和不同点吗?



问题二

什么是组合数? 它与排列数有怎样的联系与区别?

阅读教材 p21~p23 的有关内容, 思考并回答下列问题:

❁ 1. 类比排列数的概念, 你能得出相应的组合数的概念吗? 一般用怎样的符号表示从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的组合数? 其中的 C 是英文 combination (组合) 的第一个字母, 你知道吗?

❁ 2. 现在, 我们探究求组合数的方法. 试着以“元素相同不区别顺序”为标准, 列举从 a, b, c, d 四个元素中取出三个不同元素的所有取法, 然后进行观察, 从中你能看出“从 a, b, c, d 四个元素中取出三个不同的元素的组合”与“从 a, b, c, d 四个元素中取出三个不同的元素的排列”之间有怎样的联系吗? 由此, 你能否想到从 a, b, c, d 四个元素中取出三个不同的元素的组合数的求法呢? 将这种方法推广到一般, 你如何求从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的组合数呢?

❁ 3. 从组合数公式的推导过程中, 你体会到了怎样的思想方法? 与排列数公式类比, 试分析组合数公式的两种不同形式各自的特点, 并进行记忆.

自主测评

试判断下列问题是排列问题还是组合问题,请说明理由,并进行解答.

(1)从 9 名学生中选出 4 名学生参加一场联欢会,求有多少种不同的选法;

(2)北京、上海、天津、广东四支足球队举行单循环赛,求比赛总场次;

(3)从 2,3,5,7,11 这 5 个质数中,每次取 2 个数分别作分子和分母,构成一个分数,求所有不同分数的个数;

(4)空间有 8 个点,其中任何 4 点都不共面,从这 8 个点中任取 4 点作为顶点构成一个四面体,计算四面体的个数.



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题三

推导组合数公式时用到了什么思想方法?

在推导组合数公式时,我们采用了什么思想方法?你对这种方法是如何理解的?你能举出一些应用这个方法的实例吗?试着展示出来,与老师和同学进行交流.



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

如何正确地解决有关组合的简单计数问题?

1. 你能自主完成教材 p23、p24 的例 6 吗? 这个问题是有关组合的计数问题吗? 将你的解答与教材中的进行比较,你会有怎样的发现?

2. 通过对教材例 6 的学习,请说明有关排列的计数问题与有关组合的计数问题有什么明显的不同?

3. 类比对排列的学习,你认为在解决实际问题的过程中,如何能够迅速而准确地识别“组合”模型? 试着将你的想法与老师和同学进行交流.



展题设计

展题 1 求证:(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

(2) $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

指导要求:组合数公式有两种不同的形式,你认为用哪一种形式证明本题比较方便?除了运用组合数公式直接证明本题以外,你还能想出其他的证明方法吗?你能利用我们

这学时所用到的算两次的方法,说明“等式”两边是对同一个问题作出的两个等价解释,并由此解决本题中的证明吗?

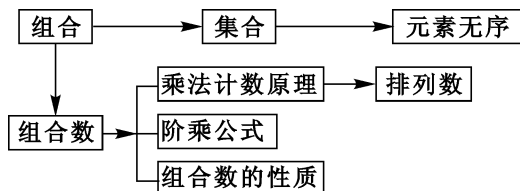
※展题 2 在歌手大奖赛的文化素质测试中,选手需从 5 道试题中任意选答 3 道.

(1)有几种不同的选题方法?

(2)若有 1 道题是必答题,则有几种不同的选题方法?

指导要求:排列问题与组合问题最主要的区别是什么? 本题中涉及的问题是排列问题还是组合问题?

归纳总结



板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 化简 $C_{40}^{37}, C_{39}^2 + C_{39}^3$ 的结果分别是

()

A. C_{40}^3, C_{40}^3

B. C_{40}^3, C_{39}^3

C. C_{40}^3, C_{41}^3

D. C_{40}^3, C_{39}^4

2. 5 名男同学、6 名女同学排成一排,要求男同学顺序一定且女同学顺序也一定,则不同的排法种数为

()

A. C_{11}^5

B. $2C_{11}^5$

C. A_{11}^5

D. $\frac{A_{11}^6}{A_6^6}$

3. (2019·江苏)从 3 名男同学和 2 名女同学中任选 2 名同学参加志愿者服务,则选出的 2 名同学中至少有 1 名女同学的概率是_____.

4. 已知 A, B, C, D 四个点,其中任意三点不在同一条直线上,从中任取两个点作直线,可以作出_____条直线.若从中任取两个点作有向线段,则可以作出_____条起点不同的有向线段.

B. 能力提升

5. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果.哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”,如 $30=7+23$.在不超过 30 的素数中,随机选取两个不同的数,其和等于 30 的概率是

()

A. $\frac{1}{12}$

B. $\frac{1}{14}$

C. $\frac{1}{15}$

D. $\frac{1}{18}$

6. 某兴趣小组有 2 名男生和 3 名女生,现从中任选 2 名学生去参加活动,则恰好选中 2 名女生的概率为_____.

7. 求证: $(n+1)C_n^m = (m+1)C_{n+1}^{m+1}$.

8. 已知 $\begin{cases} C_n^x = C_n^{2x}, \\ C_n^{x+1} = \frac{11}{3}C_n^{x-1}, \end{cases}$ 试求 x, n 的值.

C. 拓展创新

9. 学校开设了 6 门选修课.

(1) 某学生从中选 3 门, 共有多少种不同的选法?

(2) 某学生从中至少选 2 门, 共有多少种不同的选法?

(3) 某学生从中至多选 4 门, 共有多少种不同的选法?

10. 从正方体六个面的对角线中任取两条作为一对, 其中所成的角为 60° 的共有多少对?

再生新疑

第四学时 组合的应用问题



板块一 创设问题, 引领目标

导入问题, 直指学时重点

问题呈现

在检验产品时, 若有 100 件产品, 其中有 2 件次品, 从中任意抽出 3 件进行检验, 所抽出的产品中至少有 1 件是次品, 共有多少种不同的抽法? 组合在我们的生活中是广泛存在的, 关于组合的应用问题我们应如何去思考呢? 这正是本学时我们要研究的.

材料链接

✿ 1. 运用计数原理解决有关计数问题时, 一般在明确了要完成一件什么事的前提下, 要经过分类或分步的思考.

✿ 2. 运用排列知识可以解决的有关计数问题有“排队”问题、“选号”问题等, 一般都要根据条件采取“先选后排”的策略解决问题.

✿ 3. 排列与组合的明显差异是元素之间是否存在顺序. 有关组合的计数问题在我们的生活中经常遇到, 与解决有关排列的计数问题类似, 我们要注意一题多解、正难则反等思考方式的运用, 在解决问题的过程中不断训练和培养我们分析问题、解决问题的能力.



板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成



教材导读



问题一

如何正确区分排列问题和组合问题?

❀ 1. 你能自主完成教材 p24 例 7 吗? 这是一个在几何背景下的计数问题,题中的两个小问题的主要差异在哪里?

❀ 2. 通过对教材例 7 的解决,你能说说在实际问题中,正确区分排列问题和组合问题的关键是什么吗? 试举例说明.



问题二

如何解决有关产品抽样检查问题?

阅读教材 p24、p25 例 8,思考并回答下列问题:

❀ 1. 你能自主解决教材例 8 中的三个问题吗? 将你的解法与教材中的相比较,你有怎样的发现?

❀ 2. 教材例 8 中涉及产品抽样检查的问题,为什么这类问题和组合有关呢?

❀ 3. 在教材例 8 中的第(2)个问题中,“恰有 1 件”的意义是什么? 你能结合组合的意义利用分步乘法计数原理解决这个问

题吗?



