模块整体感悟

模块知识梳理

- 不等式选讲
  - 不等式的性质
    - 不等式的基本性质
    - 绝对值不等式的性质
  - 简单的含绝对值不等式的解法
  - 不等式的证明
    - 基本方法 → 比较法、分析法、综合法
    - 其他方法 → 反证法、放缩法、数学归纳法
  - 重要不等式 → 平均值不等式、绝对值三角不等式、柯西不等式、排序不等式、贝努利不等式
    - 柯西不等式 → 二维形式、向量形式、一般形式

学法点拨

1. 不等式的性质是研究不等式的基础.研究不等式时要注意其中蕴涵的数学思想方法:含有绝对值的不等式——体现了数形结合、分类讨论和函数与方程的思想;基本不等式、柯西不等式和排序不等式——体现了由特殊到一般,由直观到抽象,由简单到复杂的数学思想和等价转化思想;数学归纳法是重要的数学思想——实现了从有限到无限的飞跃.

2. 证明不等式的出发点是不等式的基本性质、基本不等式和经典不等式.

3. 数学归纳法是证明数学问题的一种重要方法,在应用的过程中,要逐步体会和理解它的本质.

4. 不等式有着广泛的应用.在应用不等式时,要注意方法与技巧的运用,使其满足不等式的条件,从中体会数学变换的魅力和不等式应用的广泛性.

第一讲　不等式和绝对值不等式

本讲学习导航

先行一步，步步先行

内容概要

本讲是不等式选讲的第一讲，本讲是在复习已学不等式知识(《数学 5》中不等式的性质、二元基本不等式等)的基础上，继续学习三个正数的算术—几何平均不等式、绝对值三角不等式、绝对值不等式的解法.

《课程标准》要求

内容标准	学习要求
复习不等式的基本性质和基本不等式.	1. 通过复习不等式的性质和基本不等式，为进一步学习其他不等式打基础. 2. 能运用不等式的“三歧性”比较两个数的大小. 3. 能运用不等式的性质推导一些简单不等式，特别要注意一些不等式性质成立的条件. 4. 知道二元、三元基本不等式成立的条件，并能运用二元、三元基本不等式求一些特殊函数的最值或证明一些简单的不等式. 体会基本不等式的变元过程. 5. 通过基本不等式的实际应用，体会建模的思想.
理解绝对值的几何意义，并能利用绝对值不等式的几何意义证明以下不等式： (1) $\|a+b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$； (2) $\|a-b\|\leqslant\|a-c\|+\|c-b\|$.	1. 体会利用绝对值不等式的几何意义和分类讨论的思想证明定理 1 和定理 2. 2. 能利用这两个不等式证明一些简单的含有绝对值的不等式或求含有绝对值的不等式的最值.
会利用绝对值的几何意义求解以下类型的不等式： (1) $\|ax+b\|\leqslant c$； (2) $\|ax+b\|\geqslant c$； (3) $\|x-c\|+\|x-b\|\geqslant a$； (4) $\|x-c\|+\|x-b\|\leqslant a$.	1. 会解不等式 $\|ax+b\|\leqslant c$ 和 $\|ax+b\|\geqslant c$. 2. 会用“取零点分段讨论法”“构造函数法”或“绝对值不等式的几何意义”解不等式 $\|px-c\|+\|qx-b\|\geqslant a$ 和 $\|px-c\|+\|qx-b\|\leqslant a$. 3. 能利用分离变量的方法解决不等式 $\|px-c\|+\|qx-b\|\geqslant a$ 或 $\|px-c\|+\|qx-b\|\leqslant a$ (p,q,b,c 为常数，a 为参数)恒(或能)成立问题.

学法指导

1. 不等式的性质是进一步学习其他不等式的理论依据和基础，二元基本不等式是三元基本不等式的基础，绝对值不等式是数轴知识的扩展.

2. 基本不等式和含有绝对值的不等式有深刻的数学意义和几何背景. 在学习过程中，应特别注意理解这些不等式的几何背景及其蕴涵的数学思想，尽可能借助几何直观来理解和证明这些不等式，从中领悟数形结合等重要数学思想在研究不等式中的作用.

3. 基本不等式有着广泛的应用，应用基本不等式时要注意等价转化思想的运用；运用基本不等式解决实际问题时，要体会建模思想的作用.

4. 研究含有绝对值的不等式问题时，要注意分类讨论思想的运用.

5. 本讲的重点是解含有绝对值的不等式，解决含有两个绝对值的不等式的最值问题. 要认真学习掌握教材 p17 例 5 的三种解法及其蕴涵的数学思想.

一、不等式

第一学时　不等式的基本性质

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

同学们，在小学数学中，我们就已经知道，任意两个数都有大小关系，那么比较两个数大小的原理、方法和技巧是什么呢？在小学，我们只是能直观判断两个有理数的大小；在初中，我们借助数轴可以比较两个实数的大小. 但都没有从理论上探讨这些问题，是因为那时我们没有能力来研究这些问题. 今天我们要系统地学习不等式的相关知识，就有必要搞清这些问题.

等式有许多性质，哪些性质能够类比到不等式，哪些性质不能类比到不等式呢？请思考探究.

材料链接

1. 在《数学 1》中，证明函数的单调性时，用作差的方法来比较两个数的大小，它的理论依据就是比较两个实数大小的原理，即不等式的“三歧性”.

2. 在《数学 5》中，已经介绍过不等式的 8 个基本性质，今天重新提及这些性质，有两个原因，其一，它是进一步学习其他不等式的基础；其二，我们将对不等式的性质进行进一步的学习和研究.

3. 通过比较具体数的大小，概括出其一般原理，体现了数学中由感性到理性、由具体到抽象的思维方法，是数学学习中经常使用

的思想方法. 在学习过程中要注意学习和体会这种数学思想方法.

板块二 自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

如何比较两个实数的大小?

请阅读教材 p2、p3“探究”栏目之前的内容，思考并回答下列问题：

1. 比较两个实数大小的原理可以简称为实数的“三歧性”. 它的具体内容是什么？请你默写. 它的几何意义又是什么？

2. “三歧性”将“比大小”的问题转化为“求差判断符号”的问题. 结合教材中的例 1，说一说例 1 中比较两个实数的大小采用的是什么方法，请你给它起一个名字.

3. 比较两个实数的大小时，作差后要进行变形(分解因式或配方)，以便判断差的正负. 那么变形要求达到什么程度？可以结合教材中的例 1 和下面的例子进行分析：

已知 $x \neq \pm 1$，试比较 x^6+1 与 x^4+x^2 的大小.

问题二

如何理解、运用不等式的性质?

请阅读教材 p3～p5 的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 不等式的性质有哪些？请默写.

2. 给不等式的性质起一个名字能帮助我们更好地记忆. 如：不等式性质(2)可称之为“传递性”，能否给不等式的其他性质也起一个名字，便于我们记忆和运用呢？请试一试吧，展示大家的概括能力和抽象思维能力.

