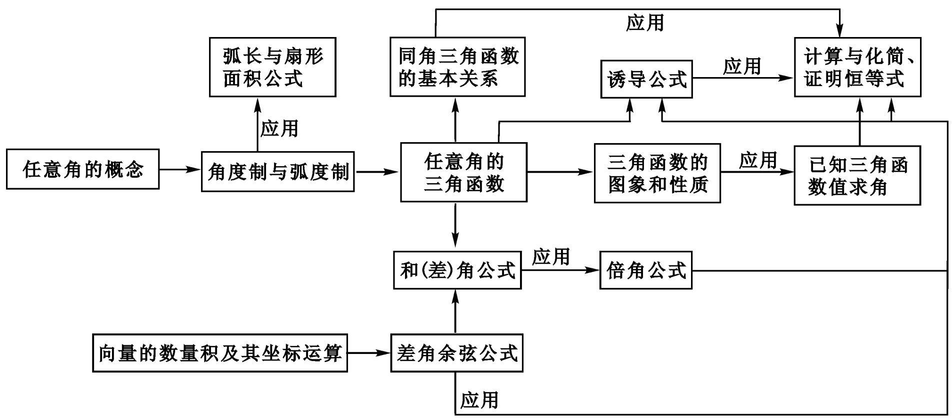
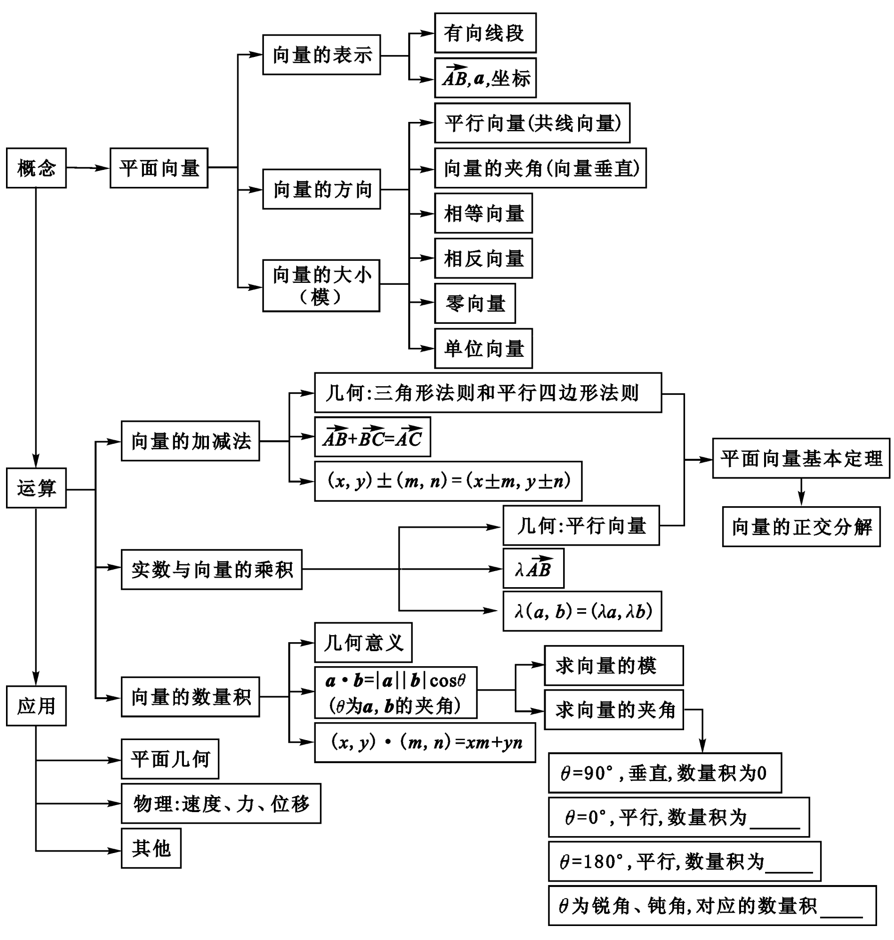
模块整体感悟

模块知识梳理





学法点拨

1. 加深对数学与实践关系的认识

三角函数、向量都是刻画现实世界某些现象的重要数学模型. 周期变化现象在现实中大量存在,如音乐的旋律、波浪、昼夜的交替、潮汐、钟摆的运动、交流电等,这些现象都可以用三角函数来描述. 实际上,三角函数的产生、发展与解决具有周期性变化规律的问题的需要密切相关. 力、速度、位移等也是实际生活中所常见的,它们是向量的实际背景,也是向量描述的对象. 因此,三角函数、向量的学习能使大家加深认识数学与实践的紧密联系,通过用三角函数、向量解决实际问题的实践体会数学的作用和价值,学习用数学的观点看待和处理日常生活以及其他学科的问题的方法.

2. 认识数学内容的联系性,学习数学研究的方法

三角函数与《数学 1》中的函数概念有着特殊与一般的关系,三角函数的研究以一般函数概念及其研究方法为指导,同时三角函数的学习可以加深对函数概念的理解. 三角函数及其性质与圆及其性质有着直接的联系,三角函数的研究很好地体现了数形结合思想. 在三角函数的研究中,借助单位圆进行几何直观分析是非常重要的手段,而且这也是学会数形结合地思考和解决问题的好机会.

向量既是代数的对象,又是几何的对象,它是沟通代数、几何及三角函数的桥梁. 向量是处理数学及现实问题的有效工具. 在本模块中,在向量之后安排三角恒等变换,让大家经历用向量工具推导两角差的余弦公式的过程,其目的就是为了让大家体会向量的这种作用,进而使大家体会向量与三角函数的联系、数与形的联系等.

总之,通过本模块的学习,大家可以从三角函数及其性质与圆及其性质的联系,向量与代数、几何以及三角函数的联系,和(差)公式及倍角公式之间的联系等,体会不同数学知识在内容与方法上的联系性,学习数学中发现问题、提出问题和解决问题的基本方法.

3. 发展运算能力和推理能力

作为代数对象,向量可以进行运算. 大家已经熟悉数与式的运算,这里又将运算发展到向量运算,这是运算的一次飞跃.

与代数恒等变换一样,三角恒等变换也是“只变其形不变其质”的,变换的目的在于揭示那些形式不同但实质相同的三角函数式的内在联系,通过简化三角函数式的表现形式而认识其本质. 在三角恒等变换中,大家可以通过探求和(差)角公式、倍角公式,以及运用这些公式推导和差化积、积化和差、半角公式等的实践,学习怎样预测变换目标、选择变换、设计变换途径等.

第一章　三角函数

本章学习先知

先行一步，步步先行

内容概要

三角函数是描述客观世界中周期性变化规律的重要数学模型，在数学和其他领域中具有重要作用，它是高中阶段学习的又一类重要的基本初等函数. 在本章中，首先引进任意角的概念，通过弧度制，使得角与实数建立了一一对应关系. 借助单位圆理解任意角的三角函数的定义，根据三角函数的定义推导同角三角函数关系式和诱导公式，它们是三角恒等变换的重要基础，在求值、化简三角函数式和证明三角恒等式等问题中经常用到. 然后以三角函数线为工具，作出正弦函数和余弦函数的图象，介绍用“五点法”作其图象的方法，借助图象归纳正弦函数、余弦函数的性质，进而研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 与 $y=\sin x$ 图象的关系，简要地介绍正切函数的图象和性质. 最后通过实例，用三角函数解决一些简单的实际问题，体会三角函数是描绘周期性变化现象的重要函数模型.

《课程标准》要求

内容标准		学习要求
任意角、弧度	了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化.	1. 从实际问题情境中认识角的概念推广的必要性，知道正角、负角和零角的概念. 2. 初步学会在平面直角坐标系中讨论任意角，并能熟练写出与已知角终边相同的角的集合. 3. 了解弧度也是一种度量角的单位，能够进行弧度制和角度制的互化. 4. 能运用角度制和弧度制下扇形的弧长公式和面积公式进行简单的计算.

（续表）

内容标准		学习要求
三角函数	1. 借助单位圆理解任意角的三角函数(正弦、余弦、正切)的定义.	1. 理解利用单位圆定义任意角的三角函数(正弦、余弦、正切)的意义,能根据角的终边上任意一点的坐标求出这个角的正弦、余弦和正切值.熟记特殊角的正弦、余弦、正切值. 2. 根据定义理解“终边相同的角的同一三角函数值相等”,并利用这个结论,把求任意角的三角函数值转化为求 $0\sim2\pi$ 角的三角函数值. 3. 会根据三角函数的定义判断正弦、余弦、正切函数值在各个象限的符号. 4. 能利用与单位圆有关的有向线段将任意角的正弦、余弦、正切函数值用几何形式表示.
	2. 借助单位圆中的三角函数线推导出诱导公式$\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\ \pi\pm\alpha\right.$ 的正弦、余弦、正切$\left.\right)$,能画出 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 的图象,了解三角函数的周期性.	1. 利用单位圆的对称性和三角函数的定义探究 $\pi\pm\alpha$, $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 的正弦、余弦、正切与 α 的相应三角函数之间的关系,揭示诱导公式的本质. 2. 能利用诱导公式将任意角的三角函数转化为锐角的三角函数,体现化归思想. 3. 能利用诱导公式进行简单三角函数式的求值、化简和证明. 4. 通过实例直观感知正弦函数、余弦函数的图象,在此基础上利用正弦线作出正弦函数的图象,再以正弦函数的图象为基础,利用诱导公式,通过图形变换得到余弦函数的图象.能用“五点法”作出简单函数的图象. 5. 能利用正切线作出正切函数的图象,并能够分析它与正弦函数、余弦函数图象的联系与区别. 6. 通过分析三种函数的图象特征,初步认识正弦函数、余弦函数和正切函数是周期函数,体会三角函数是刻画周期现象的重要模型,并了解周期函数的有关概念. 7. 会根据周期函数的定义,求形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$, $y=A\cos(\omega x+\varphi)$, $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的函数的周期,通过观察周期与自变量的系数的关系,归纳得出公式.

（续表）

内容标准		学习要求
三角函数	3. 借助图象理解正弦函数、余弦函数在$[0,2\pi]$上，正切函数在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的性质（如单调性、最大值和最小值、图象与$x$轴的交点等）.	1. 能根据图象感知函数$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$的单调性，并能写出它们的单调区间. 会求形如$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$，$y=A\tan(\omega x+\varphi)$的函数的单调区间. 能利用函数$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$的单调性比较三角函数值的大小. 2. 能借助$y=\sin x$，$y=\cos x$的图象得出其最大值和最小值，会求形如$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的函数的最大值和最小值. 3. 会求形如$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$，$y=A\tan(\omega x+\varphi)$的函数图象与$x$轴的交点坐标. 4. 了解正弦函数、余弦函数和正切函数的奇偶性，能判断简单函数的奇偶性，能利用奇偶性的概念解决简单问题. 5. 利用函数图象的直观性，通过观察图象获得对函数性质的认识，强化数形结合的思想，这是研究数学问题的常用方法.
	4. 理解同角三角函数的基本关系式：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$.	1. 经历由三角函数的定义获取同角三角函数（$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$）两个基本关系式的过程. 2. 能利用基本关系式由$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$中某一个值求出其余两个值. 3. 会利用基本关系式证明简单的三角恒等式，在解决问题的过程中提炼基本方法.
	5. 结合具体实例了解$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的实际意义；能借助计算器或计算机画出$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象，观察参数$A,\omega,\varphi$对函数图象变化的影响.	1. 能用“五点法”作出函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的简图. 2. 会利用计算器或计算机分别作出$y=A\sin x$与$y=\sin x$，$y=\sin\omega x$与$y=\sin x$，$y=\sin(x+\varphi)$与$y=\sin x$的图象，认识$A,\omega,\varphi$对函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变化的影响，能够用语言描述从$y=\sin x$的图象经过图象变换得到$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象的具体过程. 3. 引导学生运用类比的方法探究函数$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的图象，研究图象变换的规律和用“五点法”作图的关键.
	6. 会用三角函数解决一些简单的实际问题，体会三角函数是描述周期性变化现象的重要函数模型.	1. 根据学生的生活经验，创设丰富的情境，使学生体会三角函数的模型作用. 2. 能从周期性变化的实际问题中建立与三角函数有关的数学模型，并能利用数学模型解决实际问题（有些实际问题需要通过观察散点图并进行函数拟合而建立具体的函数模型，进而应用它解决实际问题，体现数学知识的价值）.

学法指导

三角函数是中学数学的重要内容之一，它的基础主要是几何中的相似和圆，它的研究方法主要是代数中的式子变形和图形分析，它的研究已经初步把几何与代数联系起来了。高等数学、物理学、天文学、测量学及其他各种应用学科，都要经常用到三角函数及其性质。

1. 注重模型思想

本章的学习要始终突出三角函数作为描述周期性变化规律的数学模型这一本质，即通过现实世界的周期现象，在大家充分感受引入三角函数必要性的基础上，学习三角函数的概念，研究三角函数的基本性质，并用三角函数的基础知识解决一些实际问题。

2. 用联系的观点学习新知识

在讨论三角函数及其性质时，大家要注意用《数学 1》中获得的函数概念及其思想方法作指导，与自己在《数学 1》中建立的关于函数性质的已有经验联系起来，这对大家把握三角函数基本性质的讨论方向是非常有用的。正弦、余弦、正切函数是基本的三角函数，要熟练掌握其图象和性质（定义域、值域、最大值、最小值、周期性、单调性、奇偶性等），从而达到灵活应用的目的。

3. 在运用中强化对公式的理解

本章三角公式较多，对学过的公式要做到真正理解、记准、记熟、用活；解决问题究竟使用哪一个（或哪几个）公式，要抓住问题的实质，善于联想。在熟练掌握概念、公式的基础上，要不断地总结解题规律、变形的方法与技巧，提高综合解答问题的能力。

1.1　任意角和弧度制

第一学时　任意角

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

小明买了一块手表，手表的时间比标准时间快 10 分钟，应如何校准？如果是慢 10 分钟，又应如何校准？

还有我们熟悉的体操运动员旋转的角度、自行车车轮旋转的角度、螺丝扳手旋转的角度等等，应该怎样理解这些角度？挂在墙上的钟表、戴在腕上的手表，更是为我们展示了角的形象。

那么数学上是如何刻画角的呢？将要学习的知识与我们在小学和初中学习的知识又有怎样的联系呢？

材料链接

1. 我们在初中和小学学过有关角的定

义：具有公共端点的两条射线组成的图形叫做角.这个公共端点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的两条边.一个角可以看作平面内一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.所旋转射线的端点叫做角的顶点，开始位置的射线叫做角的始边，终止位置的射线叫做角的终边.