自主测评

有 8 名男生和 5 名女生,从中任选 6 名.

(1)有多少种不同的选法?

(2)其中恰有 3 名女生,共有多少种不同的选法?

(3)其中至多有 3 名女生,共有多少种不同的选法?



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题三

在本学时的学习中,我们运用了哪些方法研究问题?

本学时我们接触了哪些类型的计数问题? 分别是运用什么方法解决的? 你能否再举出一些类似的例子呢? 试着展示出来与老师和同学进行交流.



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

组合的本质特征是什么?在实际应用中如何避免发生错误?

❁ 1. 在教材例 8 的第(3)个问题中,“至少有 1 件”的意义是什么? 你可以用哪些方法解决这个问题呢?

❁ 2. 关于教材例 8 中的第(3)个问题,有一位同学的解法如下:

从 100 件产品中抽出的 3 件中至少有 1 件是次品,可以分两步完成. 第一步,从 2 件次品中抽出 1 件,共 C_2^1 种方法;第二步,从余下的 99 件产品中抽出 2 件,共 C_{99}^2 种方法. 所以,从 100 件产品中抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的抽法共有 $C_2^1 C_{99}^2$ 种.

你认为这位同学的解法对吗? 请说明理由.

❁ 3. 通过对以上问题的回答,你是否对组合的本质特征有了更加深刻的理解? 试着谈谈你的想法. 现在,请试着总结一下:当应用两个基本计数原理和组合知识解决有关的应用问题时,我们一般要如何思考? 需要注意些什么?

展题设计

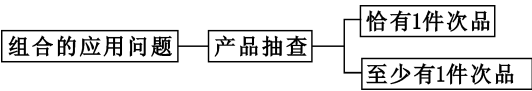
❁展题 1 房间里有 5 盏电灯,分别由 5 个开关控制,至少开 1 盏灯用以照明,有多少种不同的方法?

指导要求:题目中电灯照明和顺序是否有关? 当题目的问题中涉及“至多”“至少”时,我们可以采取什么样的方法来解决?

❁展题 2 以正方体的顶点为顶点,能构成多少个不同的三棱锥?

指导要求:满足什么条件的四个点可以作为三棱锥的四个顶点? 这些点与顺序有关吗? 结合正方体的具体情况,你决定怎样解决本题?

归纳总结





板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

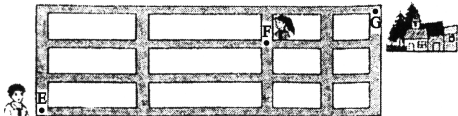
A. 基础巩固

1. 袋中装有 2 个红球,3 个黄球,有放回地抽取 3 次,每次抽取 1 个球,则 3 次中恰有 2 次抽到黄球的概率是 ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$
C. $\frac{18}{125}$ D. $\frac{54}{125}$

2. 如图,小明从街道的 E 处出发,先到 F 处与小红会合,再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动,则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为 _____;

若小明从 E 处出发,单独一人到位于 G 处的老年公寓,则小明可以选择的最短路径条数为 _____.



3. 从 2 位女生,4 位男生中选 3 人参加科技比赛,且至少有 1 位女生入选,则不同的选法共有 _____ 种(用数字作答).

4. 某班有 50 名同学,其中 30 名男同学,20 名女同学. 现要从中抽取 6 人参加一项活动,则:(以下各小题只需用式子表达)

- (1) 只抽男同学,共有多少种不同的抽法?
- (2) 男、女同学各占一半,共有多少种不同的抽法?
- (3) 女同学至少一人,共有多少种不同的抽法?

B. 能力提升

5. 2020 年元旦假期,高三的 8 名同学准备拼车去旅游,其中(1)班、(2)班、(3)班、(4)班每班各 2 名,分乘甲、乙两辆汽车,每车限坐 4 名同学(乘同一辆车的 4 名同学不考虑位置),其中(1)班 2 名同学是孪生姐妹,需乘同一辆车,则乘坐甲车的 4 名同学中恰有 2 名同学是来自同一个班的乘坐方式共有 ()

- A. 18 种 B. 24 种
C. 36 种 D. 48 种

6. 某地实行高考改革,考生除参加语文、数学、英语统一考试外,还需从物理、化学、生物、政治、历史、地理六科中选考三科. 学生甲要想报考某高校的法学专业,就必须要从物理、政治、历史三科中至少选考一科,则学生甲的选考方法种数为 ()

- A. 6 B. 12
C. 18 D. 19

7. 平面内有 9 条直线.

(1) 这 9 条直线最多可以构成 _____ 个不同的三角形;

(2) 如果其中有 4 条直线互相平行,那么这 9 条直线最多可以构成 _____ 个不同的三角形;

(3) 如果其中没有相互平行的直线,而有 4 条直线交于一点,那么这 9 条直线最多可以构成 _____ 个不同的三角形.

8. 一份试卷有 10 道题,分为 A,B 两组,每组 5 道题,要求考生选择 6 道题,但每组至多选 4 道,那么考生有多少种不同的选法?

C. 拓展创新

9. 某次足球赛共 12 支球队参加,分三个阶段进行.

(1)小组赛:经抽签分成甲、乙两组,每组 6 队进行单循环比赛,比积分及净胜球取前两名.

(2)半决赛:甲组第一名与乙组第二名,乙组第一名与甲组第二名作主、客场交叉进行淘汰赛(每两队主客场各赛一场),决出胜者.

(3)决赛:两个胜队参加决赛一场,决出胜负.

问:全部赛程共需比赛多少场?

10. (1)设集合 $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$, 求集合 A 中满足条件“ $1 \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| \leq 3$ ”的元素个数.

(2)如果小刚在某一周的第一天和第七天分别吃了 3 个水果,且从这周的第二天开始,每天所吃水果的个数与前一天相比,仅存在三种可能:或“多一个”或“持平”或“少一个”,那么,小刚在这一周中每天所吃水果个数的不同选择方案共有多少种?

第五学时 计数应用题习题课



板块一 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题呈现



问题

运用排列组合的知识,结合两个基本计数原理,我们在前面的学习中都解决了哪些方面的计数问题? 涉及哪些分析问题和解决问题的思想方法? 运用你所学的知识,你还会解决哪些类型的计数问题呢? 试着展示出来与老师和同学进行交流.

展题设计

※展题 1 有 6 本不同的书,按下列方法来分,各有多少种不同的分法?

(1)分成 1 本、2 本、3 本三组;

(2)分给甲、乙、丙三人,其中一人 1 本,一人 2 本,一人 3 本;

(3)分给甲、乙、丙三人,每人 2 本;

(4)分成每组都是 2 本的两个组.

分析:本题是对分组问题和分配问题的研究.对于(1),按照 1 本、2 本、3 本的顺序进行分组即可得解;对于(2),可在(1)的基础上再对甲、乙、丙三人进行分配来解决问题;(3)是一个平均分配的问题,按照甲、乙、丙进行分配即可;(4)是一个平均分组的问题,我们可以从(3)入手,借助平均分配问题寻求问题的解答.

解:(1)6 本不同的书,分成 1 本、2 本、

3本三组,可以分三步完成.

第一步:从6本中取1本,有 C_6^1 种取法;
第二步:从剩余的5本中取2本,有 C_5^2 种取法;
第三步:最后剩的3本作为一组,有 C_3^3 种取法.

所以,满足条件的分法共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 = 60$ 种.

(2)6本不同的书,分给甲、乙、丙三人,其中一人1本,一人2本,一人3本,可以分两步完成.