自主测评

1. 若 $a<b<0$，则 ( )

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $0<\frac{a}{b}<1$

C. $ab>b^2$　　D. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$

2. 若 $x>1$，则 x^3-1 与 x^2-x 的大小关系为 ( )

A. $x^3-1>x^2-x$　　B. $x^3-1<x^2-x$

C. $x^3-1\geqslant x^2-x$　　D. $x^3-1\leqslant x^2-x$

3. 若 $0<b<a$，$d<c<0$，则下列不等式必成立的是 ( )

A. $ac>bd$　　B. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

C. $a+c>b+d$　　D. $a-c>b-d$

板块三 合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题三

类比等式的性质，同学们还能给出不等式的哪些性质？并进行证明 .

1. 如果 $a+b=c$，那么 $a=c-b$. 类比等式的这个性质，你能得到不等式的什么性质？

2. 如果 $a=b$，$c=d$，那么 $ac=bd$。类比等式的这个性质，得到的不等式是否成立？若使它成立，需添加什么条件？

3. 仿照上面问题 1、2 中的类比，请大家把类比得到的不等式的性质汇总在下面：

问题四

运用不等式的性质时要注意什么？

1. 若 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\alpha-\beta$ 的取值范围是________.

解：$\because\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$， ①

$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$， ②

$\therefore\ -\frac{\pi}{2}<-\beta<\frac{\pi}{2}$. ③

①＋③，得 $-\pi<\alpha-\beta<\pi$.

你认为上面的解法有问题吗？如果有问题，问题出在哪里？这对我们运用不等式的性质有何启发？

2. 已知 $-2<x<3$，$-17<y<-11$，求 $\frac{x^2}{y-1}$ 的取值范围.

解：$\because\ -2<x<3$，

$\therefore\ 0\leqslant x^2<9$. ①

又 $-17<y<-11$，

$\therefore\ -18<y-1<-12$，

$\therefore\ -\frac{1}{12}<\frac{1}{y-1}<-\frac{1}{18}$. ②

①×②，得 $0\leqslant\frac{x^2}{y-1}<-\frac{1}{2}$.

以上的解法错在何处？它告诉我们运用不等式的性质时要注意哪些问题？

3. 由上面问题 1、2 可知，运用不等式的性质时，要注意其成立的前提条件. 在不等式的性质中，哪些不等式有成立的前提条件（即范围）呢？请把它们写在下面.

4. 若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. 请你再加一个条件，使这个不等式成立.

问题五

比较两个实数的大小还有其他方法吗？

1. 若$\frac{A}{B}>1$，当 $B>0$ 时，A 与 B 的大小关系如何？当 $B<0$ 时呢？

大家能从中悟出比较两个实数的大小的另一种方法吗？其依据是不等式的哪条性质？

2. 上个问题中比较两个实数大小的方法叫作商法. 运用作商法，你能证明不等式的性质(5)吗？

3. 用作差法或作商法比较两个实数的大小时，如果差的正负或商与 1 的大小关系不确定，如何处理？

请结合下面的题目进行分析：

若 a 为实数，则$\frac{1}{1-a}$与 $1+a$ 的大小关系为__________.

板块四 展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

展题设计

展题 1 若 $a>b>0$，且 $c>d>0$，试猜想$\frac{a}{d}$与$\frac{b}{c}$的大小，并证明你的结论.

指导要求：比较两个实数的大小的最基本、最重要的方法是什么？考虑到本题中两个数均为正数，是否可以考虑比较它们的商与 1 的大小呢？

展题 2 对于实数 a,b,c，有下列命题：

①若 $a>b$，则 $ac<bc$；

②若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；

③若 $a<b<0$，则 $a^2>ab>b^2$；

④若 $a>b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

⑤若 $c>a>b>0$，则$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

其中真命题的个数是 ( )

A. 2 B. 3

C. 4 D. 5

指导要求：要说明一个不等式成立，需要进行证明；要说明一个不等式不成立，只要举出反例即可. 你可以试试吗？

归纳总结

- 不等式的基本性质
  - 基本原理
    - $a-b>0\Leftrightarrow a>b$;
    - $a-b=0\Leftrightarrow a=b$;
    - $a-b<0\Leftrightarrow a<b$
  - 性质
    - ①$a>b\Leftrightarrow b<a$;
    - ②$a>b,b>c\Rightarrow a>c$;
    - ③$a>b\Rightarrow a+c>b+c$;
    - ④$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$,
      $a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$;
    - ⑤$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$;
    - ⑥$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$;
    - ⑦$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$;
    - ⑧$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$
  - 比较两个实数的大小的方法
    - ①作差法;
    - ②作商法
  - 重要结论:$ab>0,a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

板块五　应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 若 $x>y,m>n$,则下列不等式正确的是 (　　)

A. $x-m>y-n$

B. $mx>ny$

C. $\frac{x}{n}>\frac{y}{m}$

D. $m-y>n-x$

2. (2018·北京)能说明"若 $a>b$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"为假命题的一组 a,b 的值依次为________.

3. 已知 a,b,c 满足 $c<b<a$,且 $ac<0$,那么下列选项不一定成立的是 (　　)

A. $ab>ac$

B. $c(b-a)>0$

C. $cb^2<ab^2$

D. $ac(a-c)<0$

4. 设 a,b 为实数,则"$0<ab<1$"是"$b<\frac{1}{a}$"的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

B. 能力提升

5. 若 $a>0,b>0$,则 $a^b b^a$ 与 $a^a b^b$ 的大小关系为 (　　)

A. $a^b b^a<a^a b^b$

B. $a^b b^a>a^a b^b$

C. $a^b b^a\leqslant a^a b^b$

D. $a^b b^a\geqslant a^a b^b$

6. 若 $a>b>0,c<d<0$,则一定有 (　　)

A. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　B. $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

C. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$　　D. $\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$

7. 若 $a<0,b<0$,则 $p=\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}$ 与 $q=a+b$ 的大小关系为 (　　)

A. $p<q$　　B. $p\leqslant q$

C. $p>q$　　D. $p\geqslant q$

8. 已知 $60<x<84,28<y<33$,则 $\frac{x}{y}$ 的取值范围是________.

C. 拓展创新

9. 设实数 a,b,c 满足 $b+c=6-4a+3a^2$，$c-b=4-4a+a^2$，试比较 a,b,c 的大小关系.

10. 若 $a>b>c$，则 $a^2b+b^2c+c^2a$ 与 $ab^2+bc^2+ca^2$ 的大小关系是________________________.

再生新疑

研究两个实数的大小关系是本学时的主要目的. 那么学习了本学时的内容后，大家能比较 a^2+b^2 与 $2ab$ 的大小关系吗? $a+b$ 与 $2\sqrt{ab}$ 呢?

除此之外，同学们还有什么新的问题?