2.在初中和小学，我们将角分为锐角、直角、钝角、平角、周角等几种.

3.我们还学习了两个角的关系：

余角和补角：若两角之和为 90°，则两角互为余角；若两角之和为 180°，则两角互为补角.

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

什么是任意角?

请阅读教材 p2、p3“探究”栏目之前的内容，完成教材 p2“思考”中的问题，思考并回答下列问题：

1.角的概念中关键的动词是“旋转”，据此举出一些旋转超过一周的例子.

2.根据旋转方向的不同，角可以分为哪几类？分别是什么？这种分类类比了什么？

3.在直角坐标系中研究角，其顶点和始边的位置是如何规定的？根据其终边位置的不同，又可以把角分为哪几类？

问题二

如何表示终边相同的角?

阅读教材 p3“探究”栏目至 p4 例 1 之前的内容，思考并回答下列问题：

1.所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，怎样用一个式子表示出来？

2.请大家分别写出第一、二、三、四象限角的集合.

问题三

任意角有哪些方面的应用?

阅读教材p4、p5的有关内容,自主完成教材例1、例2、例3,思考并回答下列问题:

1. 在例1中,你是如何找到$129°48'$角的?

2. 类比教材例2,写出满足下列条件的角的集合.

(1)终边在x轴上的角的集合M;

(2)终边在坐标轴上的角的集合N.

3. 教材例2中的集合S与上个问题中的集合M,N间有何关系?

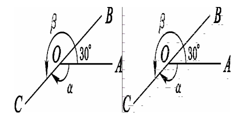
自主测评

1. 在直角坐标系中作出下面各角,并指出它们是第几象限角.

(1)$240°$; (2)$-60°$;

(3)$420°$; (4)$-230°$.

2. 在下图中,



(1)$\alpha=$________;

(2)$\beta=$________.

3. 与$35°$角终边相同的角是 ( )

A. $-45°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}$

B. $-325°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}$

C. $325°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}$

D. $35°+(2k+1)\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}$

4. 钟表经过10分钟,分针转了多少度?若将钟表拨慢10分钟,则分针转了多少度?

板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力

问题四

如何求终边在某条直线上的角的集合?

1. 教材例2与例3都是求终边在某条直线上的角的集合,在解法上有何异同?

2. 归纳求终边在某条直线上的角的集合的方法.

板块四 展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题五

研究终边相同的角体现了什么数学思想方法?

展题设计

展题 1 在 $-720^\circ \sim 720^\circ$ 之间，写出与 80° 角终边相同的角的集合 S.

指导要求： 所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个什么集合？在此集合中取合适的 k 值，使角在 $-720^\circ \sim 720^\circ$ 之间. 解答此类问题的关键是什么？如何求出满足条件的 k 值？此题型为在某范围内求与已知角 α 终边相同的角.

展题 2 把 $1\,230^\circ$，$-3\,290^\circ$ 写成 $k \cdot 360^\circ + \alpha$（其中 $0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$，$k \in \mathbf{Z}$）的形式.

指导要求： 用所给角除以 360°，将余数作 α 即可求得. 一般地，化角 β 为 $k \cdot 360^\circ + \alpha$（$k \in \mathbf{Z}$）的形式时，可由 β 除以 360° 来确定 k 及 α 的值. 当角 β 为正角时，除以 360°，按通常除法进行；当角 β 为负角时，除以 360°，商是负数应当怎么办？

展题 3 写出终边在直线 $y = -x$ 上的角的集合 S.

指导要求： 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，终边在直线 $y = -x$ 上的角有哪些？如何写出与这些角的终边相同的角的集合？如何求这些集合的并集？

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会，通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来，以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中，请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

下面是一位同学的整理，你有更好的吗？

- 角的概念
  - 角
    - 正角
    - 负角
    - 零角
  - 第几象限角
    - 终边落在第几象限叫做第几象限角
  - 终边相同的角

板块五 应用演练，再生新疑

分级设题，精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 下列角中终边与 $330°$ 角相同的是 ( )

A. $30°$　　B. $-30°$

C. $630°$　　D. $-630°$

2. 下列说法中，正确的是 ( )

A. 第二象限角为钝角

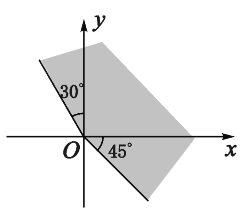
B. 第三象限角必大于第二象限角

C. $-831°$ 角是第二象限角

D. $-95°20'$，$984°40'$，$264°40'$ 角是终边相同的角

3. 与 $-490°$ 角终边相同的角的集合是________，它们是第____象限角，其中最小的正角是______，最大的负角是______.

4. 如图所示，终边落在阴影部分（含边界）的角的集合是________________.



B. 能力提升

5. 把 $-1\ 485°$ 转化为 $\alpha+k\cdot360°$（$0°\leqslant\alpha<360°$，$k\in\mathbf{Z}$）的形式是 ( )

A. $45°-4\times360°$

B. $-45°-4\times360°$

C. $-45°-5\times360°$

D. $315°-5\times360°$

6. 设 $E=\{x|x$ 是小于 $90°$ 的角$\}$，$F=\{x|x$ 是锐角$\}$，$G=\{x|x$ 是第一象限角$\}$，$M=\{x|x$ 是小于 $90°$ 但不小于 $0°$ 的角$\}$，那么有 ( )

A. $F\subsetneqq G\subsetneqq E$　　B. $F\subsetneqq E\subsetneqq G$

C. $M\subsetneqq(E\cap G)$　　D. $(E\cap G)\cap M=F$

7. 写出在 $-720°\sim720°$ 之间与 $-1\ 068°$ 角终边相同的角的集合：________________.

8. (1) 已知角 $\alpha=45°$，在区间 $[-720°,0°]$ 内找出所有与角 α 有相同终边的角 β.

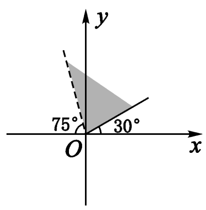
(2) 集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{2}\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{4}\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\right\}$，那么两集合间的关系是什么？

C. 拓展创新

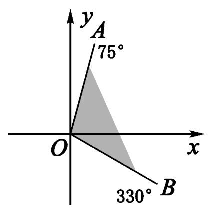
9. 若 α 是第二象限角，则 2α，$\frac{\alpha}{2}$ 分别是第几象限角？

10. 小明自上午 8 点整上学到中午 11 点 40 分放学，时钟的时针和分针各转了多少度？上午 8 点整和中午 11 点 40 分两针所成的最小正角各是多少度？

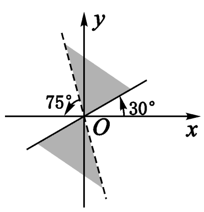
11. 如图所示，写出顶点在原点，始边重合于 x 轴的非负半轴，终边落在阴影部分内的角的集合.



（1）

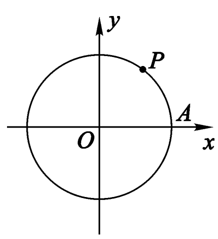


（2）



（3）

12. 如图所示，半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点，点 P 从点 $A(1,0)$ 出发，以逆时针方向沿单位圆周匀速旋转. 已知 P 在 1 秒钟内转过的角度为 $\theta(0°<\theta<180°)$，经过 2 秒钟到达第三象限，经过 14 秒钟后又恰好回到出发点 A，求 θ 的值.



再生新疑

1. 本学时大家学习了哪些新知识？大家是怎样获得这些新知识的？

2. 通过本学时的学习，大家学到了哪些数学方法？

除此之外，同学们还有哪些疑问？

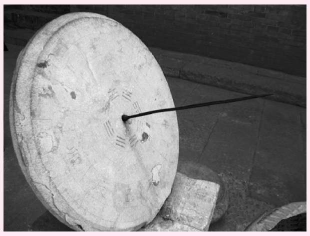
第二学时　弧度制

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

利用古代度量时间的一种仪器——日晷，或者现代普遍使用的钟表都可以测量时间. 实际上我们使用的钟表是用时针、分针和秒针角度的变化来确定时间的. 在初中，我们已经学过利用角度来度量角的大小，现在我们来学习另一种角的度量方法——弧度制.



学习弧度制有什么用呢？如何进行角度与弧度的换算呢？

材料链接

1. 测量人的身高常用米、厘米为单位进行度量，这两种度量单位是怎样换算的？家庭购买水果常用千克、斤为单位进行度量，这两种度量单位是怎样换算的？

2. 我们在初中学习的弧长公式是 $l=\frac{n\pi r}{180}$，扇形的面积公式是 $S=\frac{n\pi r^2}{360}$（其中 r 是半径，l 是弧长，$n°(0<n<360)$ 为圆心角的度数，S 是扇形的面积）.

3. 度是用以度量角的单位，符号为°. 将一周角分为 360 等份，每份定义为 1 度（1°）. 采用“360”这个数字，是因为它容易被整除. 360 除了 1 和自己，还有 22 个真因数，包括

了 7 以外从 2 到 10 的数字，所以很多特殊角的角度都是整数.

板块二 自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

什么是 1 弧度的角？

请阅读教材 p6 的有关内容，完成“探究”栏目中的表格，思考并回答下列问题：

1. 1 度的角与 1 弧度的角是怎样定义的？这两种定义都与圆有关系，你能明白其中的道理吗？

2. 如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l，那么角 α 的弧度数的绝对值是多少？α 的正负怎样确定？

问题二

弧度制与角度制是如何互化的？

阅读教材 p7、p8 例 3 之前的内容，思考并回答下列问题：

1. 角度制与弧度制换算的依据是什么？

2. 如何将角度转换成弧度？换算的公式是什么？

3. 如何将弧度转换成角度？换算的公式是什么？

4. 记忆特殊角的度数与对应的弧度数：

度									
弧度									

问题三

用弧度制来度量角有什么优势？

阅读教材 p8、p9 的有关内容，自主完成教材例 3、例 4，思考并回答下列问题：

1. 弧度制下的弧长公式、扇形的面积公式分别是什么？

2. 比较角度制和弧度制下的弧长公式和扇形的面积公式，在结构上哪种更简单？

自主测评

1. 将分针拨快 15 min，则分针转过的弧度数是 (　　)

A. $-\frac{\pi}{3}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $-\frac{\pi}{2}$　D. $\frac{\pi}{2}$

2. 已知 $\alpha=1\ 690°$，试把 α 表示成 $2k\pi+\beta$ 的形式，其中 $k\in\mathbf{Z}$，$\beta\in[0,2\pi)$.

3. 分别用角度和弧度表示满足下列条件的角的集合.

(1)第一象限角；

(2)锐角；

(3)小于 90°的角；

(4)终边与 $\frac{\pi}{6}$ 角的终边关于 y 轴对称的角；

(5)终边在直线 $y=x$ 上的角.

板块三　合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题四

怎样正确理解 1 弧度的角？

1. 弧度是度量角的大小的单位，1 弧度的角的大小与什么有关系，与什么无关？

2. 角 α 的弧度数是实数，这样就与什么达到了统一，从而方便运算？

板块四　展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题五

我们学习了角度制和弧度制下的弧长公式、扇形的面积公式，在计算中如何合理选择公式？

展题设计

展题 1　选择题：

(1)下列各命题中，真命题是 (　　)

A. 1 弧度的角是 1°的圆心角所对的弧

B. 1 弧度的角是长度为半径的弧

C. 1 弧度的角是 1°的弧与 1°的角的和

D. 1 弧度的角是长度等于半径长的弧所对的圆心角，它是角的一种度量单位

(2)若圆的半径变为原来的 2 倍，而弧长也增大到原来的 2 倍，则 (　　)

A. 扇形的面积不变

B. 扇形的圆心角不变

C. 扇形的面积增大到原来的 2 倍

D. 扇形的圆心角增大到原来的 2 倍

指导要求:本题考查弧度制下,角的度量单位:1 弧度的角的概念. 请回忆 1 弧度是如何定义的? 在此基础上明确:当角 α 的大小一定时,不论这个角所对的圆弧的半径是多少,弧长与半径的比值总是一个定值,它仅与圆心角的大小有关.

展题 2　(1)把 $\frac{3\pi}{5}$ rad 化成角度;

(2)把 $112°30'$ 化成弧度.

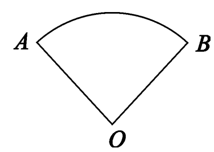
指导要求:正确运用角度与弧度的互化关系. 如果将弧度化成角度,如何进行? 将角度化成弧度,又如何进行?

展题 3　在直径为 20 cm 的圆中,求下列各圆心角所对的弧长.

(1)$\frac{4\pi}{3}$;　(2)$165°$.

指导要求:弧度制下的弧长公式是什么? 在应用时要注意什么问题?

展题 4　如图,已知扇形 AOB 的周长是 6 cm,该扇形的圆心角是 1 弧度,求该扇形的面积.



指导要求:扇形的周长和扇形的圆心角的弧度数公式分别是什么? 据此是否可以列出方程组,解出半径和弧长?

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

下面是一位同学的整理,你还有更好的吗?

- **角的度量**
  - **弧度制**
    - **新弧长公式——新扇形面积公式**
    - **角与实数之间一一对应**
  - **角度制和弧度制的互化**

板块五　应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 在半径不相等的两个圆内，1 弧度的圆心角角的大小：（　　）

A. 所对的弧长相等

B. 所对的弦长相等

C. 所对的弧长等于各自的半径

D. 所对的弦长等于各自的半径

2. 一钟表的分针长 10 cm，经过 35 min，分针的端点所转过的弧长为（　　）

A. 70 cm　　B. $\frac{70}{6}$ cm

C. $\left(\frac{25\pi}{3}-4\sqrt{3}\right)$ cm　　D. $\frac{35\pi}{3}$ cm

3. 7 弧度的角在第________象限，与 7 弧度角终边相同的最小正角为________.