第一步:6本不同的书分成1本、2本、3本三组,由(1)知,有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3$ 种分法.

第二步:将1本、2本、3本三组书分配给甲、乙、丙,有 A_3^3 种分法.

所以,满足条件的分法共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3 = 360$ 种.

(3)6本不同的书,分给甲、乙、丙三人,每人2本,可以分步来完成.

第一步:从6本书中取2本给甲,有 C_6^2 种方法;

第二步:从剩下的4本书中取2本给乙,有 C_4^2 种方法;

第三步:剩余的2本书给丙,有 C_2^2 种方法.

所以,满足条件的分法共有 $C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 90$ 种.

(4)从另一个角度考虑(3),6本不同的书,分给甲、乙、丙三人,每人2本,可以分两步完成.

第一步:将6本不同的书分成三组,每组2本,这即是本题的情况,设有 n 种分法;

第二步:将分好的三组书分给甲、乙、丙三人,有 A_3^3 种分法.

$$\text{所以, } n \cdot A_3^3 = C_6^2 C_4^2 C_2^2, \text{ 即 } n = \frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3},$$

故满足条件的分法共有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} = 15$ 种.

点评:分配问题和分组问题的主要区别在于有无顺序.这是一个排列和组合的综合问题,一般的思考方式是先分组再分配,希望同学们通过此例理解它们之间的区别和联系.

变式 将四个不同的小球放入编号为1,2,3,4的四个盒子中,恰有一个空盒的放法有多少种?

答案:先将四个小球分成1个球,1个球,2个球三组,再分配给四个盒子中的三个,共有 $\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^2}{A_2^2} \cdot A_4^3 = 144$ 种放法.

展题2 有10个三好学生名额要分配给6个班级,要求每班至少有1个名额,共有多少种分配方案?

分析1:本题也是一种分配问题,我们依然可以按先分组后分配的顺序进行思考.与例1的条件比较,你会发现例1中参与分配的对象是“6本不同的书”,它们是有区别的,本题中参与分配的对象是“10个三好学生名额”,它们是没有区别的,这是解决本题时要特别注意的.

解法1:把10个三好学生名额分配给6个班级,可以有以下五类分配方式.

第一类:将10个名额分成“5,1,1,1,1,1”6个组,再分到6个班级,有 $A_6^1 = C_6^1$ 种分法;

第二类:将10个名额分成“4,2,1,1,1,1”6个组,再分到6个班级,有 $A_6^2 = C_6^1 C_5^1$ 种分法;

第三类:将10个名额分成“3,3,1,1,1,1”6个组,再分到6个班级,有 $\frac{A_6^3}{A_2^2} = C_6^2$ 种分法;

第四类:将10个名额分成“3,2,2,1,1,1”6个组,再分到6个班级,有 $\frac{A_6^3}{A_2^2} = C_6^1 C_5^2$ 种分法;

第五类:将10个名额分成“2,2,2,2,1,1”,

1”6 个组,再分到 6 个班级,有 $\frac{A_6^4}{A_4^4} = C_6^4$ 种分法.

所以,满足条件的分法共有 $C_6^1 + C_6^1 C_5^1 + C_6^2 + C_6^1 C_5^2 + C_6^4 = 126$ 种.

分析 2:通过解法 1,我们看到解决此题的关键是如何将 10 个三好学生名额分成 6 个组,再结合班级的有序性,我们可以把这题抽象成将 10 个相同的对象按顺序分成“6 段”共有多少种分法.我们可以通过插入五个“隔板”来达到目的.

解法 2:10 个三好学生名额分配给 6 个班级,每班至少有 1 个名额,可以通过以下两步完成.第一步:将 6 个班级用五个“隔板”分开,由于 6 个班级之间仅有 5 个空,所以,这一步有 1 种方法;第二步,把五个“隔板”插到 10 个名额之间的 9 个空格中,将 10 个名额分成 6 部分,就得到每个班相应的分配名额,有 C_9^5 种方法.

所以,满足条件的分法共有 $C_9^5 = 126$ 种.

点评:一般涉及某种指标分配的问题时,我们可以利用上面的“隔板法”来解决.要注意它的特点是分配的指标是无序的,接收的对象是有序的.

展题 3 用 5 种不同的颜色给图中的 4 个区域涂色,每个区域涂 1 种颜色.要使相邻区域不同色,有多少种不同的涂色方法?

分析:用 5 种不同的颜色给图中的 4 个区域涂色,由于是不同颜色涂不同区域,所以本质上是一个

1	4
2	3

排列问题.但是由于涂色情况比较复杂,所以我们需要分类考虑.根据题意,我们可以按照所涂颜色有 2 种、3 种、4 种分三类进行.

解:用 5 种不同的颜色给图中的 4 个区域涂色,可以分为以下三类.

第一类,涂 4 种颜色,有 A_5^4 种方法.

第二类,涂 3 种颜色,此时,可以是 1 和 3 同色,2 和 4 异色或者是 2 和 4 同色,1 和 3 异色,有 $C_2^1 A_5^3$ 种方法.

第三类,涂 2 种颜色,此时,有 A_5^2 种方法.

所以,满足条件的涂色方法共有 $A_5^4 + C_2^1 A_5^3 + A_5^2 = 260$ 种.

点评:解决比较复杂的计数问题时,“分类”是一种较好的解题策略.通过分类,我们可以将复杂的问题分割成几个相对简单的问题进行解决.而分类时,要做到不重不漏,这就需要把握好分类的标准.以本题为例,一般解决有关染色的问题时,我们可以有两层的分类考虑,第一层是按照涂几种颜色进行分类,第二层是按照所涂的某些区域是否同色进行分类.

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“书面表达”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.下面的问题可帮助大家进行总结.

❁ 1. 分组问题和分配问题的区别和联系是什么? 你如何解决“平均分组”的问题? 试举例说明.

❁ 2. 解决有关指标分配的问题时,我们通常用什么方法? 在这个方法的运用过程中需要注意哪些问题? 试举例说明.

3. 解决关于染色的计数问题时,你一般怎样思考? 其中体现了怎样的数学思想方法? 试举例说明.

4. 有关计数的应用题你还知道哪些类型和方法? 试着与老师和同学进行交流.



板块二 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 从5位同学中选派4位在星期五、星期六、星期日参加公益活动,每人一天. 若要求星期五有2人参加,星期六、星期日各有1人参加,则不同的选派方法共有 ()

- A. 40种 B. 60种
C. 100种 D. 120种

2. 某大厦一层有A, B, C, D四部电梯. 现有3人在同一层乘坐电梯上楼,其中2人恰好乘坐同一部电梯,则不同的乘坐方式有 ()

- A. 12种 B. 24种
C. 18种 D. 36种

3. 从1, 3, 5, 7, 9中任取2个数字,从0, 2, 4, 6中任取2个数字,一共可以组成 _____ 个没有重复数字的四位数. (用数字作答)

4. 某校有4个社团向高一学生招收新成员. 现有3名同学,每人只选报1个社团,则恰有2个社团没有同学选报的报法有 _____

种(用数字作答).

B. 能力提升

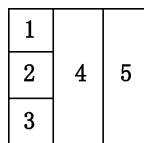
5. 大学生张棋与另外3名大学生一起被分配到某乡镇甲、乙、丙3个村小学进行支教. 若每个村小学至少分配1名大学生,则张棋恰好被分配到甲村小学的概率为 ()

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

6. 将7个相同的小球投入甲、乙、丙、丁4个不同的小盒中,每个小盒中至少有1个小球,那么甲盒中恰好有3个小球的概率为 ()

- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{2}{5}$
C. $\frac{3}{20}$ D. $\frac{1}{4}$

7. 如图,用4种不同的颜色对图中5个区域涂色(4种颜色全部使用),要求每个区域涂一种颜色,相邻的区域不能涂相同的颜色,则不同的涂色方法有 _____ 种.



8. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, 求满足 $S \subseteq A$, 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合S的个数.

C. 拓展创新

9. 球台上有4个黄球,6个红球,击黄球入袋记2分,击红球入袋记1分. 欲将此10个球中的4个球击入袋中,但总分不低于5分,则击球方法有几种?

10. 某大楼安装了 5 个彩灯, 它们闪亮的顺序不固定. 每个彩灯只能闪亮红、橙、黄、绿、蓝中的一种颜色, 且这 5 个彩灯所闪亮的颜色各不相同, 记这 5 个彩灯有序地各闪亮一次为一个闪烁. 在每个闪烁中, 每秒钟有且仅有一个彩灯闪亮, 而相邻两个闪烁的时间间隔均为 5 s. 如果要实现所有不同的闪烁,

那么至少需要多长时间?

再生新疑

1.3 二项式定理

第一学时 二项式定理



板块一 创设问题, 引领目标

导入问题, 直指学时重点

问题呈现

在教材 p11 的“探究与发现”中, 我们利用分步乘法计数原理得到含有 n 个元素的集合 A 的子集共有 2^n 个. 现在利用推导组合数公式时提供的“算两次”的方法, 我们根据分类加法计数原理从另一个角度再算一遍相同的问题: 含有 n 个元素的集合 A 的子集按所含元素的个数可分为 $0, 1, 2, \dots, n$, 共 $(n+1)$ 类, 根据组合的意义, 每类的子集数分别为 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$. 这样含有 n 个元素的集合 A 的子集共有 $(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n)$ 个. 于是, 我们得到等式 $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$. 这个

式子在公元前 2 世纪的印度就出现了, 它被写成 $2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$. 这里, 将“2”写成二项式形式“ $(1+1)$ ”有怎样的意义呢? 在多项式的运算中, 将二项式展开成多项式之和的形式有着非常重要的地位, 它是带领我们进入微分学领域大门的一把金钥匙, 是研究现代科学的重要工具, 对现代科学技术的发展起着巨大的推动作用. 那么, 将二项式展开成多项式之和的形式有怎样的规律呢? 这就是我们本学时所要研究的二项式定理的主要内容.

材料链接

1. 二项式定理是初中所学多项式乘法的继续, 定理的证明是计数原理的应用, 因此有关这两方面的知识需要大家认真回顾一下, 如多项式的项、多项式的系数等.

2. 数学公式是数学知识的一个重要组成部分, 应用它可以简化计算. 如由 $(a+b)^2 =$

$a^2 + 2ab + b^2$, 可得 $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

3. 归纳、猜想、证明是发现数学结论的一种基本途径, 只要善于观察和思考、抽象和概括、推理和证明, 你也能发现一些有趣的数学结论.



板块二 自学思疑, 初探问题

尊重认知规律, 亲历感悟知识生成

教材导读



问题一

什么是二项式? 如何运用计数原理求二项式的展开式中项的系数?

请阅读教材 p29、p30 的有关内容, 思考并回答下面的问题:

1. 本学时所研究的二项式定理主要描述与二项式的展开式有关的内容. 什么是二项式? 你能举出几个简单的二项式的展开式吗?

2. 乘积 $(a+b)(c+d)(e+f)$ 的展开式是怎样的? 你能从计数原理的角度解释它的展开式共有多少项吗?

3. $(a+b)^3$ 展开后不合并同类项有几项? 合并同类项后会有几项? 其中 a^2b 的系数是多少? 你能从计数原理的角度进行解释吗?



问题二

什么是二项式定理?

请阅读教材 p30、p31 的有关内容, 思考并回答下列问题:

1. 观察 $a+b, (a+b)^2, (a+b)^3, (a+b)^4$ 的展开式, 你能得到怎样的结论? 试着根据这一结论写出 $(a+b)^5$ 的展开式, 并运用相关知识验证你的猜想是否正确.

2. 由上面的具体问题, 请你试着猜想, 对于任意正整数 n , 二项式 $(a+b)^n$ 的展开式是怎样的? 试着把你的猜想与老师和同学进行交流.

3. 你能运用所学的知识证明你的上述猜想吗?

4. 什么是二项式定理呢? 二项式定理中的公式为我们的实际运算带来了怎样的便捷? 试着说出你的想法.

5. 什么是二项式系数? 什么是二项展开式的通项? $(a+b)^n$ 的展开式按照 a 的降幂排列, 共有多少项? 其中, 含有 $a^{n-k}b^k$ 的项是第几项? 这一项的系数是多少呢? 你能

利用计数原理求出来吗?

自主测评

$(x^3 + 2x)^7$ 的展开式的第 4 项是 _____; 第 4 项的二项式系数是 _____; 第 4 项的系数是 _____.



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力



问题三

如何从函数的角度理解二项式定理?

❁ 1. 在二项式定理中,如果设 $a=1, b=x$, 你会得到一个怎样的式子? 在该式子中,分别令 $x=1, x=-1$, 你会得到怎样的结论? 这一结论对你有何启发?

❁ 2. 你能利用上面的研究结果求式子 $2C_{10}^1 + 2^2 C_{10}^2 + \cdots + 2^{10} C_{10}^{10}$ 的值吗? 有位同学求出它的值是 3^{10} , 你认为对吗? 请说出你的理由.



❁ 3. $(a+b)^n$ 实质上是一个二元函数 $f(a,b)$, 从函数的角度看, 你对二项式定理有怎样的认识? 试着将你的想法与老师和同学进行交流.



问题四

本学时学习中我们运用了什么样的研究问题的方法?

二项式定理的发现过程是培养我们的观察、分析、抽象、概括能力的好素材. 请回顾: 在本学时的学习中, 我们经历了怎样的研究过程? 在这一过程中, 我们都接触了哪些数学思想和研究方法? 通过这样的研究, 大家都有哪些收获和体会? 试着将自己的想法展示出来与老师和同学进行交流.



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题五

如何求二项展开式的某一项的二项式系数和这一项的系数?

阅读教材 p31 例 2 的有关内容, 思考并回答下列问题:

❁ 1. 你能自主完成教材 p31 的例 2 吗? 将你的解答与教材中的相比较, 你有怎样的发现?

❀ 2. 通过对教材例 2 的学习,你认为二项式的展开式中,项的系数和二项式系数有怎样的区别和联系? 你能举出一些例子加以说明吗?

❀ 3. 你认为解决二项展开式的相关问题的关键是什么? 需要注意哪些问题呢? 试着将你的想法与老师和同学进行交流.

❀ 展题设计

❀ 展题 1 在 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}\right)^{24}$ 的展开式中, x 的幂指数是整数的共有多少项?

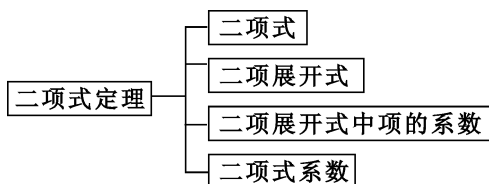
指导要求: 解决这类问题一般要从二项展开式的通项公式入手. 你能正确写出本题中二项展开式的通项公式吗? 对于指数幂的

运算,要细心一些,以防出错. 你如何找出展开式中 x 的幂指数是整数的项呢?

❀ 展题 2 求 $(1-x)^3(1+x)^{10}$ 的展开式中 x^5 的系数.