第二学时　基本不等式

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

随着人们生活水平的不断提高，私家车越来越多，交通拥堵时有发生. 为了缓解这种现状，在某交通拥堵路段，交通部门规定：在此路段内的车距 d(m) 正比于车速 v(km/h) 的平方与车身长 s(m) 的积，且最小车距不得小于半个车身长. 假定车身长约为 s(m)，且车速为 50(km/h) 时，车距恰为车身长 s. 问交通繁忙时，应规定怎样的车速，才能使此路段的车流量 Q 最大? $\left(Q=\dfrac{1\,000v}{d+s}\right)$

解决这个问题要用到哪些数学知识? 解决问题的过程中体现了什么数学思想?

材料链接

1. 在《数学 1》中，研究函数的单调性时，我们介绍过对勾函数 $y=x+\dfrac{a^2}{x}(a\neq 0)$，利用其单调性可以求一些函数的最(极)值，和利用《数学 5》中基本不等式求最值的结果是一致的，但在一些情况下用基本不等式求最值更快捷、方便.

2. 在《数学 5》中，已经介绍过基本不等式，今天又提及它，为的是进一步研究三元均值不等式.

3. 基本不等式既是上一学时比较两个实数大小知识的延续，又是为下学时学习三元均值不等式奠定基础，起到承前启后的作用.

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

如何理解重要不等式和基本不等式？

请阅读教材 p5、p6“探究”栏目之前的内容，思考并回答下列问题：

1. 从几何的角度解释基本不等式对理解基本不等式有何帮助？它能作为证明基本不等式的方法吗？

2. 重要不等式和基本不等式各自成立的条件是什么？等号何时成立？

3. 重要不等式和基本不等式还有哪些变形形式？请把它们列举出来.

问题二

如何运用基本不等式求最值？

请阅读教材 p6～p8 例 3、例 4 的内容，思考并回答下列问题：

1. 利用基本不等式求函数的最值时，必须同时满足什么条件？请简要概括出来.

2. 教材例 3 后面给出了用基本不等式求最值时需满足的条件. 请用类比的方法写出用重要不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 及其变形 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$ 求最值时需满足的条件.

自主测评

1. 下列判断正确的是　　(　　)

A. 若 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 0$，则 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$

B. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq 0$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$

C. 若 $a\geqslant 2$，则 $a+\frac{1}{a}$ 的最小值为 2

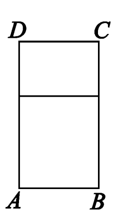
D. 若 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 0$，则 $|x|+\frac{1}{|x|}$ 的最小值为 2

2. 设 $f(x)=\ln x$，$0<a<b$，若 $p=f(\sqrt{ab})$，$q=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，$r=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$，则下列关系式正确的是　　(　　)

A. $q=r<p$　　B. $q=r>p$

C. $p=r<q$　　D. $p=r>q$

3. 要制作如图所示的铝合金窗框，当窗户采光面积为一常数 S 时(中间横梁的面积忽略不计)，要使所用的铝合金材料最省，窗户的宽 AB 与高 AD 的比应为________.



板块三 合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题三

大家对基本不等式理解到位了吗？

1. 运用基本不等式求最值时，需要满足"一正、二定、三相等". 如何才能满足这三个条件呢？这里运用了什么数学思想？

请结合下面的题目进行分析：

若 $x<1$，求函数 $y=x+\dfrac{1}{x-1}$的最大值.

2. 大家能利用基本不等式求 $f(x)=\sin x+\dfrac{4}{\sin x}(0<x<\pi)$的最小值吗？请同学们发挥聪明才智，相互合作来完成它. 从中大家能体会到什么？

3. 求函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{4}{\sin x}(0<x<\pi)$的最小值时采用下面的方法：

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}+\frac{3}{\sin x}$$

$$\geqslant 2\sqrt{\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}}+3,$$

当且仅当 $\sin x=\dfrac{1}{\sin x}$，即 $\sin x=1$ 时，$f(x)$取得最小值 5.

这个解法对你有何启示？

板块四 展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题四

运用基本不等式求最值时，需要注意什么？

1. 结合教材例 4 和《数学 5》p99～p101 中的有关例题和习题，说明运用基本不等式解决实际应用问题时，数学模型是什么结构形式？请把你想到的写出来.

2. 在运用基本不等式求解数学模型的过程中，取得最值时的 x 不在实际问题所要求的范围内时，说明什么？这时应如何处理？

展题设计

展题 1 （1）已知 $x>0$，$y>0$，$x+2y+2xy=8$，则 $x+2y$ 的最小值是 （ ）

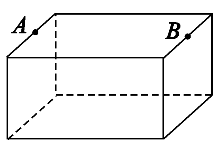
A. 3　　B. 4

C. $\dfrac{9}{2}$　　D. $\dfrac{11}{2}$

(2)设 x,y,z 均为正数,且 $x^2-3xy+4y^2-z=0$,则 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时,$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$ 的最大值为________.

指导要求:运用基本不等式求最值的关键是通过巧妙的变形或配凑,使其满足求最值的三个条件.

❀**展题 2**　如图,为处理含有某种杂质的污水,要制造一底宽为 2 m 的长方体无盖沉淀箱,污水从 A 孔流入,经沉淀后从 B 孔流出.设箱体的长度为 a m,高度为 b m,已知流出的水中,该杂质的质量分数与 a,b 的乘积 ab 成反比.现有制箱材料 60 m^2,问 a,b 各为多少米时,经沉淀后流出的水中,该杂质的质量分数最小?(A,B 孔的面积忽略不计)



指导要求:如何建立 a,b 与 60 的关系?如何把杂质的质量分数与 a,b 联系起来呢?基本不等式的结构特征是什么?需要经过怎样的变形?

归纳总结

不等式	$a^2+b^2\geqslant 2ab$	$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$	$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$
成立的范围及等号成立的条件	$a,b\in\mathbf{R}$ 时,不等式成立,$a=b$ 时,等号成立			$a,b>0$ 时,不等式成立,$a=b$ 时,等号成立
应用	(1)证明其他不等式;(2)求最值			
求最值时需要满足的条件	一定、二相等			一正、二定、三相等
求最值的过程中体现的数学思想	转化思想、方程思想			

板块五　应用演练,再生新疑

分级设题,精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 某公司租地建仓库,每月土地占用费 y_1(单位:万元)与仓库到车站的距离(单位:km)成反比,而每月库存货物的运费 y_2(单位:万元)与仓库到车站的距离(单位:km)成正比.如果在距车站 10 km 处建仓库,这两项费用 y_1 和 y_2 分别为 2 万元和 8 万元,那么要使这两项费用之和最小,仓库应建在离车站________km 处.

2. 已知函数 $f(x)=4x+\frac{a}{x}(x>0,a>0)$ 在 $x=3$ 时取得最小值,则 $a=$________.