4. 圆弧长度等于其圆内接正三角形的边长，则其圆心角的弧度数为________.

B. 能力提升

5. 设集合 $M=\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{5},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\{\alpha|-\pi<\alpha<\pi\}$，则 $M\cap N$ 等于（　　）

A. $\left\{-\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10}\right\}$

B. $\left\{-\frac{7\pi}{10},\frac{4\pi}{5}\right\}$

C. $\left\{-\frac{7\pi}{10},-\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10},\frac{4\pi}{5}\right\}$

D. $\left\{\frac{3\pi}{10},-\frac{7\pi}{10}\right\}$

6. 下列各组角中，终边相同的是（　　）

A. $\frac{k}{2}\pi$ 与 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

B. $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{k}{3}\pi(k\in\mathbf{Z})$

C. $(2k+1)\pi$ 与 $(4k\pm1)\pi(k\in\mathbf{Z})$

D. $k\pi+\frac{\pi}{6}$ 与 $k\pi\pm\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$

7. 在半径为 $\frac{30}{\pi}$ 的圆中，圆心角为周角的 $\frac{2}{3}$ 的角所对圆弧的长为________.

8. 扇形 AOB 的周长为 8 cm.

(1)若这个扇形的面积为 3 cm^2，求圆心角的大小；

(2)求这个扇形的面积取得最大值时圆心角的大小和弦长 AB.

C. 拓展创新

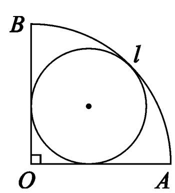
9. 某种蒸汽机上的飞轮直径为 1.2 m，每分钟按逆时针方向转 300 周，求：

(1)飞轮每秒钟转过的弧度数；

(2)轮周上的一点每秒钟经过的弧长.

10. 单位圆上两个动点 M，N 同时从点 $P(1,0)$出发，沿圆周运动，M 点按逆时针方向以$\frac{\pi}{6}$ rad/s 的速度旋转，N 点按顺时针方向以$\frac{\pi}{3}$ rad/s 的速度旋转，试求它们出发后第三次相遇时的位置和各自走过的弧度.

11. 如图，在扇形 AOB 中，$\angle AOB=90°$，$\overset{\frown}{AB}$的长为 l，求此扇形内切圆的面积.



12. 我国发射的某卫星 90 min 绕地球一周，若近似地把此卫星的轨道看成一个圆形轨道，问 1 s 转过多少弧度？若地球半径取 $R=6\ 370$ km，轨道距地面 356 km，则卫星的速度是多少(精确到百分位)？

再生新疑

1. 不同的单位制能给我们解决问题带来方便，那么角的这两种不同的单位制各有什么优势呢？

2. 如何理解弧度制下角的集合与实数集 **R** 之间建立起的一一对应关系？

除此之外，你还有哪些疑问？

1.2　任意角的三角函数

第一学时　任意角的三角函数(一)

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

现在角的范围推广了，锐角三角函数的定义还适用吗？比如 $\sin 200°$ 的值还能是三角形中 $200°$ 角的对边与斜边的比值吗？那么类比角的概念的推广，怎样修正三角函数的定义呢？

材料链接

在初中，我们学习了锐角三角函数，它是用直角三角形边长的比来刻画的. 锐角三角函数的引入与"解三角形"有直接关系. 在直角三角形中是这样定义锐角三角函数的：

在 Rt△ABC 中，$\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}$，$\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$，$\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}$.

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

什么是任意角的三角函数？

请阅读教材 p11、p12 例 1 之前的内容，完成"思考"中的问题，思考并回答下列问题：

1. 初中我们是如何定义锐角三角函数的？

2. 设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$，写出角 α 的正弦、余弦、正切.

3. 正弦、余弦、正切统称为三角函数，它们的自变量和函数值分别是什么？

问题二

如何根据三角函数的定义求已知角的三角函数？

阅读教材 p12、p13 的例 1、例 2，思考并回答下列问题：

1. 例 1 是根据定义求一个角的三角函数值，请归纳解题的过程和步骤.

人若是把一生的光阴虚度，便是抛下黄金未买一物。

2. 例 2 是已知角 α 的终边上一点的坐标，求角 α 的三角函数值. 注意本题还有什么解法？

3. 例 2 旁边的小字部分又给出了三角函数的一种定义，这与前面利用单位圆给出的三角函数的定义一致吗？两种定义有何异同？

问题三

如何判断三角函数值在各个象限的符号？

阅读教材 p13～p15 的有关内容，自主完成教材例 4、例 5，思考并回答下列问题：

1. 写出三种三角函数值在各个象限的符号.

2. 判断三角函数值的符号的依据是什么？

自主测评

1. 利用定义求 $-\frac{\pi}{6}$ 角的正弦、余弦和正切值.

2. 已知角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$，求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

3. 判断下列各式的符号：

(1) $\tan 250^\circ \cdot \tan(-350^\circ)$；

(2) $\sin 105^\circ \cdot \cos 230^\circ$.

4. 求下列三角函数值：

(1) $\sin 1\,080^\circ$；

(2) $\tan\frac{13\pi}{3}$;

(3) $\cos780^\circ$.

板块三　合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题四

公式一指出了“终边相同的角的同一三角函数的值相等”，因此三角函数值有“周而复始”的变化规律．思考公式一在解题中有何应用．

板块四　展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题五

根据教材中例 4 和例 5 的求解过程，归纳总结确定任意角的三角函数值的符号和求任意角的三角函数值的方法和步骤．两者有何相似之处？

展题设计

展题 1　已知角 θ 的终边在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上，求 $\sin\theta,\cos\theta,\tan\theta$ 的值．

指导要求：大家应在学习好教材例 1 的基础上来解本题．直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 是在第几象限的直线？角 θ 的终边有几个位置？需要先画出单位圆与每一个终边的交点，如何算出交点的坐标？根据三角函数的定义即可求得这两个三角函数的值．解决本题的过程体现了什么数学思想方法？

展题 2 已知角 α 的终边上一点 $P(-\sqrt{3},m)$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}m}{4}$，求 $\cos\alpha$ 的值.

指导要求：本题是教材例 2 的推广，大家在掌握好例题旁边的“小贴士”之后来做本题.已知中角的终边上的点的坐标以参数形式给出，据此确定点 P 在什么象限？如何根据三角函数的定义求出 m 的值？之后如何根据角 α 的正弦值求得角 α 的余弦值？

展题 3 求函数 $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域.

指导要求：求函数的值域依据函数的定义域，此函数的定义域是什么？如何根据角的不同象限去掉绝对值符号得到函数的值？本题用到的解题方法是什么？

展题 4 求下列函数的定义域：

(1) $y=\tan x+\frac{1}{\tan x}$；

(2) $y=\sqrt{\sin x}+\tan x$.

指导要求：利用三角函数的定义域及二次根式的意义求解.本题要考虑哪些方面才能列出不等式求得函数的定义域？

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会，通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来，以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中，请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

下面是一位同学的整理，你有更好的吗？

任意角的三角函数
- 三角函数
  - 定义，同角基本关系
- 任意角的三角函数值的符号
  - 一全正
  - 二正弦
  - 三正切
  - 四余弦
- 诱导公式一
  - $2k\pi+\alpha$

板块五　应用演练，再生新疑

分级设题，精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 给出下列命题：

①若 $\sin\alpha=\sin\beta$，则 $\alpha=2k\pi+\beta, k\in\mathbf{Z}$；

②已知 α 为第一象限的角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限的角；

③若 α,β 是第二象限的角，且 $\alpha>\beta$，则 $\cos\alpha<\cos\beta$；

④若 α 是第二象限的角，且 $P(x,y)$ 是其终边上一点，则 $\cos\alpha=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$．

其中正确命题的个数是　（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

2. 已知角 θ 的终边过点 $P(-\sqrt{3},1)$，那么 $\tan(2k\pi+\theta)$ 的值是　（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\sqrt{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. 函数 $y=\tan x+\cos x$ 的定义域是________．

4. $5\sin 90°+2\cos 0°-3\sin 270°+10\cos 180°=$________．

B. 能力提升

5. 在△ABC 中，若 $\sin A\cos B\tan C<0$，则△ABC 是　（　　）

A. 锐角三角形

B. 直角三角形

C. 钝角三角形

D. 锐角三角形或钝角三角形

6. α 是第二象限角，$P(x,\sqrt{5})$ 为其终边上一点，且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}x$，则 $\sin\alpha$ 的值为　（　　）

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $-\frac{\sqrt{10}}{4}$

7. 已知角 θ 的终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上，则 $\sin\theta=$________，$\cos\theta=$________．

8. 求下列各式的值：

(1) $\cos\frac{9\pi}{4}+\tan\left(-\frac{11\pi}{3}\right)+\sin 1125°$；

(2) $\sin\frac{7\pi}{3}+\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$．

C. 拓展创新

9. 已知 θ 是第三象限角，且 $\cos\frac{\theta}{2}<0$，试探究 $\frac{\theta}{2}$ 是第几象限角．

10.(1)已知角 α 的终边经过点 $P(4,-3)$,求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值;

(2)已知角 α 的终边经过点 $P(4a,-3a)(a\neq0)$,求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值;

(3)已知角 α 的终边上一点 P 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离之比为 3∶4(且均不为 0),求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

11.已知角 α 的终边在直线 $y=kx$ 上,始边与 x 轴非负半轴重合.若 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,且 $\cos\alpha<0$,试求实数 k 的值.

12.设 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, x<0,\\ f(x-1)+1, x\geqslant0\end{cases}$ 和 $g(x)=\begin{cases}\cos\pi x, x<\frac{1}{2},\\ g(x-1)+1, x\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 求 $g\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{5}{6}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)$ 的值.

再生新疑

1.任意角 α 的三角函数值与角 α 终边上点 P 的位置有没有关系?

2.任意角 α 的三角函数的定义域、值域、对应法则分别是什么?

除此之外,你还有哪些疑问?

第二学时　任意角的三角函数(二)

板块一　创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

同学们在一些旅游景点或者公园中都见过大型摩天轮(如图),大家是否想过这些大型摩天轮在转动过程中,坐椅离地面的高度随着转动角度的变化而变化,二者之间有怎样的关系呢?

材料链接

1. 有向线段的定义：规定了起点和终点的线段叫做有向线段.

2. 有向线段的表示：表示有向线段时，要将表示起点的字母写在前面，表示终点的字母写在后面.

3. 有向线段的三要素：起点、方向和长度. 知道了有向线段的起点，它的终点就被方向和长度唯一确定.

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

如何用几何图形表示三角函数?

请阅读教材 p15～p17 的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 正弦线、余弦线、正切线是用有向线段来表示的，如何作出角 α 的正弦线、余弦线、正切线?

2. 用有向线段表示角的正弦、余弦、正切时，起点、终点、正方向是如何规定的?

3. 正弦线、余弦线、正切线统称为三角函数线. 它是三角函数的几何表示，是从"形"的角度表示三角函数的，体现了数形结合的思想，在后续的学习中要认真体会.

自主测评

1. 下列命题中正确的是　　(　　)

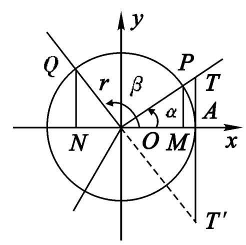
A. 终边相同的角的同名三角函数值相等

B. 终边不同的角的同名三角函数值不等

C. 若 $\sin\alpha>0$，则 α 是第一或第二象限角

D. 第二象限角一定比第一象限角大

2. 如图，α,β 的终边分别与单位圆交于点 P,Q，过点 $A(1,0)$ 作切线 AT，交射线 OP 于点 T，交射线 OQ 的反向延长线于点 T'，点 P,Q 在 x 轴上的射影分别为点 M,N，则 $\sin\alpha=$________，$\cos\alpha=$________，$\tan\alpha=$________，$\sin\beta=$________，$\cos\beta=$________，$\tan\beta=$________.



3. 在 $(0,2\pi)$ 内，使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围是________.

4. 作出角 $\frac{\pi}{3}$ 的正弦线、余弦线、正切线.

板块三　合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题二

三角函数线是三角函数的几何表示，试从单位圆中的三角函数线出发分析三角函数值的变化情况.

1. 当角 $\alpha\in[0,2\pi)$ 时,依据三角函数线分析角 α 的正弦、余弦、正切的变化情况.

2. 当角 $\alpha\in\mathbf{R}$ 时,角 α 的正弦、余弦、正切又是如何变化的?这种变化体现了三角函数值的哪种变化规律?

板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题三

分析单位圆中的三角函数线,你能得出三角函数的哪些性质?

问题四

学习三角函数线对认识三角函数概念有哪些帮助?

展题设计

展题1 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线.

(1)$\frac{2\pi}{3}$; (2)$-\frac{3\pi}{4}$.

指导要求:根据三角函数线的定义如何画出角 α 的正弦线、余弦线、正切线呢?本题中的两个角在第几象限?思考画出的三角函数线的正负.

展题2 在单位圆中画出符合下列条件的角的终边.

(1)$\sin\alpha=\frac{2}{3}$; (2)$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

指导要求:对于(1),根据三角函数的定义,设角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$,则 $\sin\alpha=y$,$\cos\alpha=x$.所以要作出满足 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ 的角 α 的终边,只要在单位圆上找出纵坐标为 $\frac{2}{3}$ 的点 P,则 OP 即为角 α 的终边.对于(2)可采用同样的方法解决.

展题 3　利用单位圆寻找满足下列条件的在 $0°\sim360°$ 内的角 α.

(1) $\sin\alpha\geqslant\frac{1}{2}$；　(2) $\tan\alpha>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

指导要求：作出满足 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的角 α 的终边，然后根据已知条件确定角 α 的终边的范围.