指导要求: 分析本题,它具有怎样的特点? 条件中的式子是二项式吗? 你如何解决非二项式的展开式问题? 你能尝试运用多种方法来解决本题吗?

归纳总结





板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 对于二项展开式 $(a-b)^{2n+1}$, 下列结论中成立的是 ()

- A. 中间一项的二项式系数最大
- B. 中间两项的二项式系数相等且最大
- C. 中间两项的二项式系数相等且最小
- D. 中间两项的二项式系数互为相反数

2. $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为 ()

- A. 10
- B. 20
- C. 40
- D. 80

3. (2019 · 浙江) 在二项式 $(\sqrt{2}+x)^9$ 的展开式中, 系数为有理数的项的个数是 _____.

4. (2019 · 天津) $\left(2x - \frac{1}{8x^3}\right)^8$ 的展开式中的常数项为 _____.

B. 能力提升

5. 若 $(1+\sqrt{2})^4 = a + b\sqrt{2}$ (a, b 为有理数), 则 $a+b$ 等于 ()

- A. 33
- B. 29
- C. 23
- D. 19

6. 若 $(x^2 - a)\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中 x^6 的系数为 30, 则 a 等于 ()

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. 1
- D. 2

7. $(x^2 + 2x + y)^5$ 的展开式中 $x^5 y^2$ 项的系数是 _____.

8. 在 $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})^{100}$ 的展开式中, 有理项的个数是多少?

C. 拓展创新

9. 在 $x(1-x)^k + x^2(1+2x)^8 + x^3(1+3x)^{12}$ 的展开式中, 含 x^4 项的系数是 144, 求 k 的值, 并求出含 x^2 项的系数.

10. 求 $\left(1+x+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ 的展开式中的常数项.

第二学时 “杨辉三角”与二项式系数的性质



板块一 创设问题, 引领目标

导入问题, 直指学时重点

问题呈现

你听说过“杨辉三角”吗? 它是我国古代重要的数学成就, 它的发现早于欧洲五百年左右, 它和勾股定理、圆周率的计算等其他成就一起, 显示了我国古代劳动人民卓越的智慧和才能. “杨辉三角”的具体内容是什么? 它揭示了怎样的规律呢? 相信通过本学时的学习, 你能够对它有清晰的认识.

材料链接

1. 二项式定理史略

宋代数学家贾宪有一部著作《黄帝九章算法细草》，其中有二项式系数表，即“开方作法本源”图。贾宪的书已失传，杨辉《详解九章算法》(1261)中征引了贾宪的材料，说明“出释锁算书，贾宪用此术”。之后元朝数学家朱世杰《四元玉鉴》(1303)的“古法七乘方图”也给出二项式系数，法国数学家帕斯卡(1623—1662)在他的著作《算术三角形专论》中给出二项式系数表，因此，欧洲把二项式系数表称作帕斯卡三角。

2. 二项式系数实质就是组合数。关于组合数的性质，我们在前面曾经通过研究得出结论：

$$① C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n;$$

$$② C_n^{n-m} = C_n^m;$$

$$③ C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}.$$



板块二 自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读



问题一

什么是“杨辉三角”？

阅读教材 p32、p33 的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 当 n 依次取 0, 1, 2, 3, 4, 5 时，观察 $(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数，你会有怎样的发现？试着与同学进行交流。

2. 当 n 依次取 0, 1, 2, 3, 4, 5 时，将 $(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数排列成“等腰三角形”，就得到了“杨辉三角”。它揭示了怎样的规

律呢？你能证明这个规律吗？你认为“杨辉三角”可以帮助我们解决怎样的问题呢？

3. 通过阅读教材，结合“材料链接”1，你是否对我国古代的数学成就感到自豪？类似的优秀成果你还知道哪些？试着与老师和同学交流一下吧！



问题二

二项式系数的性质有哪些？

阅读教材 p33、p34 的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 如果我们把 $(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数 C_n^r 看成以 r 为自变量的函数的话，这个函数具有怎样的特点？它与我们以前所研究的函数有什么不同？

2. 请你通过“杨辉三角”计算 $n=6$ 时的二项式系数，并画出 $f(r) = C_n^r$ (其中 $r=0, 1, 2, \dots, 6$) 的图象。由图象你能得到函数值怎样的分布特点？试着由此总结二项式系数的性质。

❁ 3. 二项式系数实质就是组合数,你知道组合数的哪些性质? 结合“材料链接”2,你能够证明这些性质吗?

自主测评

1. $(x+y)^{10}$ 的展开式中二项式系数的最大值是 _____.
2. $C_{64}^1 + C_{64}^3 + \cdots + C_{64}^{63} =$ _____.
3. $C_{12}^5 + C_{12}^6$ 等于 ()
- A. C_{13}^5 B. C_{13}^6
C. C_{13}^{11} D. C_{12}^7



板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力

问题三

在本学时的学习中,我们使用了哪些研究问题的方法? 涉及怎样的数学思想方法?

在本学时的探究中,你经历了怎样的思维活动? 接触了怎样的数学思想? 试着将你的体验和感受展示出来,与老师和同学进行交流.



板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力



问题四

如何利用“赋值法”解决有关二项展开式的问题?

❁ 1. 你能自主完成教材 p34 的例 3 吗? 将你的解法与教材中的相比较,你会有怎样的发现?

❁ 2. 教材例 3 的证明采取了什么方法? 其中体现了怎样的数学思想方法?

❁ 3. 实际上,在二项式定理中, a, b 既可以取任意实数,也可以是任意多项式,我们可以根据具体问题的需要选取 a, b 的值. 其本质是将二项式 $(a+b)^n$ 看成一个二元函数,即 $f(a, b) = (a+b)^n$. 通过对这里的变量 a 和 b 赋值,你还能得到二项式系数的哪些性质呢? 尝试一下,并将你的研究成果和同学进行交流.

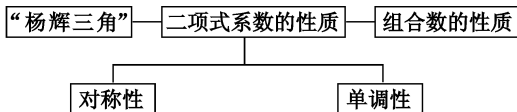
展题 1 求 $(1+x)^3 + (1+x)^4 + \cdots + (1+x)^n$ 的展开式中 x^2 的系数.

指导要求: 上式中一共有多少个二项式? 你能分别求出它们的展开式中 x^2 的系数吗? 该如何求这些系数之和呢? 它涉及二项式系数的哪一性质?

展题 2 已知 $(1-2x)^{2020} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2020}x^{2020}$, 求:

- (1) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020}$ 的值;
- (2) $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2018} + a_{2020}$ 的值.

指导要求: 根据本学时所学知识和本题的特点, 你认为采用什么方法解决此题比较合适? 分析所求式子与二项式相应的函数值之间的关系, 你可以通过给 $(1-2x)^{2020}$ 中的 x 赋哪些值来求(1)(2)中式子的值?



分级设题, 精选精练

A. 基础巩固

1. 已知 $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 2^3C_n^3 + \cdots + 2^nC_n^n = 729$, 则 $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n$ 等于 ()

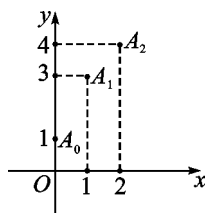
- A. 63
- B. 64
- C. 31
- D. 32

2. 在 $\left(x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中, 各项系数和与二项式系数和之比为 32:1, 则 x^2 的系数为 ()

- A. 50
- B. 70
- C. 90
- D. 120

3. 设 $a \neq 0$, n 是大于 1 的自然数, $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^n$ 的展开

式为 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. 若点 $A_i(i, a_i)$ ($i=0, 1, 2$) 的位置如图所示, 则 a



= _____.

4. 化简: $C_m^7 - C_{m+1}^8 + C_m^8$.