3. (2018·天津)已知 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a-3b+6=0$,则 $2^a+\frac{1}{8^b}$ 的最小值为________.

4. (2017·江苏)某公司一年购买某种货物 600 t,每次购买 x t,运费为 6 万元/次,一年的总存储费用为 $4x$ 万元.要使一年的总运费与总存储费之和最小,则 x 的值是________.

B. 能力提升

5. 已知 $a>0,b>0,ab=8$，则当 a 的值为________时，$\log_2 a\cdot\log_2(2b)$取得最大值.

6. 设 $a>0,b>0,a+b=5$，则$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3}$的最大值为________.

7. (2019・天津)设 $x>0,y>0,x+2y=5$，则 $\dfrac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为________.

8. 若 $x,y>0$，且$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$恒成立，求实数 a 的最小值.

C. 拓展创新

9. 是否存在常数 c，使得不等式$\dfrac{x}{x+2y}+\dfrac{y}{2x+y}\geqslant c\geqslant\dfrac{x}{2x+y}+\dfrac{y}{x+2y}$对任意正实数 x，y 恒成立？证明你的结论.

10. (2017・全国卷Ⅱ)已知 $a>0,b>0$，$a^3+b^3=2$，求证：

(1)$(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$；

(2)$a+b\leqslant 2$.

再生新疑

利用重要不等式或基本不等式，我们已经能够求一些次数较低或元数较少的函数的最小值与最大值，那么形如 $y=x^2(1-x)$ $(0<x<1)$的函数的最大值如何求呢？这将是我们下学时要学习的内容，相信同学们学习了下学时的内容后，这个问题就会迎刃而解.

第三学时　三个正数的算术－几何平均不等式

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

同学们，大家都吃过罐头吧？如果你仔细观察各种罐头，你会发现这些罐头的形状大部分是高和底面直径相等的圆柱，你有没有想过这是为什么？

这里的体积会涉及立方的问题，用前面的基本不等式是无法解决的，你觉得该如何解决呢？从平方到立方的转换体现了什么数学思想？

材料链接

1. 同学们，大家已经知道两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数. 我们猜想对于三个正数 a,b,c，它们的算术平均数仍然不小于它们的几何平均数. 对吗？

2. 在学习"三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数"的过程中，我们将体会到类比、猜想、证明的乐趣.

3. 从二元基本不等式、三元基本不等式到 n 元基本不等式，体现了数学中的由特殊到一般的思想，也符合我们的认知规律，这一数学思想在后面的学习中是非常有用的.

4. 阅读本讲的"数学探究活动"栏目.

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

如何理解三元重要不等式和三元基本不等式？

请阅读教材 p8、p9 例 5 之前的内容，思考并回答下列问题：

1. 三元重要不等式：$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ $(a,b,c\in\mathbf{R}_+)$ 和三元基本不等式：$\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$ $(a,b,c>0)$ 的证明采用了什么方法？对比二元重要不等式和二元基本不等式的证明，你有何感想？

2. 二元重要不等式和二元基本不等式的变形形式能完全类比到三元重要不等式和三元基本不等式吗？请把能类比的不等式写出来.

3. 教材中由二元基本不等式、三元基本不等式推广到了 n 元基本不等式. 结合二元、三元重要不等式，你能类比出 n 元重要不等式吗？这两组不等式各自成立的条件是什么？

问题二

如何运用三元基本不等式？

请阅读教材 p9 例 5、例 6 的内容，思考并回答下列问题：

1. 结合教材例 6，类比二元基本不等式，在运用三元基本不等式时，当三个正实数 x,y,z 满足什么条件时，xyz 取得最大值？三个正实数 x,y,z 满足什么条件时，$x+y+z$ 取得最小值？

2. 利用三元基本不等式求函数最值时，必须同时满足什么条件？请简要概括出来.

3. 结合教材例 5 和例 6，说说三元重要不等式和三元基本不等式的作用有哪些？

自主测评

1. 设 $x>0,y>0$，则 $W=xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}$ 的最小值为________.

2. 设 $x>0$，则 $y=x^2+\frac{2}{x}$ 的最小值为________.

3. 若 θ 为锐角，则 $y=2\sin^2\theta\cos^4\theta$ 的最大值为________.

板块三　合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题三

你对三元基本(重要)不等式理解到位了吗？

1. 对三元重要不等式 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ $(a,b,c\in\mathbf{R}_+)$，你还有其他的证明方法吗？如果有，说出来和大家分享一下；若有困难，同学们也可以相互合作来完成证明.

2. 你能用三元基本不等式求函数 $f(x)=\sin\theta\cos^2\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最大值吗？请同学们发挥聪明才智完成它，从中大家能学到什么？

板块四　展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题四

运用三元基本不等式求最值时需要注意什么？

1. 运用三元基本不等式求最值时，和二元基本不等式一样，也需要满足“一正、二定、三相等”，所以必要的“添”“减”“拼”“拆”的运用是解题的关键. 你会吗？这里体现了什么数学思想？

2. 运用三元基本不等式能解决什么类型的实际问题？

展题设计

展题 1　(1) 设 $x>0$，则 $y=x+\frac{4}{x^2}$ 的最小值为________.

(2) 设 $x<0$，则 $y=4x^2-\frac{8}{x}$ 的最小值为________.

(3) 设 $0<x<2$，则 $y=x(2-x)^2$ 的最大值为________.

指导要求：运用三元基本(重要)不等式求最值的关键是通过巧妙的变形或配凑，使其满足求最值的条件. 你敢试一试吗？

展题2　制造容积为$\frac{\pi}{2}$ m^3的无盖圆柱形桶，用来做底面的金属板的价格为每平方米30元，做侧面的金属板的价格为每平方米20元，要使用料成本最低，求此圆柱形桶的底面半径和高.

指导要求：如何根据体积，建立成本与底面半径的关系是解决本题的关键.

归纳总结

不等式	$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$	$abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$	$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$
成立的范围及等号成立的条件	$a,b,c\in\mathbf{R}_+$时，不等式成立，$a=b=c$时，等号成立		
应用	(1)证明其他不等式；(2)求最值		
求最值时需要满足的条件	一正、二定、三相等		
求最值的过程中体现的数学思想	转化思想、方程思想		

板块五　应用演练，再生新疑

分级设题，精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 已知圆柱的轴截面周长为6，体积为V，则下列关系式总成立的是　（　　）

A. $V\geqslant\pi$　　B. $V\leqslant\pi$

C. $V\geqslant\frac{1}{8}\pi$　　D. $V\leqslant\frac{1}{8}\pi$

2. 若实数x,y满足$xy>0$，且$x^2y=2$，则$xy+x^2$的最小值是________.

3. 函数$y=x^2(1-2x)\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$的最大值为________.

4. 设x,y,z为正数，求证：$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant 3$.

B. 能力提升

5. 若$a>b>0$，则$a+\frac{1}{b(a-b)}$的最小值是________.