展题 4　若 α 是锐角，试用三角函数线证明：$\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

指导要求：在单位圆中作出角 α 的正弦线和余弦线，根据几何事实考虑即得. 三角函数线是三角函数的一种几何表示，所以几何的证明方法、一些几何结论可以用于三角函数的证明过程.

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会，通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来，以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中，请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

下面是一位同学的整理，你有更好的吗？

有向线段 → 单位圆 → 三角函数线 →
- $\sin\alpha=MP$ → MP 为正弦线
- $\cos\alpha=OM$ → OM 为余弦线
- $\tan\alpha=AT$ → AT 为正切线

板块五　应用演练，再生新疑

分级设题，精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 已知角 α 的余弦线是单位长度的有向线段，那么角 α 的终边　　(　　)

A. 在 x 轴上

B. 在 y 轴上

C. 在直线 $y=x$ 上

D. 在直线 $y=x$ 或 $y=-x$ 上

2. 利用正弦线比较 $\sin1$，$\sin1.2$，$\sin1.5$ 的大小关系是　　(　　)

A. $\sin1>\sin1.2>\sin1.5$

B. $\sin1>\sin1.5>\sin1.2$

C. $\sin1.5>\sin1.2>\sin1$

D. $\sin1.2>\sin1>\sin1.5$

3. 若 $-\frac{2\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$，利用三角函数线，可得 $\sin\theta$ 的取值范围是________.

4. 利用三角函数线写出满足 $\tan x<\sqrt{3}$ 且 $x\in(0,\pi)$ 的 x 的集合为__________.

B. 能力提升

5. 若 $0<\alpha<2\pi$，且 $\sin\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha>\frac{1}{2}$，利用三角函数线得到角 α 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$　B. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

C. $\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$　D. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$

6. 已知角 α 的余弦线的长度不大于角 α 的正弦线的长度，那么角 α 的终边落在第一象限内的范围是 ( )

A. $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$

B. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

C. $\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

D. $\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$

7. sin1，cos1，tan1 的大小关系用“>”号连接为____________.

8. 分别作出$\frac{2\pi}{3}$和$\frac{4\pi}{5}$角的正弦线、余弦线和正切线，并比较 $\sin\frac{2\pi}{3}$与 $\sin\frac{4\pi}{5}$，$\cos\frac{2\pi}{3}$与 $\cos\frac{4\pi}{5}$，$\tan\frac{2\pi}{3}$与 $\tan\frac{4\pi}{5}$的大小.

C. 拓展创新

9. 利用三角函数线，写出满足下列条件的角 x 的集合.

(1) $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(2) $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$；

(3) $\tan x\geqslant-1$.

10. 在△ ABC 中，若 $\sin A+\cos A=\frac{2}{3}$，试根据三角函数线探究这个三角形是什么三角形.(锐角三角形、钝角三角形或直角三角形)

11. 已知 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，试比较 α，$\tan\alpha$，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的大小.

12. 已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$ 在第一象限，若角 $\alpha\in[0,2\pi)$，求 α 的取值范围.

再生新疑

1. 三角函数线是三角函数的几何表示，利用三角函数线可将三角函数问题转化为几何问题解决. 通过前面的学习，请总结运用三角函数线可以解决什么样的问题.

2. 通过学习三角函数线加深对三角函数概念的认识，是数形结合思想的重要体现，同时也是学习三角函数图象与性质的重要基础，其作用会随着进一步的学习充分体现出来. 后面学习的知识还会用到三角函数线吗？请同学们继续关注.

除此之外，你还有哪些疑问？

第三学时　同角三角函数的基本关系

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

“物以类聚，人以群分”. 之所以“分群”“分类”，是因为同类之间有很多共同点，彼此紧密地联系. 我们现在研究的三角函数，同角的正弦、余弦、正切之间有什么关系呢？

材料链接

1. 用联系的观点提出问题，获得研究的思路，这是数学研究中常用的方法. 在三角函数的学习中，与圆的几何性质建立联系，从中获得研究三角函数的问题与思路是学习三角函数的重要思想与方法. 联系圆的基本性质，把单位圆上的几何关系用坐标表示出来，进而获得一些三角函数的基本关系.

2. 我们在初中学习过锐角的三角函数，知道在三角形中锐角 A 有这样的关系式：$\sin^2A+\cos^2A=1$，$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$.

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

同角三角函数的基本关系式是什么？

请阅读教材 p18、p19 例 6 之前的内容，完成“探究”中的问题，思考并回答下列问题：

1. 写出同角三角函数的基本关系式.

2. 在同角三角函数的基本关系中，“同角”的含义是什么？

3. 在同角三角函数的基本关系中，商的关系对角 α 有何限制条件？

问题二

应用同角三角函数的基本关系求值、证明三角恒等式.

阅读教材 p19、p20 的有关内容，自主学习教材例 6、例 7，思考并回答下列问题：

1. 教材例 6 是已知角 α 的正弦值，求角 α 的余弦值和正切值. 在应用平方关系求角 α 的余弦值时，应注意什么？

2. 教材例 7 是证明三角恒等式，你还有其他的证明方法吗？试一试.

自主测评

1. 若 $\cos\theta\tan\theta<0$，则 θ 是 ( )

A. 第一、二象限角

B. 第一、三象限角

C. 第二、四象限角

D. 第三、四象限角

2. 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，并且 α 是第四象限角，那么 $\sin\alpha=$________，$\tan\alpha=$________.

3. 已知 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，并且 α 是第二象限角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

4. 化简：$(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$.

板块三 合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题三

同角三角函数的基本关系有哪些方面的应用？

1. 已知角 α 的一种三角函数值，可以求出其余两种三角函数值. 归纳解决这类问题的方法和步骤.

2.用同角三角函数的基本关系化简和证明时，常常需要作恒等变换，写出同角三角函数的平方关系和商的关系的常用变形形式.

板块四　展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题四

证明三角恒等式的方法多种多样，试归纳总结一下.

展题设计

展题 1　已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

指导要求：本题是教材 p19 例 6 的变形，与例 6 的区别在于已知条件中将正弦变为余弦.已知条件没有明确角的范围，根据已知这个角的余弦值是 $-\frac{4}{5}$ 可以确定此角在第几象限？由平方关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 变形得到 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ 后，开方时要注意什么？

展题 2　已知 $\tan\alpha=a(a\neq0)$，用 a 表示 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值.

指导要求：可将 $\tan\alpha=a(a\neq0)$ 看成一个常数，将基本关系式转换成 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的方程，然后求解.注意要根据被开方数的符号确定分类的标准.

展题 3　化简：

(1)$\sqrt{1-\sin^2 440^\circ}$；

(2)$\sqrt{1-2\sin40^\circ\cos40^\circ}$.

指导要求：(1)式在用同角关系式化简时，用什么公式将 440° 化成锐角？(2)式如何运用数字“1”进行代换？

展题 4　求证：

(1)$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$；

(2)$2(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2$；

(3) $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$.

指导要求: 证明三角恒等式的过程,实际上是化异为同的过程,即化去形式上的异,而呈现实质上的同. 这个过程往往是从化简开始的——这就是说,在证明三角恒等式时,我们可以从最复杂处开始.

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过"知识结构树""思维导图""表格比较"或"学习报告"等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

下面是一位同学的整理,你有更好的吗?

同角三角函数的基本关系
- 平方关系
  - $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
- 商数关系
  - $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- 同角三角函数的转化
  - $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
    $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$
    $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
    $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
    $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$
  - $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
    $\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha$
    $\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 若 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$,$\alpha\in(0,\pi)$,则 $\tan\alpha$ 的值为 ( )

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{3}{4}$

C. $\pm\dfrac{4}{3}$　　D. $\pm\dfrac{3}{4}$

2. 若 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=2$,则 $\tan\alpha$ 的值为 ( )

A. 1　　B. -1

C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $-\dfrac{4}{3}$

3. 若 $\tan\alpha=\sqrt{15}$,则 $\cos\alpha=$______,$\sin\alpha=$______.

4. 已知 $\sin\theta=\dfrac{m-3}{m+5}$,$\cos\theta=\dfrac{4-2m}{m+5}$,则 $m=$______,$\tan\theta=$______.

B. 能力提升

5. 若 θ 为第二象限角,且 $\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{1-2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}$,则 $\dfrac{\theta}{2}$ 是 ( )

A. 第一象限角

B. 第二象限角

C. 第三象限角

D. 第四象限角

6. 已知 $\tan\theta=2$,则 $\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta$ 等于 ( )

A. $-\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{5}{4}$

C. $-\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

7. 若 $\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5}$,则 $\tan\alpha=$____.

8. 化简:

(1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$;

(2) $\dfrac{\sqrt{1-2\sin10^\circ\cos10^\circ}}{\cos10^\circ-\sqrt{1-\sin^2 80^\circ}}$.

C. 拓展创新

9. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=1$，则 $\sin^n\alpha+\cos^n\alpha$ 等于 (　　)

A. 1　　B. 0

C. $\dfrac{1}{2^{n-1}}$　　D. 不能确定

10. 已知 $-\pi<x<0$，$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$.

(1)求 $\sin x\cos x$ 的值并指出角 x 所处的象限；

(2)求 $\tan x$ 的值.

11. 求证：(1) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan^2\alpha-1}=\sin\alpha+\cos\alpha$；

(2) $(2-\cos^2\alpha)(2+\tan^2\alpha)=(1+2\tan^2\alpha)(2-\sin^2\alpha)$.

12. 已知 $1\leqslant\cos x-\sin x\leqslant\sqrt{2}$，求函数 $y=1-\cos x+\sin x+\sin x\cos x$ 的值域.

再生新疑

1.请写出同角三角函数的基本关系式，它们成立的条件分别是什么？

2.已知一个任意角的正弦、余弦、正切中的一个值，求其余两个值时，要注意这个角的终边所在的位置，从而考虑是否要进行分类讨论.

除此之外，你还有哪些疑问？

1.3 三角函数的诱导公式

第一学时 三角函数的诱导公式(一)

板块一 创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

当你留恋于湖光山色时，是否注意到山在水中的倒影，山的清秀挺拔和水的清静柔美在那一刻融为一体.

如果你的手中拿着一个度数为α的角的模型，你观察一下平面镜中的这个角的模型与你手中的这个角的模型有什么关系？你肯定会准确地答出：对称！如果把x轴看成平面镜，那么平面直角坐标系中的角α关于x轴对称的角的度数是多少？这个角的三角函数值与角α的三角函数值有什么关系？

材料链接

利用单位圆可以定义任意角的三角函数，而圆具有很好的对称性，同样，我们可以利用圆的对称性来研究三角函数问题. 本学时我们就利用对称性来探讨角的三角函数值之间的联系.

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

我们利用单位圆定义了三角函数，而圆具有很好的对称性，利用圆的这种对称性可以研究三角函数的哪些性质？试一试.

问题二

诱导公式的推导.

阅读教材 p23～p26 的有关内容，自主完成教材例 1、例 2，思考并回答下列问题：

1. 设点 P 的坐标为 (x,y)，写出点 P 关于 x 轴、y 轴、原点的对称点的坐标.

2. 角 $\pi-\alpha,\pi+\alpha,-\alpha$ 的终边与角 α 的终边有什么关系？

3. 结合三角函数的定义，由对称性写出角 $\pi-\alpha,\pi+\alpha,-\alpha$ 与角 α 的三角函数值间的关系.

自主测评

1. $\sin 210^\circ=$________.

2. $\cos 330^\circ$ 等于　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 求下列各三角函数值（可使用计算器）.

(1) $\cos 225^\circ$；

(2) $\tan(-\pi)$；

(3) $\sin\frac{11\pi}{10}$.

4. 已知 $\cos(\pi+x)=0.5$，求 $\cos(2\pi-x)$，$\cos(\pi-x)$ 的值.

板块三　合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题三

诱导公式一～四有什么作用？

1. 用简洁的语言概括公式一～四.

2. 公式一～四给出了 $\alpha+k\cdot 2\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，$-\alpha$，$\pi\pm\alpha$ 的三角函数值与角 α 的三角函数值间的关系，这些角有何特点？

3. 根据教材例 1，你对公式一～四的作用有什么进一步的认识？

板块四 展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题四

根据教材例 1 的求解过程，归纳把任意角的三角函数转化为锐角三角函数的步骤.

展题设计

展题 1 求下列三角函数的值：

(1) $\sin 1\,110°$；

(2) $\cos(-510°15')$；

(3) $\tan\left(-\frac{53\pi}{6}\right)$.

指导要求： 1 110° 角与哪个角的终边相同？运用哪个诱导公式可以将 $\sin 1\,110°$ 转化为锐角的三角函数？对于负角的三角函数，可以先用什么诱导公式将其化为正角的三角函数，然后再用诱导公式进行变形？利用诱导公式求值的一般步骤是什么？对于用弧度制表示角的三角函数求值问题又有什么注意事项？

展题 2 化简：

$$\frac{\sin(1\,440°+\alpha)\cdot\cos(\alpha-1\,080°)}{\cos(-180°-\alpha)\cdot\sin(-\alpha-180°)}.$$

指导要求： 利用诱导公式将式子中的每一个三角函数变形为最简形式. 这是诱导公式一、二、三的综合应用，适当地改变角的结构，使之符合诱导公式中角的形式是解决问题的关键. 在这里对 $\cos(-180°-\alpha)$ 应如何变形？

❀展题 3　已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)$的值.

指导要求：已知角 $\frac{\pi}{6}+\alpha$ 与未知角 $\frac{5\pi}{6}-\alpha$ 有什么关系？可以将未知角 $\frac{5\pi}{6}-\alpha$ 用已知角 $\frac{\pi}{6}+\alpha$ 表示吗？怎样用诱导公式求值？根据已知式子与所求式子的特点，发现它们之间的内在联系，尤其是已知角与未知角或特殊角之间的关系，恰当地选择公式是解决本题的关键.

