义务教育教科书同步教学资源

课时练

人民教育出版社教学资源编辑室 组编

数学

八年级 下册

人民教育出版社
PEOPLE'S EDUCATION PRESS
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

课时练 . 数学八年级 . 下册 / 人民教育出版社教学资源编辑室组编 . — 北京 : 人民教育出版社 , 2018.12
ISBN 978-7-107-33224-1

Ⅰ . ①课… Ⅱ . ①人… Ⅲ . ①中学数学课—初中—习题集 Ⅳ . ① G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 266636 号

课时练　数学　八年级　下册

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷
版　　次　2018 年 12 月第 1 版
印　　次　　　年　　月第　次印刷
开　　本　890 毫米 ×1240 毫米　1/16
印　　张　12
字　　数　372 千字
定　　价　16.12 元

编委会

亮点解读

依据最新理念 落实学科素养
搭建科学体系 培养关键能力

1. 引导学生经历真实的学习过程

★【学习目标】为学生提供达成目标的探究方法和经历真实学习过程的“抓手”

学习目标

1.经历用描点法画一次函数的图象的过程，掌握一次函数图象的形状和画法，并理解正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 的图象与一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象之间的异同.

2.结合一次函数的图象和正比例函数的性质，理解并掌握一次函数的性质，并能运用这些性质解决问题，体会函数图象的作用和数形结合的方法，提高数学抽象能力和概括能力.

★探究环节从学生角度出发，将问题逐层深入、细化，让学生经历知识的形成过程

要点突破 1 一次函数的图象

【例1】一条直线 $y=kx+b$，其中 $k+b=-5$，$kb=6$，那么该直线经过 (　　)

A.第二、第四象限　　B.第一、第二、第三象限

C.第一、第三象限　　D.第二、第三、第四象限

思考1：由 $kb=6$，可得到 k，b________(填“同号”或“异号”).

思考2：由 $kb=6$，$k+b=-5$，可得到 k，b 分别是正实数还是负实数？

2. 培养学生在具体情境中解决实际问题的能力

★探究环节中注重情境设计，培养学生在情境中解决具体问题的能力

1.完成下列问题：

(1)若圆的半径为 r，则圆的面积 S 与半径 r 之间的关系是________；

(2)若电的价格是0.58元/千瓦时，则需要的费用 w(单位：元)与所用的电量 x(单位：kW·h)之间的关系是________；

★训练环节的习题中通过情境化设计考查学生解决实际问题的能力

拓展创新

10.为了宣传环保、绿化，小丽为学校宣传栏做了两张大小不同的正方形壁画，其中一张面积为800 cm^2，另一张面积为450 cm^2.她想再把壁画的边镶上金色彩带，若小丽现在有长为1.2 m的金色彩带，请你帮忙算一算，她的金色彩带够用吗？如果不够用，还需要大约多长的金色彩带？($\sqrt{2}\approx1.414$，结果保留整数)

3. 注重学生数学素养的持续性发展

★融入数学文化，提升科学精神、应用意识和人文素养

2.(湖南湘潭中考)《九章算术》是我国古代最重要的数学著作之一，在“勾股”章中记载了一道“折竹抵地”问题：“今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺，问折者高几何？”翻译成数学问题是：如图17.1-32所示，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC+AB=10$，$BC=3$，求 AC 的长，如果设 $AC=x$，则可列方程为________.

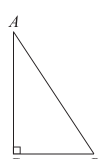


图17.1-32

★在学习环节中突出学生数学建模、数学抽象等学科素养的培养

4.写出下列各题中 y 与 x 之间的解析式，并判断：y 是否为 x 的一次函数？是否为正比例函数？

(1)$\triangle ABC$ 的一边长为8 cm，$\triangle ABC$ 的面积 y(单位：cm^2)与此边上的高 x(单位：cm)的关系；

(2)某小汽车的油箱可装汽油30 L，原本装有汽油10 L，现在再加汽油 x L，如果每升汽油7.5元，油箱内汽油的总价 y(单位：元)与 x(单位：L)之间的关系.

目录

第十九章　一次函数

第二十章　数据的分析

阶段检测卷、参考答案(另册)

第十六章 二次根式

16.1 二次根式

学习目标

1. 经历由非负数的算术平方根引出二次根式的概念的过程，掌握二次根式的概念.
2. 理解二次根式有意义的条件，掌握二次根式的性质，能够熟练运用性质化简二次根式.

自主预习·探新知

学习任务一 二次根式的概念

学习过程

1. 填空：

(1)若一块正方形地砖的面积为 $P\ \mathrm{m}^2$，则其边长是________ m；

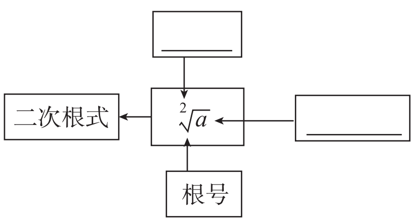
(2)若高为 2 且底面为正方形的长方体的体积为 14，则该长方体的底面边长为________；

(3)5 的算术平方根是________.