6. 设$x,y,z>0$，且$x+2y+3z=6$，则xyz的最大值为________.

7. 已知$a>0,b>0,c>0$，且$a+b+c=1$，给出下列不等式：

①$0<abc\leqslant\frac{1}{27}$；

②$\frac{1}{abc}\geqslant 27$；

③$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$；

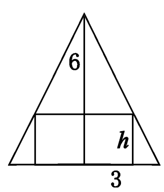
④$0<ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}$.

其中正确的是________(填序号).

8. 有甲、乙两个粮食经销点，每次在同一粮食生产基地以相同价格购进粮食，他们共购粮三次，各次的粮食价格各不相同. 甲每次购粮 10 000 kg，乙每次购粮花 10 000 元. 三次统计，所购粮食的平均价格低的是哪个经销点？请说明理由.

C. 拓展创新

9. 已知圆锥的底面半径为 3，高为 6，求圆锥的内接圆柱的高 h 为何值时，圆柱的体积最大？并求这个最大值. 如图所示为圆锥的轴截面.



10. 设 a,b,c 为正实数，求证：$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+abc\geqslant 2\sqrt{3}$.

再生新疑

上学时与本学时我们学习了基本不等式，利用它们可以求 $a+b$ 的最小值，那么对于$|a|+|b|$或$|a+b|$的最小值该如何求呢？这将是我们下学时要学习的内容，相信你学习了下学时的内容后，这个问题会迎刃而解.

二、绝对值不等式

第一学时　绝对值三角不等式

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

某建筑公司遇到一个问题：该公司在一条公路上，每隔 10 km 有一个仓库，共有五个仓库（如图），一号仓库存放10 t 货物，二号仓库存放 20 t 货物，五号仓库存放 40 t 货物，其余两个仓库是空的．现在要把所有货物集中存放在一个仓库里，如果每吨货物运输 1 km 需要 0.5 元运费，那么最少需要多少元运费才行？

一	二	三	四	五

你能帮该公司解决这个问题吗？这个问题涉及什么知识？解决这个问题又运用到了什么数学思想？

材料链接

同学们，初中我们学习过许多关于绝对值的性质（$a,b\in\mathbf{R}$）：

1. $\sqrt{a^2}=|a|$，

$a^2=|a|^2$．

2. 绝对值的运算法则：

（1）$|ab|=|a||b|$；

（2）$|a^n|=|a|^n(n\in\mathbf{N}^*)$；

（3）$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq0)$；

（4）$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$．

3. 研究绝对值运算的基本方法是通过讨论绝对值符号内多项式取值的正负去绝对值号．

4. $|x-a|$的几何意义是数轴上坐标为 x 的点到坐标为 a 的点的距离．

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

$|a+b|$与$|a|+|b|$（$a,b\in\mathbf{R}$）的大小关系怎样？

请阅读教材 p11～p13 的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 教材 p12 得到定理 1 的方法称为完全归纳法．你认为用完全归纳法证明的命题一定正确吗？请你再举一个用完全归纳法证明的例子．

2. 能否将不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$推广到 n 个数的情形？如果能，请把它写出来．

3. 你会证明不等式$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$吗？不妨试一试．

问题二

$|a|-|b|$与$|a\pm b|$的大小关系怎样?

请阅读教材 p13、p14 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 你能证明不等式$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|$吗?请试一试,然后和大家交流.

2. 在不等式$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|$中,等号何时成立?

板块三 合作互助,共析问题

发展创新思维,形成主动探究与合作的意识和能力

问题三

$|a-c|$与$|a-b|+|b-c|$的大小关系怎样?

请阅读教材 p14 例 1 前的内容,思考并回答下列问题:

1. 定理 2 能否写成$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$?如果能,你能证明吗?

2. 不等式$|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|$与$|a+b|\leqslant|a|+|b|$之间是什么关系?请你给大家说说.

自主测评

1. 已知$|\overrightarrow{AB}|=8$,$|\overrightarrow{AC}|=5$,则$|\overrightarrow{BC}|$的取值范围是________.

2. "$|a+b|<|a|+|b|$"成立的充要条件是________.

3. $f(x)=|x+3|+|x|$的最小值为 ( )

A. 3　　　B. $|2x+3|$

C. 0　　　D. 不存在

4. (2016·江苏)设$a>0$,$|x-1|<\frac{a}{3}$,$|y-2|<\frac{a}{3}$,求证:$|2x+y-4|<a$.

板块四 展示交流,探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题四

如何理解和应用不等式$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$?

1. 你认为不等式"$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$"正确吗?如果正确,你会证明吗?和大家交流你的证明过程;如果不正确,请举出反例.

2. 求$|a|-|b|$与$|a+b|$的最大值与最小值，要用到什么不等式，其等号何时成立？

展题设计

展题1　求函数$y=|x-3|-|x+1|$的最大值和最小值.

指导要求：把$x-3$和$x+1$看作两个实数，考虑两个数和(差)的绝对值与两数绝对值的和(差)之间的关系，进而可求解.

展题2　若$|a-c|<b$，则下列不等式不成立的是　(　　)

A. $|a|<|b|+|c|$　B. $|c|<|a|+|b|$

C. $b>||c|-|a||$　D. $b<|a|-|c|$

指导要求：结合已知不等式，再观察选项，你会想到什么？

归纳总结

不等式	$\|\|a\|-\|b\|\|\leqslant\|a+b\|$	$\|a+b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$	$\|a-c\|\leqslant\|a-b\|+\|b-c\|$
成立的条件	$a,b,c\in\mathbf{R}$		
应用	(1)证明其他不等式； (2)求最值		
求最值时需要满足的条件	$ab\leqslant0$时，等号成立	$ab\geqslant0$时，等号成立	$(a-b)(b-c)\geqslant0$时，等号成立
求最值的过程中体现的数学思想	分类讨论与数形结合的思想		

板块五　应用演练，再生新疑

分级设题，精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 已知$|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$，则下列不等式一定成立的是　(　　)

A. $|x+y|\leqslant a+b$

B. $|x-y|<a+b$

C. $|x|+|y|<a+b$

D. $|x|-|y|<a+b$

2. 已知实数a,b满足$ab<0$，那么　(　　)

A. $|a-b|<|a|+|b|$

B. $|a+b|>|a|-|b|$

C. $|a+b|<|a-b|$

D. $|a-b|<||a|-|b||$

3. 已知$g(x)=|x-a|-|x-b|$，则$g(x)$的最大值为________，最小值为

________.

4. 若不等式$|x+1|+|x-3|\geqslant a+\frac{4}{a}$对任意的实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

B. 能力提升

5. 对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，$|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$的最小值为 ( )

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

6. 若$|a+c|<b$，则 ( )

A. $|a|<|b|-|c|$ B. $|a|>|c|-|b|$

C. $|a|>|b|-|c|$ D. $|a|<|c|-|b|$

7. 若关于实数 x 的不等式$|x-5|+|x+3|<a$无解，则实数 a 的取值范围是________.