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会，通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来，以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中，请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

板块五　应用演练，再生新疑

分级设题，精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 下列各式不正确的是　(　　)

A. $\sin(\alpha+180^\circ)=-\sin\alpha$

B. $\cos(-\alpha+\beta)=-\cos(\alpha-\beta)$

C. $\sin(-\alpha-360^\circ)=-\sin\alpha$

D. $\cos(-\alpha-\beta)=\cos(\alpha+\beta)$

2. 化简 $\sin^2(\pi-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)\cos(-\alpha)+1$，结果为　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 0　　D. $2\sin^2\alpha$

3. $\sin120^\circ\cos330^\circ+\sin(-690^\circ)\cos(-660^\circ)+\tan675^\circ=$________.

4. 已知 $\cos(\alpha-\pi)=-\frac{3}{5}$，且 α 为第四象限的角，则 $\sin(-2\pi+\alpha)$的值为________.

B. 能力提升

5. 下列三角函数式：

①$\sin\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)(n\in\mathbf{Z})$；

②$\cos\left(2n\pi-\frac{\pi}{6}\right)(n\in\mathbf{Z})$；

③$\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)(n\in\mathbf{Z})$；

④$\cos\left[(2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}\right](n\in\mathbf{Z})$；

⑤$\sin\left[(2n-1)\pi-\frac{\pi}{3}\right](n\in\mathbf{Z})$.

其中函数值与 $\sin\frac{\pi}{3}$ 的值相同的是　(　　)

A. ①②　　B. ①③④

C. ②③⑤　　D. ①③⑤

6. 已知 $\frac{\sin(2\pi+\theta)\tan(\pi+\theta)\tan(3\pi-\theta)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\tan(-\pi-\theta)}=1$，

则$\dfrac{3}{\sin^2\theta+3\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta}$的值是 (　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 6

7. 已知 $\tan\alpha=3$,则$\dfrac{2\cos(\pi-\alpha)-3\sin(\pi+\alpha)}{4\cos(-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)}=$________.

8. 求 $\cos(-2\ 640^\circ)+\sin 1\ 665^\circ$的值.

C. 拓展创新

9. 化简:

(1)$\dfrac{\cos(\alpha-\pi)\tan(\alpha-2\pi)\tan(2\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}$;

(2)$\sin\left(2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)\cos\left(k\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

10. 已知 $\cos(75^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{3}$,$\alpha$ 为第三象限角,求 $\sin(105^\circ-\alpha)+\cos(-105^\circ+\alpha)$的值.

11. 已知 $f(n)=\cos\dfrac{n\pi}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$.

求证:$f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=f(7)+f(8)+\cdots+f(12)$.

12. 已知 $\sin(3\pi+\theta)=\dfrac{1}{4}$,求值:

$\dfrac{\cos(\pi+\theta)}{\cos\theta[\cos(\pi+\theta)-1]}+\dfrac{\cos(\theta-2\pi)}{\cos(\theta+2\pi)\cos(\pi+\theta)+\cos(-\theta)}$.

再生新疑

本学时我们学习了诱导公式二、公式三、公式四,这三组公式在求三角函数值、化简三角函数式及证明三角函数等式时是经常用到的,为了牢记公式,我们总结了"函数名不变,符号看象限"的简便记法.同学们理解这句话的含义吗?

除此之外,你还有哪些疑问?

第二学时　三角函数的诱导公式(二)

板块一　创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

上一学时我们利用单位圆的对称性探究了三角函数的诱导公式二、三、四.这些公式的推导过程体现了数形结合和归纳转化的数学思想,反映了从特殊到一般的数学归纳思维方式,对培养创新意识,发展思维能力,掌握数学思想方法具有重要的意义.本学时将在前一学时的基础上再来学习一组诱导公式.

请大家思考:角$\frac{\pi}{2}-\alpha$的终边与角α的终边有什么关系?角α与它的余角$\frac{\pi}{2}-\alpha$的三角函数有什么关系?

材料链接

在初中,我们学习过这样的知识:

$\sin30°=\cos60°$,即$\sin30°=\cos(90°-30°)$;

$\sin45°=\cos45°$,即$\sin45°=\cos(90°-45°)$;

$\sin60°=\cos30°$,即$\sin60°=\cos(90°-60°)$.

板块二　自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

如何推导得到三角函数的诱导公式五、六?

请阅读教材p26、p27的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 设点P的坐标为(x,y),写出点P关于直线$y=x$的对称点的坐标.

2. 角$\frac{\pi}{2}-\alpha$的终边与角α的终边有什么关系?

3. 角$\frac{\pi}{2}-\alpha$的终边与角$\frac{\pi}{2}+\alpha$的终边有什么关系?

4. 结合三角函数的定义,由对称性写出角$\frac{\pi}{2}-\alpha$,$\frac{\pi}{2}+\alpha$与角α的三角函数值间的关系.

自主测评

1. 若 $\sin 10^\circ = a$，则 $\cos 260^\circ =$ ________.

2. 已知 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 的值为 ( )

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$

C. $\frac{4}{5}$　　D. $\pm\frac{4}{5}$

3. 使用诱导公式五、六求下列三角函数的值：

(1) $\sin 120^\circ$；

(2) $\cos 135^\circ$；

(3) $\cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$.

4. 求证：$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$.

板块三　合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题二

体会诱导公式五、六的作用.

1. 用简洁的语言概括诱导公式五、六.

2. 诱导公式五、六给出了角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$，$\frac{\pi}{2}+\alpha$ 与角 α 的三角函数值间的关系. 这些角有何特点？

3. 诱导公式五、六的作用是什么？

问题三

三角函数的诱导公式五、六与诱导公式一～四有何异同点？你能用简洁的语言来概括这六组公式吗？

板块四　展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题四

公式一～六都叫做诱导公式. 这六组诱导公式给出了 $k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 与角 α 的三角函数值间的关系，其推导过程利用了圆的对称性，运用了数形结合的数学思想. 在三角函数的学习中要认真体会这一研究方法.

展题设计

展题 1　将下列三角函数化为 $0^\circ\sim45^\circ$ 之间角的三角函数：

(1) $\sin62^\circ$；(2) $\cos75^\circ$；(3) $\sin128^\circ$；(4) $\cos126^\circ$.

指导要求：注意到这些角都是 90° 左右的角，可利用诱导公式五、六实现转化. 由于本题的特殊要求，所以只能使用诱导公式五、六. 转化之后三角函数的名称有没有变化？

展题 2　已知 $\cos(75^\circ+\alpha)=\frac{1}{3}$，且 $-180^\circ<\alpha<-90^\circ$，求 $\cos(15^\circ-\alpha)$ 的值.

指导要求：$(15^\circ-\alpha)$ 角与 $(75^\circ+\alpha)$ 角有什么关系？对 $\cos(15^\circ-\alpha)$ 可以进行怎样的转化？解决本题的关键是什么？

展题 3　化简：

(1) $\frac{\cos(\alpha-\pi)}{\sin(\pi-\alpha)}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$；

(2) $\frac{\cos(2\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\tan(3\pi-\alpha)}$.

指导要求：这是诱导公式的综合应用. 适当地改变角的结构，使之符合诱导公式中角的形式，是解决问题的关键.

展题 4 求证：

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\tan(-\alpha-\pi)}{\sin(4\pi-\alpha)\cos\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}=1.$$

指导要求：显然本式的左边复杂，而右边简单，可以从左边出发进行三角函数的化简变形，变形时要用到诱导公式.本题是诱导公式及同角三角函数的基本关系式在证明三角恒等式中的又一应用，具有一定的综合性.尽管问题是以证明的形式出现，但其本质是等号左、右两边三角函数式的化简.

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会，通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来，以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中，请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

下面是一位同学的整理，你有更好的吗？

诱导公式

- $\beta=\pi+\alpha$的三角函数
- $\beta=-\alpha$的三角函数
- $\beta=\pi-\alpha$的三角函数
- $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$的三角函数
- $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$的三角函数

板块五 应用演练，再生新疑

分级设题，精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$的值为 ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 如果 $|\cos x|=\cos(-x+\pi)$，则 x 的取值范围是 ( )

A. $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$

3. 若 $\cos(125^\circ-\alpha)=\frac{12}{13}$，则 $\cos(\alpha+55^\circ)=$ ________.

4. $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=$ ________.

B. 能力提升

5. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin(A+B-C)=\sin(A-B+C)$，则 $\triangle ABC$ 必是 ( )

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰或直角三角形

D. 等腰直角三角形

6. 已知 $\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{3}$，且 $-180^\circ<\alpha<-90^\circ$，则 $\cos(30^\circ-\alpha)$的值为 ( )

A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

7. 设 $\tan 1234^\circ=a$，那么 $\sin(-206^\circ)+\cos(-206^\circ)$ 的值为________.

8. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

C. 拓展创新

9. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=1$，求证：$\tan(2\alpha+\beta)+\tan\beta=0$.

10. 若记 $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$，已知 $\tan\alpha$，$\cot\alpha$ 是关于 x 的方程 $x^2-kx+k^2-3=0$ 的两实根，且 $3\pi<\alpha<\frac{7\pi}{2}$，求 $\cos(3\pi+\alpha)-\sin(\pi+\alpha)$ 的值.

11. 设 α 是第三象限角，且 $\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}$，求 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？

12. 如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值分别等于 $\triangle A_2B_2C_2$ 对应的三个内角的正弦值，那么：

(1)试判断 $\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形吗？

(2)试借助诱导公式证明 $\triangle A_2B_2C_2$ 中必有一个角为钝角.

再生新疑

1. 本学时同学们自己导出了公式五、公式六，完成了教材中诱导公式的学习任务，为求任意角的三角函数值“铺平了道路”. 公式一～六可用一句话“纵变横不变，符号看象限”来概括，简单方便，不会遗忘.

2. 这些诱导公式有什么作用？其中又体现了哪些重要的数学思想？

除此之外，你还有哪些疑问？

1.4　三角函数的图象与性质

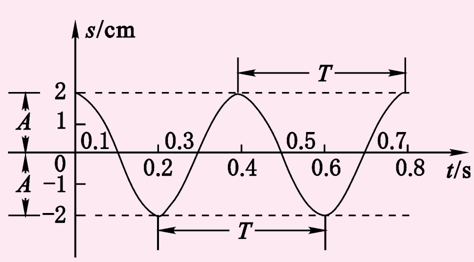
第一学时　正弦函数、余弦函数的图象

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

教材 p30 的演示实验可在纸板上得到一条曲线，然后用电脑模拟该过程，我们得到如图所示的曲线.



通过图象我们可以知道，当 $t=0$，$t=0.4$，$t=0.8$ 时，单摆摆动到最右边，摆动到最右边时距平衡位置都是 2 cm，则来回摆动一次需要多长时间？从图上你能观察出来吗？这样的曲线是什么形状？是什么函数的图象？它有什么性质？

材料链接

研究函数的性质常常以图象直观为基础，这点大家已经有了一定的经验. 通过观察函数的图象，从图象的特征获得函数的性质是一个基本方法，这也是数形结合思想的应用. 回忆我们在《数学 1》学过的指数函数、对数函数的图象是什么？我们是如何画出它们的图象的？

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

如何研究一个新的函数？

阅读教材 p30 的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 回顾指数函数和对数函数的研究方法，对于一个新的函数，通常是如何研究它的性质的？

2. 如何画出一个新的函数的图象？

问题二

如何画出正弦函数的图象？

阅读教材 p31“探究”栏目之前的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 三角函数线是三角函数的几何表示，如何用正弦线表示角 α 的正弦值？

2. 终边相同的角有相同的三角函数值，因而只需先画出正弦函数在哪个区间上的图象？

3. 按照教材上的步骤作出函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象.

4. 如何由函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi)$ 的图象得到正弦函数 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$ 的图象？

问题三

如何得到余弦函数的图象？

阅读教材 p31、p32“思考”栏目之前的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 根据诱导公式，说出函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 有什么关系？

2. 如何通过适当的图形变换，由正弦函数 $y=\sin x$ 的图象得到余弦函数 $y=\cos x$ 的图象？

问题四

如何快捷、准确地画出正弦函数、余弦函数的图象？

1. 作正弦函数的图象时，应抓住哪五个关键点？

2. 作余弦函数的图象时，应抓住哪五个关键点？

自主测评

1. 把余弦曲线向________平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度，就可以得到正弦曲线.

2. 根据余弦函数的图象，可得不等式 $\cos x\geqslant 0$ 的解集为________________.

3. 用“五点法”作正弦函数、余弦函数的图象时，首先应描出的五点的横坐标可以是　(　　)

A. $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$

B. $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$

C. $0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi$

D. $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}$

4. 用“五点法”作函数 $y=\cos x,x\in[0,2\pi]$的图象.

板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力

问题五

教材中余弦函数的图象是通过图形变换得到的,试用余弦线画出比较精确的余弦函数的图象.

板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题六

1. “五点法”中的五个关键点有什么特点?

2. 用“五点法”画出三角函数图象的步骤有哪些?

展题设计

展题1 用“五点法”作函数 $y=\sin x-1,x\in[0,2\pi]$的图象,并说明它的图象与正弦曲线的关系.

指导要求: 与正弦函数 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$有关的五个关键点是什么?函数 $y=\sin x-1,x\in[0,2\pi]$的图象与正弦曲线 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$的形状一样吗?有什么不同?

展题2 用“五点法”作函数 $y=|\sin x|,x\in[0,2\pi]$的简图.

指导要求: 作函数图象的五个关键点有什么变化?函数 $y=|\sin x|$在区间$[0,\pi]$上的图象和在区间$[\pi,2\pi]$上的图象一样吗?要得到函数 $y=|\sin x|$在实数集 $\mathbf{R}$ 上的图象,只需将函数 $y=|\sin x|$在区间$[0,\pi]$上的

图象怎样变换得到？函数 $y=|\sin x|, x\in[0,2\pi]$的图象与函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$的图象有什么关系？

展题 3　利用正弦函数和余弦函数的图象，求满足下列条件的 x 的集合：

(1) $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$；　(2) $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$.