B. 能力提升

5. 记 $(2-x)^7 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_7(1+x)^7$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_6$ 的值为 ()

- A. 1
- B. 2
- C. 129
- D. 2 188

6. 设 $a \in \mathbb{Z}$, 且 $0 \leq a < 13$. 若 $53^{2020} + a$ 能被 13 整除, 则 a 等于 ()

- A. 0 B. 1
C. 11 D. 12

7. 若 $(2x+3)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则

- (1) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$ _____;
(2) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$ _____;
(3) $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2 =$ _____.

8. 已知 $(1-2x)^{2\ 020} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2\ 020}x^{2\ 020}$ ($x \in \mathbf{R}$), 求 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{2\ 020}}{2^{2\ 020}}$ 的值.

10. (1) 求 $7C_6^3 - 4C_7^4$ 的值.

(2) 设 $m, n, k \in \mathbf{N}^*$, $n \geq k \geq m$, 求证:

① $(k+1)C_k^m = (m+1)C_{k+1}^{m+1}$;

② $(m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + nC_{n-1}^m + (n+1)C_n^m = (m+1)C_{n+2}^{m+2}$.

C. 拓展创新

9. 已知 $\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right)^n$ 的展开式中第 10 项的系数最大, 求 n 的值.



第一章学习报告

请根据自己对本章内容的学习和体会, 列出本章内容主要涉及的知识点、公式、图象、方法等, 并通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“书面表达”等方式将你所列出的内容系统化. 要注意和别的同学多交流, 并及时记录下其他同学的优点, 补充完善自己的不足之处.

指导要求: 阅读教材 p38、p39 的有关内容, 思考下列问题, 在此基础上建立更全面的符合你的学习过程的“知识网络图”或“思维导图”.

❀ 1. 你认为分类加法计数原理和分步乘法计数原理的根本区别是什么呢? 在应用中各应该注意什么问题? 当学习完排列组合后, 你是否已经体会到了两个基本原理在解决计数问题时所起的重要作用? 请与老师和同学谈谈你的体会.

❀ 2. 你如何区分排列问题与组合问题？它们之间又有怎样的联系？排列与组合的不同点以及相互之间的联系，在公式 $A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$ 中是怎样体现的？

❀ 3. 这一章我们解决了大量的有关排列组合的应用问题，请你试着对排列组合应用题的类型和解题方法进行小结.

❀ 4. 你如何利用分步乘法计数原理计算 $(a+b)^n$ 的展开式中的系数？二项式系数 $C_n^r = f(r)$ ($0 \leq r \leq n, r \in \mathbf{N}$) 是 r 的函数，请用函数的语言叙述 C_n^r 的性质.

❀ 5. 应用二项展开式的通项公式可以解决哪些问题？解题时需要注意什么呢？你常犯的错误有哪些？试着将它们总结出来并与老师和同学进行交流.

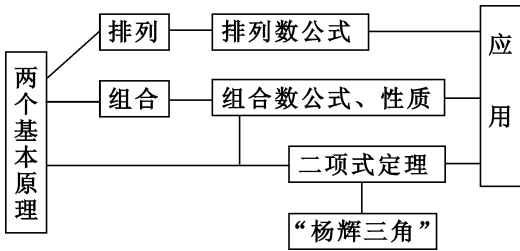
❀ 6. 分类加法计数原理和分步乘法计数原理与数的加法和乘法运算有怎样的关系？利用计数原理解决计数问题一般需要经过怎样的步骤？其中体现了怎样的思维过程？

❀ 7. 排列数和组合数公式你是否能够熟练应用？ A_n^m 和 C_n^m 既是一种复杂乘法的简单记法，又体现出一种思维的“减缩”. 有了它们，在遇到排列组合的模型时，我们可以不必退回到计数原理去思考. 在数学中，这种将常见问题模式化的方法是极有特点的，你是否体会到了它给解决问题带来的便捷？

8. 推导组合数公式时,我们利用了“算两次”的方法,你对这种方法有怎样的认识? 你能举出一些这方面的例子吗?

9. 在研究二项式系数的性质时我们用到了“函数思想”,无论是将 C_n^r 看作是 r 的函数,还是将 $(a+b)^n$ 看作是关于 a, b 的二元函数,都是从变量中寻找有用的规律,这是我们要培养的一种能力. 关于这方面你还有什么体会? 试着与老师和同学进行交流.

10. 本章所研究内容的基本框架如图所示:



你能进一步细化、充实它吗? 相信你一定能行,把你的成果展示出来吧!



数学探究活动

体验数学研究的过程和创造的激情

数学探究

说明:

1. 本章探究活动容量较大,探究时间可能会比较长. 如果时间不充裕,可以从 6 个问题中选择其中的一部分进行探究.

2. 在背景介绍中,每个计算公式都有提示或推导证明过程,但还是希望同学们先自行探究或小组讨论一下. 其中有个别问题和

例题难度较大,建议多人合作探讨,如果感觉实在太难则可参看答案.

一、探究问题

丰富多彩的排列组合问题

二、背景介绍

我们从一个问题谈起:有 10 人,他们在饭店围在一张圆桌上吃饭,最后结账的时候,他们问饭店老板是否有优惠方案. 老板想了想,说:“这样吧,你们记住这次吃饭时的就座

顺序,以后你们每次来都必须改变一种次序,直到有一天,你们10个人把所有的顺序都坐遍了,从那个时候起,我就会永远免费招待你们。”大家都觉得这个方案不错,于是之后经常光顾那家饭店.可是没过多久他们就发现想要把所有的顺序坐完一遍好像挺困难.亲爱的同学,你知道他们得光顾多少次才能把所有的顺序坐完吗?答案是362 880次!如果1年按365天计算,每天他们去该饭店3次,那么要331.4年才能坐完所有的顺序.

这个问题属于环形排列问题.环形排列和我们在教材上见到的直链排列有所不同,在环形排列中,如果看上去不一样的两种排列方式经过适当的旋转后可以重合,那么认为它们是同一个排列.例如,4个元素 a, b, c, d 排成直链时, $abcd, bcda, cdab, dabc$ 是4种不同的排列,但如果将它们各自首尾相接绕成一圈,就成同一种环形排列了.你能根据以上的例子推测出(或推导出)环形排列的计算公式吗?即将 n 个不同的元素排成一个圆环,共有多少种不同的排列方式?

事实上,排列组合问题包括很多种不同的形式,教材上只是给我们介绍了最基本的一种:相异元素的直链排列组合问题.下面我们通过例子介绍六种常见类型的排列组合问题.

❀ 1. 相异元素不允许重复的直链排列组合

这种问题是最基本的,教材上已有很全面的介绍,这里我们仅看一个例子.

【例1】甲、乙两队各出7名队员,按事先排好的顺序出场参加围棋擂台赛,双方先由1号队员比赛,负者被淘汰,胜者再与负方2号队员比赛,直到有一方队员全被淘汰为止,另一方获得胜利,形成一种比赛的过程,那么所有可能出现的比赛过程的种数为_____.

解:把甲、乙双方队员分别记作 $A_1,$

$A_2, \dots, A_7; B_1, B_2, \dots, B_7$. 每一个比赛过程对应着这14个元素的一个排列,且满足 A_i 的下标从左至右是递增的, B_i 的下标从左至右也是递增的.由于从14个位置中取出7个来,“有序”地排上 $A_1, A_2, \dots, A_7$,有 C_{14}^7 种方法;而剩下的7个位置“有序”地排上 $B_1, B_2, \dots, B_7$,只有1种排法.所以问题的实质是从14个不同元素中取出7个的组合数,得 $C_{14}^7 = 3\,432$ 种.