8. 已知 $x\in[-1,1]$，$|y|\leqslant\frac{1}{6}$，$|z|\leqslant\frac{1}{9}$，求证：$|x+2y-3z|\leqslant\frac{5}{3}$.

C. 拓展创新

9. 函数 $f(x)=ax+b$，当$|x|\leqslant 1$ 时，都有$|f(x)|\leqslant 1$，求证：$|b|\leqslant 1$，$|a|\leqslant 1$.

10. 设函数 $f(x)=|2x-1|$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)若存在实数 x 使不等式 $f(x)+f(x+1)\leqslant a$ 成立，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $g(x)=\frac{1}{f(x)+f(x+1)+m}$的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 m 的取值范围.

再生新疑

本学时所学的含绝对值的不等式$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$是证明其他含有绝对值的不等式的重要依据. 那么该如何解含绝对值的不等式呢？这将是下学时我们要学习的内容.

第二学时　绝对值不等式的解法

板块一　创设问题，引领目标

导入问题，直指学时重点

问题呈现

某段铁路线上依次有 A,B,C 三站，$AB=5$ km，$BC=3$ km，在列车运行时刻表上，规定列车 8 时整从 A 站发车，8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟，8 时 12 分到达 C 站. 在实际运行时，假设列车从 A 站正点发车，在 B 站停车 1 分钟，并在行驶时以同一速度 v km/h 匀速行驶，列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差. 若要求列车在 B、C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟，你认为对速度 v 应怎样限制呢？

你能解决这个问题吗？解决这个问题涉及什么知识？解决这个问题又运用到了什么数学思想？

材料链接

1. 在《数学 1》中，我们学习过函数 $y=|x|$，$y=|x\pm1|$ 的图象；在《数学 5》中，我们求过 $|x|+|y|\leqslant1$ 的面积. 研究它们的方法都是通过分类讨论去绝对值号.

2. 研究绝对值运算的基本方法是分类讨论. 在本学时的学习中要注意掌握它.

板块二　自学思疑，初探问题

尊重认知规律，亲历感悟知识生成

教材导读

问题一

你能解不等式 $|ax+b|\leqslant c$ 与 $|ax+b|\geqslant c$ $(c>0)$ 吗？

请阅读教材 p15～p17“探究”栏目前的内容，思考并回答下列问题：

1. 如何解不等式 $|ax+b|\leqslant c$ 与 $|ax+b|\geqslant c(c<0)$？

2. 除了利用 $|x-a|$ 的几何意义外，你还能用其他方法解不等式 $|x-a|<c$ 与 $|x-a|>c$ $(c>0)$ 吗？

3. 你能把不等式 $|ax+b|<c$ 与 $|ax+b|>c$ 转化为 $|x-a|<c$ 与 $|x-b|>c$ 型的不等式吗？你能解不等式 $|ax+b|<c$ 与 $|ax+b|>c$ 吗？请谈谈你的想法.

问题二

如何解不等式 $|x-a|+|x-b|\leqslant c$ 与 $|x-a|+|x-b|\geqslant c$？

请阅读教材 p17～p19 的有关内容，思考

并回答下列问题：

1. 教材例 5 中的解法一适用于解不等式 $|2x-1|+|x-2|\geqslant 5$ 吗？

教材例 5 中的三种解法各在什么条件下适用？谈谈你的想法.

2. 如何解形如 $|ax-b|\pm|cx-d|<e$ 与 $|ax-b|\pm|cx-d|>e$（a,b,c,d,e 为常数）的不等式呢？请说说你的想法.

自主测评

1.（2016 · 上海）设 $x\in\mathbf{R}$，则不等式 $|x-3|<1$ 的解集为________.

2. 不等式 $|x-5|+|x+3|\geqslant 10$ 的解集是（　　）

A. $[-5,7]$

B. $[4,6]$

C. $(-\infty,-5]\cup[7,+\infty)$

D. $(-\infty,-4]\cup[6,+\infty)$

3. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x+3|+|x-4|\leqslant 9\}$，$B=\left\{x\in\mathbf{R}\;\middle|\; x=4t+\dfrac{1}{t},t\in(0,+\infty)\right\}$，则集合 $A\cap B=$________.

板块三　合作互助，共析问题

发展创新思维，形成主动探究与合作的意识和能力

问题三

你对解绝对值不等式掌握得如何？

1. 如何解不等式 $|f(x)|\geqslant f(x)$ 或 $|f(x)|\leqslant f(x)$？请说说你的想法.

2. 如何解不等式 $|f(x)|\geqslant g(x)$ 或 $|f(x)|\leqslant g(x)$？请说说你的想法.

板块四　展示交流，探究问题

提高分析问题、解决问题的能力

问题四

研究本学时内容用到了什么方法？

1. 教材例 5 的三种解法的共同点是什么？体现了解决含绝对值的数学问题的什么共同本质？

2. 解绝对值不等式的关键是将其转化为不含绝对值的不等式，而去绝对值符号(只含一个或两个绝对值符号)的常用方法有哪些?

展题设计

展题1 已知关于 x 的不等式 $|x-1|+|x-a|<2$ 的解集不是空集，求实数 a 的取值范围.

指导要求: 本题中 $|x-1|+|x-a|$ 的最小值与 2 是什么关系? 只要搞清楚这一点，问题就迎刃而解. 求 $|x-1|+|x-a|$ 的最小值用到了什么数学思想和方法?

展题2 已知函数 $f(x)=|2x-1|+2$，$g(x)=-|x+2|+3$.

(1)解不等式: $g(x)\geqslant -2$;

(2)当 $x\in \mathbf{R}$ 时，$f(x)-g(x)\geqslant m+2$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

指导要求: $f(x)-g(x)\geqslant m+2$ 恒成立等价于什么? 如何求 $f(x)-g(x)$ 的最小值(可以参考教材例5的解法)?

展题3 解决"问题呈现"中的问题.

指导要求: 什么是运行误差? 如何根据运行误差列出不等式?

归纳总结

不等式	解法	思想方法
$\|f(x)\|\leqslant g(x)$	$-g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$	分类讨论、等价转化
$\|f(x)\|\geqslant g(x)$	$f(x)\leqslant -g(x)$，或 $f(x)\geqslant g(x)$	分类讨论、等价转化
$\|x-a\|\pm\|x-b\|\leqslant c$ 与 $\|x-a\|\pm\|x-b\|\geqslant c$	(1)取零点分段讨论法; (2)利用绝对值不等式的性质; (3)构造函数，借助函数图象	分类讨论、数形结合、函数思想
$\|ax-b\|\pm\|cx-d\|\leqslant e$ 与 $\|ax-b\|\pm\|cx-d\|\geqslant e$	(1)取零点分段讨论法; (2)构造函数，借助函数图象	分类讨论、数形结合、函数思想

板块五　应用演练，再生新疑

分级设题，精选精练

分层演练

A. 基础巩固

1. 不等式 $|x+7|\geqslant m+2$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

2. 已知不等式 $|x-2|<a(a>0)$ 的解集为 $\{x|-1<x<b\}$，则 $a+2b=$________.