指导要求：解答本题可以按下面的程序完成：首先在同一坐标系内作出函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 与 $y=\frac{1}{2}$ 的图象，然后观察闭区间$[0,2\pi]$内的情形，看到符合 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$ 的 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，符合 $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$ 的 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$，最后由正弦函数、余弦函数的图象得到在定义域 **R** 上的解集. 请归纳用正弦函数和余弦函数的图象解简单的三角不等式的一般步骤.

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会，通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来，以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中，请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

下面是一位同学的整理，你有更好的吗？

正弦、余弦曲线

利用三角函数线作正弦、余弦曲线　　**五点法**

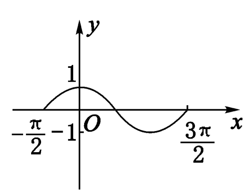
板块五　应用演练，再生新疑

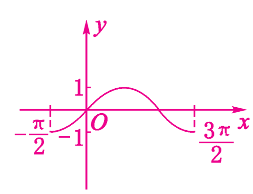
分级设题，精选精练

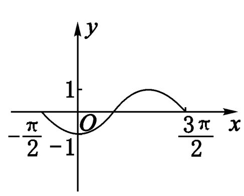
分层演练

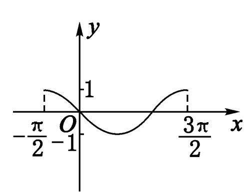
A. 基础巩固

1. 函数 $y=-\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$的简图是　(　　)


A


B


C


D

2. 点 P 从点$(1,0)$出发，在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上沿逆时针方向运动 $\frac{2\pi}{3}$ 弧长到达 Q 点，则 Q 点的坐标是　(　　)

A. $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

3. $y=\lg\sin x$ 的定义域是____________________.

4. 设 M 和 m 分别是函数 $y=\frac{1}{3}\cos x-1$ 的最大值和最小值，则 $M+m=$________.

B. 能力提升

5. 下列叙述中，正确的个数为　　(　　)

①作正弦、余弦函数的图象时，单位圆的半径长与 x 轴上的单位长度可以不一致；

②$y=\sin x$, $x\in[0,2\pi]$ 的图象关于点 $P(\pi,0)$ 成中心对称图形；

③$y=\cos x$, $x\in[0,2\pi]$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 成轴对称图形；

④正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$ 的图象不超出两直线 $y=-1$、$y=1$ 所夹的范围.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

6. 方程 $\sin x=\frac{x}{10}$ 的根的个数是　　(　　)

A. 7　　B. 8

C. 9　　D. 10

7. 函数 $y=\cos(\sin x)$ 的值域是____________________.

8. 根据 $y=\cos x$ 的图象解不等式：$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}$, $x\in[0,2\pi]$.

C. 拓展创新

9. 定义运算 $a<>b$ 为：$a<>b=\begin{cases}a, a\leqslant b,\\ b, a>b,\end{cases}$ 例如 $1<>2=1$. 求函数 $f(x)=\sin x<>\cos x$ 的值域.

10. 利用正弦曲线和余弦曲线，在区间 $(0,2\pi)$ 内，求满足 $\sin x>\cos x$ 的 x 的取值范围.

11. 已知函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点，求 k 的取值范围.

12. 若函数 $y=2\cos x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 的图象和直线 $y=2$ 围成一个封闭的平面图形，求这个封闭图形的面积.

再生新疑

1. 怎样利用“周而复始”的特点，把正弦函数在区间$[0,2\pi)$上的图象扩展到整个定义域 $\mathbf{R}$ 上呢？

2. 如何利用图象变换由正弦曲线得到余弦曲线？其中又包含了哪些重要的数学思想？

除此之外，你还有哪些疑问？

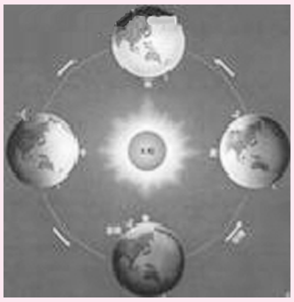
第二学时　正弦函数、余弦函数的性质(一)

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

我们知道，地球的自转与公转、单摆的运动、弹簧的振动与圆周运动等，都呈现一定的周期性．由正弦、余弦函数的定义可知，角 α 的终边每旋转一周就会与原来的位置重合；从图象上可以看出，函数对于自变量的一切值，每增加或减少一个定值(定值可以有很多个)，函数值就会重复出现．本学时我们利用函数图象观察正弦、余弦函数的变化情况，进一步研究这两个函数的特有性质．



材料链接

1. 对函数性质的研究，在《数学 1》中我们已经研究了幂函数、指数函数、对数函数的图象与性质．对现在学习的基本初等函数的性质的研究，大家已经有了经验，其中，通过观察函数的图象，从图象的特征获得函数的性质是一个基本方法，这也是数形结合思想方法的应用．

2. 人的情绪、体力、智力都有周期性的变化现象．在日常生活和工作中，人们常常有这样的自我感觉，有的时候体力充沛，心情愉快，思维敏捷；有的时候却疲倦乏力，心灰意冷，反应迟钝；也有的时候思绪不稳，喜怒无常，烦躁不安，糊涂健忘．这些感觉呈周期性出现，贯穿人的一生，这就是人体节律．这种有规律的重复，我们称之为周期性现象．

板块二 自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

如何定义周期函数?

请阅读教材 p34、p35 例 2 之前的内容，思考并回答下列问题：

1. 今天是星期五，七天以后依然是星期五，这种现象就是“周期”. 你还能举出生活中类似的例子吗？

2. 正弦函数值随自变量取值“周而复始”规律变化的性质，就是“周期性”. 这种性质可以从数、形两方面来描述，请具体说一说.

3. 什么是“周期函数”和函数的最小正周期？“周期函数”的定义与“奇函数”“偶函数”的定义有什么相似之处？

问题二

如何求一个函数的周期?

阅读教材 p35 的有关内容，自主学习教材例 2，思考并回答下列问题：

1. 如何根据周期函数的定义求教材例 2 中几个函数的周期？

2. 通过解答教材例 2，你认为函数的周期与解析式中的哪些量有关？

问题三

阅读教材 p36、p37 的有关内容，自主解决教材 p37“思考”栏目中的问题，思考并回答下列问题：

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)\omega>0$ 的最小正周期是多少？

自主测评

1. 下列函数中，周期为$\frac{\pi}{2}$的是　(　　)

A. $y=\sin\frac{x}{2}$　　B. $y=\sin2x$

C. $y=\cos\frac{x}{4}$　　D. $y=\cos4x$

2. 函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期为$\frac{\pi}{5}$，其中 $\omega>0$，则 $\omega=$________.

3. 等式 $\sin(30°+120°)=\sin30°$是否成立？如果这个等式成立，那么能否说 $120°$是正弦函数 $y=\sin x$ 的周期？为什么？

4. 已知 $f(x)$是周期为 5 的周期函数，且 $f(1)=2\ 016$，求 $f(11)$的值.

板块三　合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题四

如何运用正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$ 的周期来求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的周期？

板块四　展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题五

求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$周期的方法能否推广到求一般周期函数的周期？即命题："如果函数 $y=f(x)$的周期是 T，那么函数 $y=f(\omega x)$的周期是$\frac{T}{\omega}$"是否成立？

展题设计

展题 1 画出下列函数的图象并填空：

(1)正弦函数 $y=3\sin x$ 的周期是____________________；

(2)余弦函数 $y=\cos 2x$ 的周期是____________________.

指导要求：你是用什么方法画出这两个函数的图象的？通过函数图象你能体会到函数“周而复始”的变化规律吗？请同学们思考：函数图象上、下平移或左、右平移后，它的周期与原函数对比是否发生了变化？如函数 $y=3+3\sin x$ 的周期与函数 $y=3\sin x$ 的周期一样吗？

展题 2 求下列三角函数的周期：

(1)$y=3\cos x$；

(2)$y=\sin 2x$；

(3)$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

指导要求：根据周期函数的定义，问题是要找到一个最小正数 T，对于函数定义域内的每一个 x 值，都有 $f(x+T)=f(x)$. 如第(2)小题，$\sin 2(x+\pi)=\sin 2x$ 成立，所以周期是 π. 解完之后请思考：这些函数的周期与什么有关系？一般的结论是什么？

展题 3 填空：

(1)函数 $y=\sin\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 的周期是________________________；

(2)函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期仅与解析式中的________________________有关，其周期为____________________.

指导要求：通过前面得到的求周期的公式来求此函数的周期，由此归纳得到的一般性结论是什么？因为三角函数的周期是指最小正周期，所以计算函数周期时对自变量的系数 ω 有什么要求？

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会，通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来，以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中，请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

板块五　应用演练，再生新疑

分级设题，精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 下列四个函数中为周期函数的是（　　）

A. $y=3^x$　　B. $y=3x$

C. $y=\sin x$　　D. $y=\frac{1}{x}$

2. 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}|\sin x|$ 的最小正周期为（　　）

A. π　　B. 2π

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

3. 函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的图象的交点的坐标为________.

4. 函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$______.

B. 能力提升

5. 下列函数中，以 π 为周期的偶函数是（　　）

A. $y=|\sin x|$

B. $y=\sin|x|$

C. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

D. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

6. 定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是奇函数又是周期函数. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 π，且当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$f(x)=\sin x$，则 $f\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ 等于（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 给出下列命题：

①将 $y=\cos x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，得到 $y=\sin x$ 的图象；

②将 $y=\sin x$ 的图象向上平移 2 个单位长度，得到 $y=\sin(x+2)$ 的图象；

③将 $y=\cos x$ 的图象向左平移 φ 个单位长度，可得 $y=\cos(x+\varphi)$ 的图象；

④$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到.

其中正确的命题是________（填序号）.

8. 下列函数是否为周期函数：

(1) $f(x)=5$；

(2) $f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$

C. 拓展创新

9. 已知函数 $f(n)=\sin\frac{n\pi}{3}(n\in\mathbf{Z})$，求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(200)$ 的值.

10. 已知函数 $f(x)$ 对定义域中的每个自

变量都有 $f(x+2)=-f(x)$，那么它是周期函数吗？如果是，它的周期是多少？

11. 已知 $f(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-\sin x$，求当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的解析式.

12. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的奇函数，当 $x\in[0,\pi)$ 时，$f(x)=\sin x$；当 $x\in[\pi,2\pi]$ 时，$y=f(x)$ 的图象是斜率为 $\frac{2}{\pi}$ 且在 y 轴上的截距为 -2 的直线在相应区间上的部分.

(1) 求 $f(-2\pi)$，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 的值；

(2) 写出函数 $f(x)$ 的表达式，画出其图象，并根据图象写出函数 $f(x)$ 的单调区间.

再生新疑

1. 大家在学习时可以从两方面来体会正弦函数这种“周而复始”的变化规律：一是可以观察正弦线的变化规律，这一变化规律可以体现在正弦函数的图象上，二是可以思考诱导公式 $\sin(2k\pi+x)=\sin x$ 所反映的函数值的变化规律. 在此基础上就可以理解正弦函数的这一特有性质.

2. 请同学们思考：在本学时的学习中都用到了哪些数学方法？

除此之外，你还有哪些疑问？

第三学时　正弦函数、余弦函数的性质(二)

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

生活中有许多美的事物都具有对称性，如漂亮的蝴蝶，它停飞展翅时就是一幅异常美丽的对称图案.



数学中的对称图形比比皆是，如圆、等腰三角形、正方形等，都体现了数学的美.

正弦函数、余弦函数的图象也很美，它们除具有上一学时学习过的特有性质——周期性以外，还有对称性，除此之外还有哪些性质呢？

材料链接

研究函数就是要讨论函数的性质，本节学习的 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是函数，我们当然也要探讨它们的性质.一般来说，我们是从定义域、值域、奇偶性、单调性、最值等方面来研究函数的性质.

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

正弦函数、余弦函数的奇偶性是如何得到的?

请阅读教材 p37 的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 回顾是如何定义奇函数、偶函数的.奇函数、偶函数的图象有何特征？

2. 正弦函数、余弦函数是否具有奇偶性？

3. 如何判断正弦函数、余弦函数的奇偶性？

问题二

正弦函数、余弦函数的单调性是如何得到的?

请阅读教材 p37、p38 的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 函数在某个区间上是增函数或减函数，其图象有何特征？

2. 观察正弦函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的图象，写出它的单调递增区间和单调递减区间.

3. 利用正弦函数的周期性写出正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的单调区间.

4. 用同样的方法写出余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$的单调区间.

问题三

正弦函数、余弦函数的奇偶性、单调性有哪些方面的应用?

阅读教材p38～p40的有关内容,自主完成教材例3、例4、例5,思考并回答下列问题:

1. 通过求解例3,归纳利用正弦函数和余弦函数的最值可以求哪类函数的最值?

2. 例4是利用函数的单调性比较大小,由此写出解决这类问题的步骤.

3. 例5是利用正弦函数的单调性求函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的单调区间,其中用到了哪些知识?

自主测评

1. 函数$y=1-\sin x$的定义域是______.

2. 函数$y=\sin x+1$的最大值是______,最小值是______,取得最大值时自变量x的集合是______.

3. 函数$y=\cos 2x$是______(填"奇"或"偶")函数.

4. 画出函数$y=-\sin x$的图象并写出函数的单调区间.

板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力

问题四

如何利用正弦函数、余弦函数的单调性求函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$,$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的单调区间?

1. 研究复合函数的单调性的一般方法是什么?

2. ω的正负对求函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$,$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的单调区间有何影响?

3. 归纳求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的单调区间的一般步骤.

板块四 展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题五

试利用正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$ 的性质讨论函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的性质.

展题设计

展题 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=1+\dfrac{1}{1+\sin x}$；

(2) $y=\sqrt{\cos x}$.

指导要求：确定三角函数定义域的依据是什么？函数的定义域就是使函数解析式有意义的自变量 x 的取值集合. 这里首先应写出 x 满足的不等式，(1)式中要使函数解析式有意义，则需要 $1+\sin x\neq 0$；(2)式是二次根式，要使其有意义，则应有 $\cos x\geqslant 0$.

展题 2 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=|\sin 2x|-x\cdot\tan x$；

(2) $f(x)=\dfrac{\cos x(1-\sin x)}{1-\sin x}$.