❀ 2. 相异元素不允许重复的环形排列

从 m 个不同的元素中取出 k 个,按照一定的顺序排在一个封闭曲线上,叫做环形排列(或循环排列、圆排列),其计算公式为

$$f(m, k) = \frac{A_m^k}{k}.$$

因为每一个环形排列 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ 对应(剪开,拉直)着 k 个直链排列:

$$a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k, a_2 a_3 \cdots a_k a_1, \dots, a_k a_1 \cdots a_{k-2} a_{k-1}.$$

反之,上面的 k 个直链排列(首尾相连)对应着同一个环形排列.因为从 m 个不同的元素中取出 k 个组成的直链排列有 A_m^k 个,因此环形排列数为 $f(m, k) = \frac{A_m^k}{k}$.

【例2】平面内有6个点,每3点都不在同一条直线上,以这些点为顶点可以连接多少条含4条线段的折线?若(1)折线是封闭的;(2)折线是不封闭的.

解:(1)含有4条线段的封闭折线必有4个顶点,按其不同顺序可以组成不同的4条线段的折线,这正好是一个环形排列问题,但是不分正、逆顺序,因此封闭折线共有

$$\frac{1}{2} f(6, 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_6^4}{4} = 45(\text{条});$$

(2)含有4条线段的不封闭折线必有5个顶点,这是从6个元素中取5个的直链排列问题,但是不分正、逆顺序,因此不封闭折线有 $\frac{1}{2} A_6^5 = 360(\text{条})$.

3. 相异元素允许重复的排列

从 m 个不同的元素中允许重复地取出 k 个元素,按照一定顺序排成一列,称为 m 个相异元素允许重复的 k 元排列,其计算公式为 $U(m, k) = m^k$.

【例 3】已知集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$,问可以建立多少个从 A 到 B 的映射?

解: A 中的每一个元素都可以对应 B 中的任意一个元素构成映射,均有 m 种方法.

由乘法原理可知,映射的个数为 m^k .

4. 相异元素允许重复的组合

从 m 个不同的元素中允许重复地取出 k 个元素,不管以怎样的顺序并成一组,称为 m 个相异元素允许重复的 k 元组合,其计算公式为 $F(m, k) = C_{m+k-1}^k$.

从 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 中,每次取出 k 个元素的可重复组合列举如下表:

a_1	a_1	$\cdots$	a_1	a_1
a_1	a_1	$\cdots$	a_1	a_2
a_1	a_1	$\cdots$	a_1	a_3
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{m-1}	a_m	$\cdots$	a_m	a_m
a_m	a_m	$\cdots$	a_m	a_m

将其各列的下标分别加上 $0, 1, 2, \dots, k-1$ 就变成了下表:

a_1	a_2	$\cdots$	a_{k-1}	a_k
a_1	a_2	$\cdots$	a_{k-1}	a_{k+1}
a_1	a_2	$\cdots$	a_{k-1}	a_{k+2}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{m-1}	a_{m+1}	$\cdots$	a_{m+k-2}	a_{m+k-1}
a_m	a_{m+1}	$\cdots$	a_{m+k-2}	a_{m+k-1}

这样,问题就转化为 $(m+k-1)$ 个相异元素的不重复组合. 故得 $F(m, k) = C_{m+k-1}^k$.

【例 4】将 k 本同样的书放入 m 个不同的抽屉中,每个抽屉所放书的本数不限,有多少种不同的方法?

解法 1 (公式法): 此问题相当于是从 m 个抽屉中,允许重复地抽取 k 个,然后依次放入每一本书. 因此直接代入公式,可得不同的放法共有 C_{m+k-1}^k 种.

解法 2 (隔板法): 设第 i 个抽屉中所放的书有 x_i 本 ($i=1, 2, \dots, m, x_i \geq 0$), 于是有

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = k.$$

作变换 $y_i = x_i + 1$ ($i=1, 2, \dots, m$), 则有

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_m = k + m, y_i \geq 1 (i=1, 2, \dots, m).$$

①

于是问题转化成了求方程①的正整数解的组数.

我们把方程右边的 $k+m$ 看成 $(k+m)$ 个 1 相加,这样,只要在这些相同的 1 之间放入 $(m-1)$ 个“隔板”,就可以将它们分成 m 组,然后每个组内求和,分别对应成 y_i ,即可得到一组 $y_1, y_2, \dots, y_m$ 的正整数解. 而 $(k+m)$ 个 1 之间的空隙有 $(k+m-1)$ 个,因此方程的正整数解的组数就等于从 $(k+m-1)$ 个空隙中选取 $(m-1)$ 个放入“隔板”的不同的放法种数. 于是答案为 $C_{k+m-1}^{m-1} = C_{k+m-1}^k$.

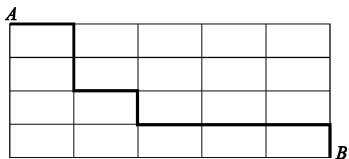
5. 不尽相异元素的全排列

设 m 个元素中有 n_1 个 a_1, n_2 个 $a_2, \dots, n_k$ 个 a_k , 且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = m$, 则这 m 个不尽相异元素的全排列数是 $\frac{m!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

我们可以这样证明这个公式. 设 m 个不尽相异元素的全排列数为 x , 在每一个排列里,把 n_i 个 a_i 看成是各不相同的元素再进行排列,可得 $n_i!$ 种不同的排列,由乘法原理,

得 $x n_1! n_2! \cdots n_k! = m!$, 即 $x = \frac{m!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

【例5】某城有6条南北走向的街道,5条东西走向的街道,如图所示.如果有人从城西北角A点走到东南角B点,那么最短的走法有多少种?



解法1(公式法):在每条最短路径中(如图中加粗线所示即为一条最短路径),人到达任何一个街道交汇点时,必须是向南走或向东走,并且全程是向南4次,向东5次.这样每条最短路径唯一对应着一个由4个“南”字和5个“东”字的全排列数,为 $\frac{(4+5)!}{4! \times 5!} = 126$.

解法2(直链排列组合):前面想法类似于解法1,每一种最短路径对应着一个由4个“南”字和5个“东”字按先后顺序组成的行进方案.这样,又相当于是在一行9个空格里填写4个“南”字和5个“东”字,挑选4个格子写“南”共 C_9^4 种方法,剩余的5个格子里填“东”只有1种方法.故最短走法有 $C_9^4 = 126$ (种).

✿ 6. 不尽相异元素的组合

从 n 个不尽相异元素中取出 k 个的组合数,有一个构造型的求法:设 n 个元素中有 α 个相同元素 a_1 ,有 β 个相同元素 $a_2, \dots, \gamma$ 个相同元素 a_m ($\alpha + \beta + \dots + \gamma = n$),则取 k 个元素的组合数与下列乘积中的 x^k 的系数相同:

$$(1+x+\dots+x^\alpha)(1+x+\dots+x^\beta)\dots(1+x+\dots+x^\gamma).$$

【例6】有10本书,其中4本是相同的数学书,3本是相同的语文书,2本是相同的英语书,1本是词典.现从中取出4本,有多少种不同的取法?

解法1(分类讨论):分5种情况讨论.

① 4本书全部相同,有1种(全是数学

书);

② 3本相同,另1本不同,有 $C_2^1 C_3^1 = 6$ 种;

③ 2类书,各2本,有 $C_3^2 = 3$ 种;

④ 3类书,其中某类2本,其余各1本,有 $C_3^1 C_3^2 = 9$ 种;

⑤ 4类书,各1本,有1种.

总计 $1+6+3+9+1=20$ 种.