3. (2018 · 天津)设 $x\in\mathbf{R}$，则"$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$"是"$x^3<1$"的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. (2019 · 上海)不等式 $|x+1|<5$ 的解集为________.

B. 能力提升

5. 函数 $y=|x-1|+|x-2|$　(　　)

A. 图象无对称轴，且在 $\mathbf{R}$ 上不单调

B. 图象无对称轴，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

C. 图象有对称轴，且在对称轴右侧不单调

D. 图象有对称轴，且在对称轴右侧单调递增

6. 不等式 $x+|2x+3|\geqslant 2$ 的解集为________________.

7. 若不等式 $|2x-1|+|x+2|\geqslant a^2+\frac{1}{2}a+2$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

8. (2019 · 江苏)设 $x\in\mathbf{R}$，解不等式 $|x|+|2x-1|>2$.

C. 拓展创新

9. (2016 · 全国卷Ⅲ)已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$.

(1)当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant 6$ 的解集；

(2)设函数 $g(x)=|2x-1|$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant 3$，求 a 的取值范围.

10. (2018 · 全国卷Ⅱ)设函数 $f(x)=5-|x+a|-|x-2|$.

(1)当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集；

(2)若 $f(x)\leqslant 1$，求 a 的取值范围.

再生新疑

我们现在所学的都是三元以下的不等式，那么对于 n 元不等式该如何处理呢？这将是后面要学习的内容.

第一讲学习报告

请根据自己对本讲内容的学习和体会，列出本讲内容主要涉及的知识点、公式、图象、方法等，并通过“知识结构树”“思维导图”“表格比较”或“书面表达”等方式将你所列出的知识系统化. 要注意和别的同学多交流，并及时记录下其他同学的优点，补充、完善自己的不足之处.

比如，归纳总结本讲所学内容如下表所示：

名称		知识点	作用或方法	成立条件	蕴涵的数学思想
不等式的基本性质	三歧性	$a>b\Leftrightarrow a-b>0$. $a=b\Leftrightarrow a-b=0$. $a<b\Leftrightarrow a-b<0$.	比较大小的依据	$a,b\in\mathbf{R}$	比较法
	初中所学性质	(1)$a>b\Leftrightarrow b<a$(对称性). (2)$a>b,b>c\Rightarrow a>c$(传递性). (3)$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$(加法法则). (4)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$，$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$(乘法法则).	1. 比较大小. 2. 证明其他的不等式.	$a,b,c\in\mathbf{R}$	比较法
	高中所学性质	(1)$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$($n\in\mathbf{N},n\geqslant 2$)(乘方法则). (2)$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in\mathbf{N},n\geqslant 2$)(开方法则).		$a>b>0$	
	重要性质	(1)$a+b>c\Leftrightarrow a>c-b$(移项法则). (2)$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$(可加性). (3)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$(可乘性). (4)$a>b,ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$(倒数关系).		$a,b,c\in\mathbf{R}$	
重要不等式		$a^2+b^2\geqslant 2ab\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}\Leftrightarrow ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.	1. 证明不等式. 2. 求最大值(和为定值)或最小值(积为定值).	$a,b\in\mathbf{R}$，$a=b$时，等号成立.	等价转化
		$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.		$a,b,c>0$，$a=b=c$时，等号成立.	

续表

名称		知识点	作用或方法	成立条件	蕴涵的数学思想
绝对值不等式及其解法	绝对值不等式	(1) $\|\|a\|-\|b\|\| \leqslant \|a+b\| \leqslant \|a\|+\|b\|$，$ab\leqslant 0$ 时左等号成立，$ab\geqslant 0$ 时右等号成立. (2) $\|a-c\|\leqslant\|a-b\|+\|b-c\|$，$(a-b)(b-c)\geqslant 0$ 时等号成立.	1. 证明不等式. 2. 求最大值或最小值.	$a,b,c\in\mathbf{R}$	分类讨论 数形结合
	解绝对值不等式	(1) $\|f(x)\|\leqslant g(x)\Leftrightarrow -g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. $\|f(x)\|\geqslant g(x)\Leftrightarrow f(x)\leqslant -g(x)$，或 $f(x)\geqslant g(x)$. (2) $\|x-a\|+\|x-b\|\geqslant c$ 和 $\|x-a\|+\|x-b\|\leqslant c$，取零点分段讨论.	1. 取零点分段讨论法. 2. 构造函数，借助函数图象. 3. 利用绝对值不等式的性质.	$a,b,c\in\mathbf{R}$	数形结合 分类讨论 函数思想

数学探究活动

体验数学研究的过程和创造的激情

数学探究

1. 探究问题

均值不等式.

2. n 元均值不等式

定理：n 个正数的算术平均不小于它们的几何平均，即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

证明：设 $A=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都相等，显然 $A=G$.

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全相等，不妨设 a_1 是其中最小的数，设 a_2 是其中最大的数，$A=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. 分别用 A 与 a_1+a_2-A 代换 a_1 和 a_2，连同 $a_3,a_4,\cdots,a_n$ 组成 n 个数. 这样代换使得最小数变大，最大数变小，但 n 个数的和不变，从而算术平均不变.

因为 $a_1<A<a_2$，

所以 $A(a_1+a_2-A)-a_1a_2=(A-a_1)\cdot(a_2-A)>0$，

即 $A(a_1+a_2-A)>a_1a_2$.

所以 $\sqrt[n]{A(a_1+a_2-A)a_3a_4\cdots a_n}>\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，

即代换后的几何平均变大.

以上这种变换使 n 个数中的最小数变换到 A，这样最多经过 $n-1$ 次，就使所有数都变换成 A，这时的几何平均达到最大为 $\sqrt[n]{\underbrace{AA\cdots A}_{n\text{个}}}$，即等于 A. 由此可知，由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全相等，就有

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}<A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

综上，得

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

3. 用均值不等式求最值的诠释

用均值不等式既可以证明其他的不等式，也可以求一些函数的最值问题. 求最值时，必须遵循“一正、二定、三相等”. 理由是：

(1)要求 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都为正值，是为了保证不等式成立，否则，在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有奇数个负数，则 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 不一定有意义，何谈成立. 再如有 a_1,a_2 两个负数，则 $a_1+a_2\geqslant2\sqrt{a_1a_2}$ 也不成立，所以要求 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都为正数.

(2)当 $a_1a_2\cdots a_n$ 为定值时，$a_1+a_2+\cdots+a_n$ 取得最小值，当 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 为定值时，$a_1a_2\cdots a_n$ 取得最大值，否则就不能取得最值. 请看例子：

求函数 $y=x^2+\frac{1}{x}(x>0)$ 的最小值.