指导要求：先求函数的定义域，再利用函数奇偶性的定义判定.

三角函数奇偶性的判别主要依据定义，首先判定函数的定义域是否关于原点对称，当函数的定义域关于原点对称时，再计算 $f(-x)$，与 $f(x)$，$-f(x)$ 进行比较.

展题 3 (1) 函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在什么区间上是增函数？

(2) 函数 $y=3\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$ 在什么区间

上是减函数?

指导要求:可依据函数 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 和 $y=\cos x$ $(x\in\mathbf{R})$的单调区间来求本题函数的单调区间.

在解第(2)题时要注意"$\frac{\pi}{3}-2x$"中的负号对单调性的影响,这是解此类问题时的易错点.

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过"知识结构树""思维导图""表格比较"或"学习报告"等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

下面是一位同学的整理,你有更好的吗?

正弦函数、余弦函数的性质

- **正弦函数**
  - **周期性**
  - **奇偶性**
  - **单调性**
- **余弦函数**
  - **周期性**
  - **奇偶性**
  - **单调性**

板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 函数 $y=-\sin 2x$ ( )

A. 为奇函数

B. 为偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数

D. 为非奇非偶函数

2. 下列函数在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上是增函数的是 ( )

A. $y=\sin x$　　B. $y=\cos x$

C. $y=\sin 2x$　　D. $y=\cos 2x$

3. 存在 x,使得 $\sin x\geqslant a$ 成立,则 a 的取值范围是______________.

4. 把下列三角函数值按从小到大的顺序排列起来为______________.

$\sin\frac{4\pi}{5},\sin\frac{32\pi}{5},\cos\frac{5\pi}{12},-\cos\frac{5\pi}{4}$.

B. 能力提升

5. 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$在闭区间 ( )

A. $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数

B. $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上是增函数

C. $[-\pi,0]$上是增函数

D. $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$上是增函数

6. 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$对任意 x 都有 $f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$,则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$的值为 ( )

A. 2 或 0

B. -2 或 2

C. 0

D. -2 或 0

7. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$, $y=f(x)$的图象与直线 $y=2$ 的两个相邻交点间的距离等于 π,则 $f(x)$的单调递增区间是______________.

8. 求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=\lg\sin x$；

(2) $y=2\sqrt{\cos 3x}$.

C. 拓展创新

9. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调增区间；

(2)当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时，求函数 $f(x)$ 的最大值及最小值.

10. 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos\alpha>\sin\beta$，试比较$\alpha+\beta$与$\frac{\pi}{2}$的大小.

11. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{2\pi}{3}\right)$的最小正周期为 π.

(1)求当函数 $f(x)$为偶函数时 φ 的值；

(2)若函数 $f(x)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，求 $f(x)$的单调递增区间.

12. 已知 ω 是正数，函数 $f(x)=2\sin\omega x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$上是增函数，求 ω 的取值范围.

再生新疑

1. 本学时是三角函数的重点内容，学习了正弦函数和余弦函数的性质.请大家回忆，我们是从哪些方面来研究这些性质的？

2. 这一学时的学习使我们进一步体会到了数形结合、转化与化归、类比的思想方法及观察、归纳、从特殊到一般的辩证统一的观点.

除此之外，你还有哪些疑问？

第四学时　正切函数的性质与图象

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

据脍炙人口的《列子·汤问》记载，孔子东游，见两小儿辩日，一儿曰：“日初出苍苍凉凉，及其日中如探汤，此不为近者热而远者凉乎？”事实上，中午的气温较早晨高，主要原因是早晨太阳斜射大地，中午太阳直射大地.在相同的时间，相等的面积上，物体在直射状态下比在斜射状态下吸收的热量多，这就涉及太阳光与地面的角度问题.那么这与正切函数的图象和性质有什么关系呢？

材料链接

我们已经学习了正弦函数和余弦函数的性质，函数的研究具有其本身固有的特征和研究方式.一般来说，对函数性质的研究总是先作图象，通过观察图象获得对函数性质的直观认识，然后再从代数的角度对性质作出严格的表述.

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

正切函数的性质是什么？

请阅读教材 p42、p43 的有关内容，完成“探究”栏目中的问题，思考并回答下列问题：

1. 正切函数的性质是从哪些方面描述的？与正弦函数、余弦函数的描述方向一致吗？

2. 请说出正切函数的性质有哪些？这些性质是怎样得到的？

问题二

如何画正切函数的图象?

阅读教材 p43～p45 的有关内容,自主完成教材例 6,思考并回答下列问题:

1. 我们学习了正弦线、余弦线、正切线,你能画出第四象限角的正切线吗?

2. 我们知道作周期函数的图象一般是先作出长度为一个周期的区间上的图象,然后向左、右扩展,这样就得到了它在整个定义域上的图象.那么我们先选哪一个区间来研究正切函数呢?为什么?

3. 类比正弦函数图象的作法,说说如何用正切线作出正切函数$y=\tan x$,$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的图象.

自主测评

1. 函数 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的定义域为 (　　)

A. $\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

B. $\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq 2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

2. 观察正切曲线,当 $x\in$__________时,$\tan x>0$.

3. 不求值,比较 $\tan 135°$ 与 $\tan 138°$ 的大小.

4. 写出函数 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$,$x\neq k\pi+\frac{3\pi}{10}(k\in\mathbf{Z})$的单调区间及在此区间上的增减性.

板块三　合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题三

教材根据诱导公式、正切线等知识研究了正切函数的性质，试从正切函数的图象出发，讨论正切函数的性质.

问题四

正切函数的性质与正弦函数、余弦函数的性质有什么区别？

1. 正切函数的单调性与正弦函数、余弦函数的单调性有什么不同？

2. 用表格的形式系统地归纳正弦函数、余弦函数、正切函数的图象与性质.

板块四　展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题五

如何利用正切函数 $y=\tan x$ 的性质研究函数 $y=\tan(\omega x+\varphi)$ 的性质？

展题设计

展题 1　(1)求函数 $y=\tan 2x$ 的定义域；

(2)求函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\tan x}$ 的定义域.

指导要求：对于第(1)题，只需将 $2x$ 看成整体，使之满足什么条件就能求得函数的定义域？对于第(2)题，涉及的函数比较多，需要综合考虑哪些方面才能得到所需要的不等式？而得到不等式之后如何来解可求得函数的定义域？

❀展题 2　比较 $\tan\left(-\frac{11\pi}{5}\right)$ 与 $\tan\left(-\frac{17\pi}{7}\right)$ 的大小.

指导要求:如何将正切函数的自变量化到同一单调区间?如何运用函数的单调性比较大小?

❀展题 3　求函数 $y=-\tan^2x+2\tan x+1$ $\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$的最大值和最小值.

指导要求:观察已知可知,函数解析式是二次函数的结构形式,可以采用什么方法求此函数的最值?在解决问题的过程中,自变量的取值范围有什么作用?

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过"知识结构树""思维导图""表格比较"或"学习报告"等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

下面是一位同学的整理,你有更好的吗?

正切函数的性质与图象

- **正切函数的性质**
- **正切函数的图象**

板块五　应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 函数 $y=\tan x\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$在定义域上的单调性为　(　　)

A. 在整个定义域上为增函数

B. 在整个定义域上为减函数

C. 在每一个开区间$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$上为增函数

D. 在每一个开区间$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$上为减函数

2. 对于 $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$,$\tan\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$的大小关系,下列判断正确的是　(　　)

A. $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)<\tan\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$

B. $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)>\tan\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$

C. $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$

D. 大小关系不确定

3. 函数 $y=3\tan\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$的图象的对称中心的坐标是____________.

4. 若函数 $f(x)=2\tan\left(kx+\dfrac{\pi}{3}\right)$的最小正周期 T 满足 $1<T<2$,则自然数 k 的值为________.

B. 能力提升

5. 函数 $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的图象的对称中心是 ( )

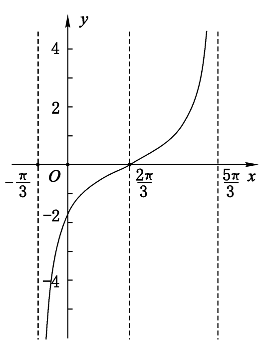
A. $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},0\right),k\in\mathbf{Z}$

B. $\left(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4},0\right),k\in\mathbf{Z}$

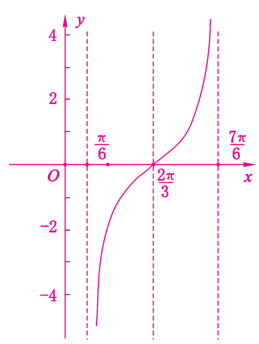
C. $\left(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8},0\right),k\in\mathbf{Z}$

D. $\left(\dfrac{k\pi}{4}-\dfrac{\pi}{8},0\right),k\in\mathbf{Z}$

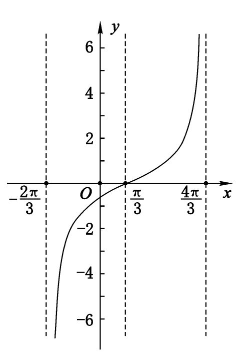
6. 函数 $y=\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$在一个周期内的图象是 ( )



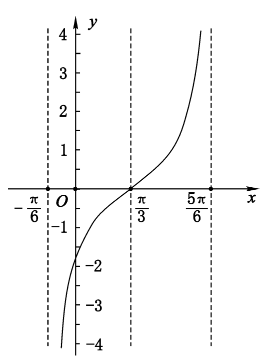
A



B



C



D

7. 函数 $y=\sin x+\tan x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$的值域为____________.

8. 比较大小:

(1)$\tan125°$与 $\tan137°$;

(2)$\tan\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$与 $\tan\left(-\dfrac{11\pi}{5}\right)$.

C. 拓展创新

9. 利用函数图象解不等式 $-1\leqslant\tan x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

10. 已知函数 $f(x)=-\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$,求函数 $f(x)$的最小正周期,判断函数 $f(x)$的奇偶性,并求其单调区间.

11. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，函数 $F(x)=f(\tan x)$.

(1)判断 $F(x)$的奇偶性并加以证明；

(2)求证：方程 $F(x)=0$ 至少有一个实根.

12. 已知函数 $f(x)=-\tan^2x+\tan x+m$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. 若 $1\leqslant f(x)\leqslant 5$ 恒成立，求 m 的取值范围.

再生新疑

1. 观察正切函数的图象，你是否发现它是中心对称图形？你能说出它的对称中心吗？它是轴对称图形吗？

2. 本学时的研究方法是由数及形、由形及数相结合，这也是我们研究函数的基本方法. 特别是还运用了类比的方法，数形结合、化归的数学思想. 请同学们思考总结：这种多角度观察、探究问题的方法对我们今后的学习有什么指导意义？

除此之外，你还有哪些疑问？

1.5 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象

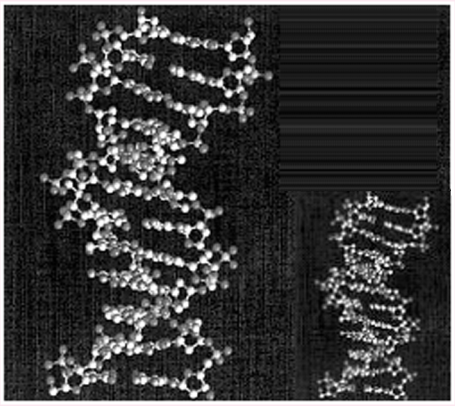
第一学时 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象(一)

板块一 创设问题,引领目标

导入问题,直指学时重点

问题呈现

在生物实验室里,我们看到的 DNA 双螺旋结构模型是学习生物遗传知识的重要模型,它把 DNA 分子的结构直观地展现在我们面前.实际上,根据研究的不同需要,这样的模型存在大小之分,但其形状却总是与正弦曲线相似.在制作这些模型时应根据需要进行大小调整,那么你能理解大小调整的思想与方法吗?



材料链接

1. 在物理和工程技术的许多问题中,都要遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的函数(其中 A,ω,φ 是常数).例如,物体做简谐振动时位移 y 与时间 x 的关系,交流电中电流 y 与时间 x 的关系等,都可以用这类函数来表示.这些问题的实际意义往往可从其函数图象上直观地看出.

2. 从解析式来看,函数 $y=\sin x$ 与函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$存在着怎样的关系?从图象上看,函数 $y=\sin x$ 与函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$存在着怎样的关系?

板块二 自学思疑,初探问题

尊重认知规律,亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

参数 φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象有怎样的影响?

请阅读教材 p49、p50 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 观察交流电的电流随时间变化的图象,它与正弦曲线有何关系?你认为可以怎样讨论参数 φ,ω,A 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变化的影响?

2. 分别在函数 $y=\sin x$ 和函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象上各恰当地选取一个纵坐标相同的点,沿两条曲线同时移动这两点,并保持它们的纵坐标相等,观察它们的横坐标有何关系.由此可得函数 $y=\sin x$ 和函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象有何关系?

3. 请概述如何由正弦曲线 $y=\sin x$ 经过图象变换得到函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象.

问题二

参数 ω 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象有怎样的影响?

阅读教材 p50、p51 的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 分别在函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 和函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上各恰当地选取一个纵坐标相同的点，沿两条曲线同时移动这两点，并保持它们的纵坐标相等，观察它们的横坐标有何关系. 由此可得函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 和函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象有何关系？

2. 请概述如何由正弦曲线 $y=\sin x$ 经过图象变换得到函数 $y=\sin\omega x$ 的图象.

问题三

参数 A 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象有怎样的影响?

阅读教材 p51、p52 的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 分别在函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 和函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上各取一个横坐标相同的点，沿两条曲线同时移动这两点，并使它们的横坐标保持相同，观察它们的纵坐标有何关系. 由此可得函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 和函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象有何关系？

2. 请概述如何由正弦曲线 $y=\sin x$ 经过图象变换得到函数 $y=A\sin x$ 的图象.

问题四

用什么方法来画出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图?

阅读教材 p52～p54 的有关内容，自主完成教材例 1，思考并回答下列问题：

1. 请将教材 p52 得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象的过程填写完整，并体会其中的含义.