解法2(构造法):乘积

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x). \quad \text{①}$$

①式中的 x^4 是这样构成的: $x^{l_1} x^{l_2} x^{l_3} x^{l_4} = x^4$ ($l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 4$). 其中 l_i 取自第 i 个因式,解释为数学书取 l_1 本,语文书取 l_2 本,英语书取 l_3 本,词典取 l_4 本.这样,展开式中每个 x^4 的系数就与4类书的取法构成一一对应关系, x^4 的系数就是书的取法数.展开①式,得

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+3x+5x^2+6x^3+5x^4+3x^5+x^6),$$

其中 x^4 的系数为 $1+3+5+6+5=20$.

三、操作步骤

✿ 1. 请阅读背景介绍中的引入问题,即10个人围着圆桌吃饭的问题,你知道结果中的数据是怎样计算出来的吗?

✿ 2. 在例4的解法2(隔板法)中,作变换 $y_i = x_i + 1$ ($i=1,2,\dots,m$),你知道这样做的目的是什么吗?

✿ 3. 通过背景介绍,我们可以发现排列组合问题种类丰富,因此在解决这类问题的时候,首先就是要分析清楚题目的类型.

下面列举了一些问题,请判别它们的类型并求出答案.

(1) 设集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, k\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ ($k \leq m$),建立从 A 到 B 的映射 f ,使 f 是递增的,则这样的 f 共有多少个?

(2) 将3封信投入4个不同的信箱,则不同的投法共有多少种?

(3)把 10 个彼此不同的珠子穿成一条项链,有多少种不同的穿法?

(4)将 10 个人平均分成两组,再从每组各选举正、副组长各 1 人,则不同的选法共有多少种?

(5)求自然数 $1 \sim 1\,000$ 的各位数字之和.

(6)有 n 个匣子,每个匣子有一把钥匙,各匣子的钥匙不能通用. 现在随意在每一个匣子内放入一把钥匙,然后把匣子全部锁上. 如果允许砸开一个匣子,试问有多少种放法可以使得一旦砸开一个匣子,就可以相继用钥匙打开所有的匣子?

(7)方程 $x+y+z+w=27$ 的正整数解共有多少组?

四、成果报告

通过探究活动,你接触到了更多的排列组合问题,你对解排列组合题目的思想、方法或步骤有何心得体会? 写一篇小论文,然后记得跟同学们交流分享哦!

五、延伸思考

在生活中,各种各样的排列组合问题无处不在,你还能找到其他有关的问题吗? 除了背景介绍里的六大类问题,你还能找到其他类型的排列组合问题吗?

第一章综合测试

(时间:90 分钟 满分:100 分)

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 从甲地到乙地每天有火车 10 班、汽车 15 班、飞机 3 班、轮船 2 班.一天内乘不同班次的运输工具由甲地到乙地,不同的走法有

- A. 10 种 B. 20 种
C. 30 种 D. 40 种

2. 4 名学生报名参加地理探宝、人与自然、航模课外兴趣小组,每人选报一种,则不同的报名种数有

- A. 3^4 B. 4^3
C. 12 D. 4

3. $4 \times 5 \times 6 \times 7 \times \cdots \times (n-1) \times n$ 等于

- A. A_n^{n-4} B. A_n^{n-3}
C. $n! - 4!$ D. $\frac{n!}{4!}$

4. 在航天员进行的一项太空实验中,要先后实施 6 个程序,其中程序 A 只能出现在第一步或最后一步,程序 B 和 C 在实施时必须相邻,则在该实验中程序顺序的编排方法共有

- A. 34 种 B. 48 种
C. 96 种 D. 144 种

5. 将 2 名教师、4 名学生分成 2 个小组分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动,每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成,则不同的安排方案共有

- A. 12 种 B. 10 种

- C. 9 种 D. 8 种

6. 将标号为 1,2,3,4,5,6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中.若每个信封中放 2 张,其中标号为 1,2 的卡片放入同一个信封,则不同的放法共有

- A. 12 种 B. 18 种
C. 36 种 D. 54 种

7. 已知 $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ 的二项式系数之和等于 128,那么其展开式中含 $\frac{1}{x}$ 项的系数是

- A. -84 B. -14
C. 14 D. 84

8. $(x^2 + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\right)^5$ 的展开式的常数项是

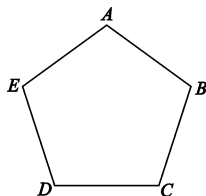
- A. 5 B. -10
C. -32 D. -42

9. 用数字 0,1,2,3,4,5 组成没有重复数字的五位数,其中比 40 000 大的偶数共有

- A. 144 个 B. 120 个
C. 96 个 D. 72 个

10. 如图,在正五边形 ABCDE 中,若把顶点 A、B、C、D、E 染上红、黄、绿三种颜色中的一种,使得相邻顶点所染颜色不同,则不同的染色方法共有

- A. 30 种 B. 27 种



C. 24 种

D. 21 种

二、填空题(本大题共 8 小题,每小题 3 分,共 24 分)

11. $7^{11} + C_{11}^1 \times 7^{10} + \cdots + C_{11}^{10} \times 7$ 被 9 除所得的余数为_____.

12. 计算: $C_3^0 + C_4^1 + C_5^2 + C_6^3 + \cdots + C_{10}^7 =$ _____.

13. 有 10 件不同的电子产品,其中有 2 件产品运行不稳定.技术人员对它们进行一一测试,直到 2 件不稳定的产品全部被找出后结束测试,则恰好测试 3 次就结束测试的情况有_____种.

14. 10 件产品中有 7 件正品、3 件次品,从中任取 4 件,则恰好取到 1 件次品的概率是_____.

15. 用 1,2,3,4,5 组成无重复数字的五位数.若用 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 分别表示五位数的万位、千位、百位、十位、个位上的数字,则出现 $a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5$ 特征的五位数的概率为_____.

16. 令 $S = C_{27}^1 + C_{27}^2 + \cdots + C_{27}^{27}$, 则 S 除以 9 的余数为_____.

17. 某亲子节目制作组选取了 6 户家庭到 4 个村庄体验农村生活.要求将 6 户家庭分成 4 组,其中 2 组各有 2 户家庭,另外 2 组各有 1 户家庭,则不同的分配方案的总数是_____.

18. 将正方形的每条边 4 等分,取分点为顶点可画出_____个三角形.

三、解答题(本大题共 5 小题,共 46 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或推演步骤)

19. (本小题满分 8 分)

求证: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

20. (本小题满分 8 分)

在甲、乙等 6 个单位参加的一次演出活动中,每个单位的节目集中安排在一起,若采用抽签的方式随机确定各单位的演出顺序(序号为 1,2,⋯,6),求:

(1)甲、乙两单位的演出序号均为偶数的概率;

(2)甲、乙两单位的演出序号不相邻的概率.

21. (本小题满分 10 分)

在 $(3x - 2y)^{20}$ 的展开式中,求:

(1)二项式系数最大的项;

(2)系数绝对值最大的项.

(用式子作答)

22. (本小题满分10分)

已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素, $A \cap B$ 含有 4 个元素, 试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数.

(1) $C \subseteq (A \cup B)$, 且 C 中含有 3 个元素;

(2) $C \cap A \neq \emptyset$.

23. (本小题满分10分)

从 $-1, 0, 1, 2, 3$ 中选三个(不重复)数字组成二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的系数.

(1) 开口向上且不过原点的不同抛物线有多少条?

(2) 与 x 轴的正、负半轴均有交点的不同抛物线有多少条?

(3) 与 x 轴的负半轴至少有一个交点的不同抛物线有多少条?