正解：$y=x^2+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\geqslant3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$，

当且仅当 $x^2=\frac{1}{2x}$，即 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 时，取等号，

∴　$y_{\min}=3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

错解一：$y=x^2+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x}}$，

当且仅当 $x^2=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，取等号，

∴　$y_{\min}=2$.

错解二：$y=x^2+\frac{1}{x}=\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\geqslant3\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}=3\sqrt[3]{\frac{x^3}{4}}$，

当且仅当 $\frac{x^2}{2}=\frac{1}{x}$，即 $x=\sqrt[3]{2}$ 时，取等号，

∴　$y_{\min}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

错解三：$y=x^2+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}\geqslant4\sqrt[4]{x^2\cdot\frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{3x}}$，

当且仅当 $x^2=\frac{1}{3x}$，即 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ 时，取等号，

∴　$y_{\min}=\frac{4}{\sqrt[3]{9}}$.

如果积 $a_1a_2\cdots a_n$ 不为定值，那么由上述解题过程可知，函数 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 的最小值可能有无数个. 事实上，$2,\frac{3}{\sqrt[3]{2}},\frac{4}{\sqrt[3]{9}}$ 都大于 $3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$，所以它们并不是最小值，只有 $3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ 是函数 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 的最小值.

(3)根据定理的证明过程知，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，均值不等式取得等号，即函数取得最值.

4. 利用均值不等式求最值的常见技巧

(1)凑系数

例：当 $0<x<4$ 时，求 $y=x(8-2x)$ 的最大值.

解：由 $0<x<4$，得 $8-2x>0$，

∴　$y=x(8-2x)$

$=\frac{1}{2}[2x\cdot(8-2x)]$

$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2x+8-2x}{2}\right)^2=8$，

当且仅当 $2x=8-2x$，即 $x=2$ 时，等号成立，

∴　当 $x=2$ 时，$y=x(8-2x)$ 取得最大值 8.

(2)凑项

例：已知 $x<\frac{5}{4}$，求函数 $f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值.

解：由题意知，$4x-5<0$，∴ $5-4x>0$.

∴ $$f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}$$
$$=-\left(5-4x+\frac{1}{5-4x}\right)+3$$
$$\leqslant -2\sqrt{(5-4x)\cdot\frac{1}{5-4x}}+3$$
$$=-2+3=1,$$

当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$，即 $x=1$ 时，等号成立.

∴ $f(x)$的最大值为 1.

(3)裂项

例：设 $x>-1$，求函数 $y=\frac{(x+5)(x+2)}{x+1}$的最小值.

解：∵ $x>-1$，∴ $x+1>0$.

∴ $$y=x+1+\frac{4}{x+1}+5$$
$$\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}+5=9,$$

当且仅当 $x+1=\frac{4}{x+1}$，即 $x=1$ 时，等号成立.

∴ $y_{\min}=9$.

(4)拆项

例：求 $y=x^2+\frac{2}{x}(x>0)$的最小值.

解：∵ $x>0$，

∴ $$y=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geqslant 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=3,$$

当且仅当 $x^2=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，等号成立.

∴ $y_{\min}=3$.

(5)拆幂

例：求 $y=x^2(1-x)(0<x<1)$的最大值.

解：∵ $0<x<1$，∴ $1-x>0$.

∴ $$y=\frac{1}{2}x\cdot x\cdot(2-2x)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{8}{27}=\frac{4}{27},$$

当且仅当 $x=2-2x$，即 $x=\frac{2}{3}$ 时，等号成立.

∴ $y_{\max}=\frac{4}{27}$.

(6)升幂

例：求函数 $y=x(1-x^2)(0<x<1)$的最大值.

解：∵ $0<x<1$，∴ $1-x^2>0$.

∴ $$y^2=x^2(1-x^2)^2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2x^2(1-x^2)(1-x^2)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+1-x^2+1-x^2}{3}\right)^3$$
$$=\frac{4}{27},$$

当且仅当 $2x^2=1-x^2$，即 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立.

∴ $y_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

第一讲综合测试

（时间：90 分钟　满分：100 分）

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 若 $a<b$，则下列不等关系一定成立的是　（　　）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $|a|>|b|$

C. $a^2>b^2$　　D. $2ab-b^2<a^2$

2. 若 $2^x+2^y=1$，则 $x+y$ 的取值范围是　（　　）

A. $[0,2]$　　B. $[-2,0]$

C. $[-2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2]$

3. 不等式 $|x-1|+|x+2|\geqslant 5$ 的解集为　（　　）

A. $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$

B. $[-3,2]$

C. $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

D. $[-2,1]$

4. 若不等式 $\left|x+\frac{1}{x}\right|>|a-5|+1$ 对一切非零实数 x 均成立，则实数 a 的取值范围是　（　　）

A. $\mathbf{R}$

B. $a>5$

C. $4<a<6$

D. $4\leqslant a\leqslant 6$

5. 若 a,b,c 均为正实数，且 $a^2+2ab+2ac+4bc=12$，则 $a+b+c$ 的最小值为　（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. 3

C. 2　　D. $\sqrt{3}$

6. 如果正数 a,b,c,d 满足 $a+b=cd=4$，则　（　　）

A. $ab\leqslant c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

B. $ab\geqslant c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

C. $ab\leqslant c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

D. $ab\geqslant c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

7. 已知 $-2\leqslant a\leqslant 3$，$-3<b<4$，则 $a-|b|$ 的取值范围为________.

8. 已知 $a\in\mathbf{R}$，若关于 x 的方程 $x^2+x+|a|+\left|a-\frac{1}{4}\right|=0$ 有实数根，则 a 的取值范围是________.

9. 已知 $a>0,b>0$，且 $a^2+\frac{b^2}{2}=1$，则 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值是________.

10. 设 $a,b\in\mathbf{R}_+$，则 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$ 与 $\sqrt{a+b}$ 的大小关系是______________.

11. 函数 $y=\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{x}(x>0)$ 的最小值为________.

12. 若函数 $f(x)=|x+1|+2|x-a|$ 的最小值为 5，则实数 $a=$________.

三、解答题(本大题共3小题,共40分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或推演步骤)

13.(本小题满分12分)

已知 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$($\alpha,\beta,\gamma$ 均为锐角),求 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 的最大值.

14.(本小题满分14分)

(2019·全国卷Ⅱ)已知 $f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$.

(1)当 $a=1$ 时,求不等式 $f(x)<0$ 的解集;

(2)若 $x\in(-\infty,1)$ 时,$f(x)<0$,求 a 的取值范围.

15.(本小题满分14分)

设函数 $f(x)=|x+1|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant 5-f(x-3)$ 的解集;

(2)已知关于 x 的不等式 $2f(x)+|x+a|\leqslant x+4$ 在 $[-1,1]$ 上有解,求实数 a 的取值范围.