2. 教材中怎样由函数 $y=\sin x$ 的图象变换得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象？可否先伸缩后平移？怎样先伸缩后平移？

自主测评

已知函数 $y=\sin x$ 的图象为 C.

1. 为了得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象,只需把 C 上所有的点__________;

2. 为了得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象,只需把 C 上所有的点______________________________;

3. 为了得到函数 $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象,只需把 C 上所有的点______________________________;

4. 为了得到函数 $y=\sin x+3$ 的图象,只需把 C 上所有的点__________.

板块三　合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力

问题五

如何理解参数 φ,ω,A 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变化的影响?

1. 由函数 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换可得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象? 在此过程中,参数 φ,ω,A 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象有怎样的影响?

2. 由函数 $y=\sin x$ 的图象经过一系列变换得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象,这一过程体现了什么数学思想?

板块四　展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题六

如何画出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象?

1. 如何确定"五点法"中五个点的横坐标?

2. 写出由函数 $y=\sin x$ 的图象变换得到函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象的尽可能多的方法.

展题设计

展题 1　画出下列函数的简图：

(1) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right), x\in\mathbf{R}$；

(2) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), x\in\mathbf{R}$.

指导要求： 这两个函数的周期均为 2π，可以先在一个周期的闭区间内用什么方法画出函数的简图？再将图象进行怎样的平移可得到函数在定义域内的图象？

展题 2　画出下列函数的简图：

(1) $y=\sin 2x, x\in\mathbf{R}$；

(2) $y=\sin\frac{1}{2}x, x\in\mathbf{R}$.

指导要求： 这两个函数的周期分别是多少？怎样画出函数在一个周期的闭区间内的简图？再将图象进行怎样的变换可得到函数在定义域内的图象？

展题 3　画出下列函数的简图：

(1) $y=2\sin x, x\in\mathbf{R}$；

(2) $y=\frac{1}{2}\sin x, x\in\mathbf{R}$.

指导要求： 这两个函数的周期都是 2π，怎样画出函数在一个周期的闭区间内的简图？再将图象进行怎样的变换可得到函数在定义域内的图象？

展题 4　用"五点法"作函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期的闭区间上的简

图,并指出函数的单调区间.

指导要求:用“五点法”作图,怎样确定五个关键点?如何描出这五个点并连线画出函数的图象?怎样求出函数的单调区间?

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

板块五 应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 函数 $y=3\sin 3x$ 的图象可以看成是 $y=\sin 3x$的图象按下列哪种变换得到的 ( )

A. 横坐标不变,纵坐标变为原来的$\frac{1}{3}$倍

B. 横坐标不变,纵坐标变为原来的 3 倍

C. 纵坐标不变,横坐标变为原来的$\frac{1}{3}$倍

D. 纵坐标不变,横坐标变为原来的 3 倍

2. (2016 · 全国卷 Ⅰ)若将函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移$\frac{1}{4}$个周期后,所得图象对应的函数为 ( )

A. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

B. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

D. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

3. 把函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 图象上各点的横坐标变为原来的$\frac{1}{4}$倍,可得到函数________的图象.

4. 已知函数 $y=A\sin\omega x(A>0,\omega>0)$的最大值是 3,最小正周期是$\frac{\pi}{5}$,则这个函数的解析式是________.

B. 能力提升

5. 把函数 $y=\sin x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度后,再把各点的横坐标变为原来的 2 倍,得到的函数的解析式为 ( )

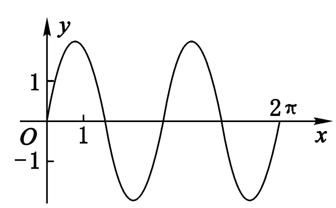
A. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)$

B. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)$

C. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$

D. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

6. 已知函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$在区间$[0,2\pi]$上的图象如下:



那么 ω 的值为 ( )

A. 1　　B. 2

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

7. 为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，可以将函数 $y=\cos 2x$ 的图象向右平移______个单位长度.

8. 用"五点法"在同一平面直角坐标系中作出下列函数的简图：

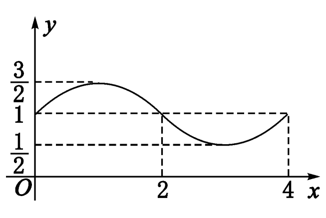
(1) $y=\sin x$；

(2) $y=3\sin x$；

(3) $y=3\sin\frac{1}{3}x$.

C. 拓展创新

9. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的图象如图，则 $f(x)$ 的解析式及 $S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2\ 016)$ 的值分别为　　(　　)



A. $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2\pi x+1, S=2\ 016$

B. $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x+1, S=2\ 017$

C. $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x+1, S=2\ 018\frac{1}{2}$

D. $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x+1, S=2\ 019\frac{1}{2}$

10. (1) 利用"五点法"画出函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在一个周期的闭区间内的简图；

(2) 说明该函数图象可由 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到.

11. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度，得到的函数图象恰好关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，求 φ 的最小值.

12. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+a+1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 4，求 a 的值；

(3) 在(2)的条件下，求满足 $f(x)=1$，且 $x\in[-\pi,\pi]$ 的 x 的取值集合.

再生新疑

1. 如何画三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象呢？你有哪几种方法？

2. 通过本学时的学习，你对三角函数的图象和解析式是否有新的认识？在本学时的学习中你还有哪些收获？

除此之外，你还有哪些疑问？

第二学时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象(二)

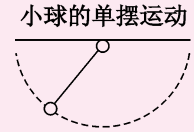
板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

物体振动时，若决定其位置的坐标按余弦(或正弦)函数规律随时间变化，这样的振动称为简谐运动，如图所示的单摆模型. 描述简谐运动的特征函数是 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$.

小球的单摆运动



这样的函数的图象是什么？这个函数有什么性质呢？

材料链接

在物理和工程技术的许多问题中，都要遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的函数(其中 A，ω，φ 是常数). 例如，物体做简谐振动时位移 y 与时间 x 的关系，可用这类函数来表示. 这些问题的实际意义往往可从其函数图象上直观地看出. 因此，我们有必要画好这些函数的图象.

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

物理中，描述简谐运动的物理量有哪些？

阅读教材 p54、p55 的有关内容，自主完

成教材例 2,思考并回答下列问题:

1. 简谐运动 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中是如何定义振幅、周期、频率的?

2. 简谐运动 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中的振幅、周期、频率等与解析式中的 A,ω,φ 有何关系?

自主测评

1. 把函数 $y=\sin 2x$ 的图象向______平移______个单位长度得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

2. 函数 $y=6\sin\left(\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的振幅是______,周期是______,频率是______,初相是______,图象最高点的坐标是______.

疑点归纳

通过上面的学习,我们知道了掌握函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质要借助于图象,作图时要注意方法.类比正弦函数的性质,作图时要画出性质来,读图时更要读出性质.还有一个疑惑:由函数 $y=\sin x$ 的图象变换得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象有多少种不同的方法?

你还有什么疑惑,赶紧记录在问题卡上,和你的同学、老师交流解答吧!

板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力

问题二

如何根据函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象确定它的解析式中 A,ω,φ 的值?

板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

展题设计

展题 1 将函数 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,再保持图象上的点的纵坐标不变,横坐标变为原来的 2 倍,得到的曲线与 $y=\sin x$ 的图象相同,则 $y=f(x)$ 是 ( )

A. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

B. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

C. $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$

D. $y=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$

指导要求: 这是一个三角函数图象变换问题,解题的思路是什么?由函数 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换可以得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象?

❀展题 2　(1)把函数 $y=\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象适当变换就可以得到 $y=\sin(-3x)$ 的图象,这种变换可以是　(　　)

A. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

B. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

D. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

(2)函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象经过下列哪种变换得到　(　　)

A. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍,纵坐标变为原来的 3 倍

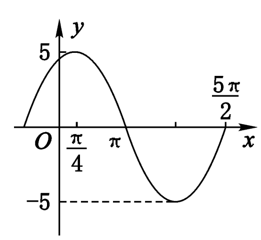
B. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍,纵坐标变为原来的 3 倍

C. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,横坐标变为原来的 2 倍,纵坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$ 倍

D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍,纵坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$ 倍

指导要求: 三角函数图象变换问题的常规题型是:已知函数和变换方法,求变换后的函数或图象. 此题是已知变换前后的函数,求变换方式的逆向型题目,解题的思路是什么?

❀展题 3　如图所示是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的部分图象,由图中条件,写出该函数的解析式.



指导要求: 本题考查利用函数图象解题的能力和对函数图象变换的理解和掌握. 解这类题时要充分认识函数图象的有用信息,并将其转化成解题的步骤. 由函数图象中的哪些点可知 A 的值?怎样求函数的周期,从而确定 ω 的值?怎样求得 φ 的值?

❀展题 4　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的最小值是$-2$,其图象相邻最高点与最低点的横坐标之差是$3\pi$,又图象过点$(0,1)$,求函数的解析式.

指导要求:本题虽然没有给出函数图象,但实质也是已知三角函数图象的有关条件,求三角函数解析式的问题.由函数的最小值是-2,可以知道A的值是多少?由图象相邻最高点与最低点横坐标之差是3π,可以知道函数的周期是多少?如何求得φ的值?

归纳总结

请根据自己对本学时内容的学习和体会,通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“学习报告”等方式将你和你们小组的成果及时记录下来,以便和别的小组进一步交流研讨.

在总结过程中,请从知识及其联系、经验、方法等方面予以梳理.

下面是一位同学的整理,你有更好的吗?

作$y=\sin x$在长度为2π的某闭区间上的图象

向左(右)平移$\lvert\varphi\rvert$个单位长度 ↓	横坐标变为原来的$\frac{1}{\omega}$倍 ↓
得$y=\sin(x+\varphi)$	得$y=\sin\omega x$
横坐标变为原来的$\frac{1}{\omega}$倍 ↓	向左(右)平移$\left\lvert\frac{\varphi}{\omega}\right\rvert$个单位长度 ↓
得$y=\sin(\omega x+\varphi)$	得$y=\sin(\omega x+\varphi)$
纵坐标变为原来的A倍 ↓	纵坐标变为原来的A倍 ↓

得$y=A\sin(\omega x+\varphi)$在一个周期闭区间上的图象,再扩充到$\mathbf{R}$上

(其中$A>0,\omega>0$)

板块五　应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A.基础巩固

1.函数$y=\sin\frac{3}{2}x$的图象可以看成是将$y=\sin x$的图象上所有点的横坐标变为原来的m倍而得到的(纵坐标不变),则m的值为　(　　)

A.$\frac{3}{2}$　　B.$\frac{2}{3}$　　C.$\frac{4}{3}$　　D.$\frac{3}{4}$

2.将函数$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)(x\in\mathbf{R})$的图象上所有的点向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度,再把图象上各点的横坐标变为原来的2倍(纵坐标不变),则所得到的图象的解析式为　(　　)

A.$y=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)(x\in\mathbf{R})$

B.$y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{12}\right)(x\in\mathbf{R})$

C.$y=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)(x\in\mathbf{R})$

D.$y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{24}\right)(x\in\mathbf{R})$

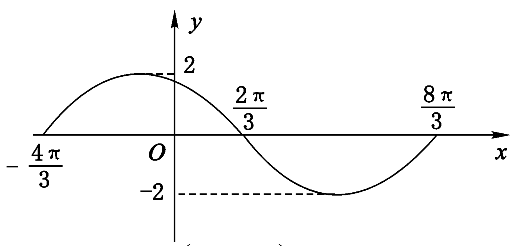
3.函数$y=\frac{1}{5}\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$的定义域是__________,值域是________,周期是________,振幅是________,

频率是________,初相是________.

4. 函数 $y=g(x)$ 的图象过点(2,1),则函数 $y=g\left(\frac{1}{2}x\right)$ 的图象必过的点是________.

B. 能力提升

5. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在一个周期上的图象如图所示,则该函数的解析式是 ( )



A. $y=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)$

B. $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)$

C. $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)$

D. $y=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

6. 已知 $\omega>0$,$0<\varphi<\pi$,直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 和 $x=\frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的两条相邻的对称轴,则 φ 等于 ( )

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

7. 有以下说法:

①函数 $y=A\sin\omega x$ 的最大值是 A,最小值是 $-A$;

②函数 $y=A\sin\omega x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$;

③函数 $y=-3\sin 4x$ 的振幅是 3,最大值是 3,最小值是 -3,周期是 $T=\frac{\pi}{2}$.

上述说法中正确的是______(填序号).

8. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B\left(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的一系列对应值如下表:

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{6}$
y	-1	1	3	1	-1	1	3

(1)根据表中提供的数据求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)根据(1)的结果,若函数 $y=f(kx)$ $(k>0)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$,当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时,方程 $f(kx)=m$ 恰有两个不同的实数解,求实数 m 的取值范围.

C. 拓展创新

9. 函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi x}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$ $(0\leqslant x\leqslant 9)$ 的最大值与最小值之和为 ( )

A. $2-\sqrt{3}$　　B. 0

C. -1　　D. $-1-\sqrt{3}$

10. 若将函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，与函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象重合，则 ω 的最小值为 ( )

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

11. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象的一个最高点为$(2,2\sqrt{2})$，由这个最高点到相邻最低点时图象与 x 轴交于点$(6,0)$.

(1)求函数 $f(x)$的解析式；

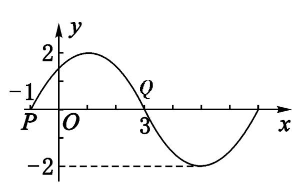
(2)求函数 $f(x)$的单调递增区间.

12. 如图所示为正弦函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$在一个周期内的图象.

(1)写出 $f(x)$的解析式；

(2)将函数 $f(x)$的图象向右平移 2 个单位长度后得到函数 $g(x)$的图象，写出 $g(x)$的解析式；

(3)指出 $g(x)$的周期、频率、振幅、初相.



再生新疑

通过本学时的学习，大家要体会由简单到复杂、由特殊到一般、由具体到抽象的化归思想，数形结合的思想，待定系数法以及数学的应用价值等.

除此之外，你还有哪些疑问？