2. 上题结果中的 3 个式子有什么共同点？

探究归纳

二次根式：一般地，我们把形如________$(a\geqslant 0)$的式子叫做二次根式，"________"称为二次根号.



学习任务二 二次根式的性质

二次根式的性质

(1)$\sqrt{a}$________$0(a\geqslant 0)$；

(2)$(\sqrt{a})^2=$________$(a\geqslant 0)$；

(3)$\sqrt{a^2}=$________$=\begin{cases}________ & (a\geqslant 0),\\ ________ & (a<0).\end{cases}$

学习任务三 代数式的概念

用基本运算符号(基本运算包括加、减、乘、除、________和________)把数或表示数的字母连接起来的式子，称为代数式.

即时小练

1. 判断对错.

(1)因为负数没有算术平方根，所以当 $a<0$ 时，$\sqrt{a}$ 没有意义. (　　)

(2)$\sqrt{2}$ 是二次根式. (　　)

(3)$\sqrt{-1}$ 是二次根式. (　　)

(4)$\sqrt{a}$ 一定有意义. (　　)

2. 若式子 $\sqrt{a+1}$ 表示________的算术平方根，则 a 的取值范围是________.

3. 计算：$(\sqrt{7})^2=$________；$\sqrt{(-7)^2}=$________.

4. 若一个三角形的一边长为这一边上的高的 2 倍，面积为 S，则它的这条高为________.

合作探究·释疑难

要点突破 1 二次根式的概念

【例 1】 下列各式：① $\sqrt{a}$；② $\sqrt{-4}$；③ $\sqrt{16}$；④ $-\frac{1}{2}x$；⑤ $\sqrt[3]{8}$；⑥ $\sqrt{1-2x}$；⑦ $\sqrt{a^2+2}$；⑧ $\sqrt{\frac{1}{x^2}}\ (x\neq 0)$. 其中，一定是二次根式的有________(只填序号).

【一题多变】

$\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{1-2x}$ 分别满足什么条件时，就是二次根式？

规律方法

二次根式的判定方法

(1)含有二次根号"$\sqrt{\ \ }$"；

(2)被开方数是非负数(正数或 0).

这两个条件必须同时满足，缺一不可.

【变式训练】

1. 在 $\sqrt{15}$，$\sqrt{5a}$，$\sqrt{x^2-1}$，$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{x^2+20}$，$\sqrt{-144}$ 中，一定是二次根式的有________个.

要点突破 2 二次根式有意义的条件

【例 2】 当 x 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1)$\sqrt{-3x+6}$；(2)$\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-5}$；(3)$\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$.

思考1：在(1)中要使二次根式有意义，只需被开方数________，由此可转化出一个________，从而求出 x 的取值范围.

思考2：在(2)中有二次根式，同时还有分母，因此要使式子有意义，除去二次根式的被开方数________以外，还需式子中的分母________.

思考3：在(3)中，由两个二次根式的被开方数都________，可转化出一个________，由此得出 x 的取值范围.

解：

【一题多变】

当 x 为什么实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1)$\dfrac{1}{\sqrt{-3x+6}}$；　(2)$\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-5}$；　(3)$\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+3}}$.

规律方法

分清类型求字母取值范围

(1)二次根式型：被开方数为非负数.

(2)分式型：分母不等于0.

(3)复合型：使各部分都有意义的字母的取值范围的公共部分.

解决此类问题往往要借助不等式(组)求解.

【变式训练】

2.(四川成都中考)二次根式$\sqrt{x-1}$中，x 的取值范围是 (　　)

A.$x\geqslant1$　　B.$x>1$

C.$x\leqslant1$　　D.$x<1$

3.如果$\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$有意义，那么 x 的取值范围是________.

要点突破 3　二次根式的性质

【例3】 若$\sqrt{a-2}+(b+3)^2=0$，则$(a+b)^{2\,019}=$________.

规律方法

二次根式具有双重非负性，即对于二次根式$\sqrt{a}$来说，$\sqrt{a}\geqslant0$，且 $a\geqslant0$.它常与 a^2，$|a|$等一起考查.

【变式训练】

4.已知$|4x-8|+\sqrt{x-y-m}=0$，则当 $y>0$ 时，m 的取值范围是________.

【例4】 计算：(1)$\left(\sqrt{\dfrac{4}{7}}\right)^2$；(2)$(4\sqrt{3})^2$；

(3)$\sqrt{(-7)^2}$；(4)$-\sqrt{\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2}$.

解：

规律方法

解决此类问题时，要从指数2所处的位置分清运用哪条性质，要熟练掌握公式$(\sqrt{a})^2=a\,(a\geqslant0)$和$\sqrt{a^2}=|a|$.

【变式训练】

5.计算：(1)$\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)^2$；(2)$(-2\sqrt{3})^2$；

(3)$\sqrt{64}$；(4)$\sqrt{(-0.5)^2}$.

【例5】(山东枣庄中考)实数 a，b 在数轴上对应点的位置如图16.1-1所示，化简$|a|+\sqrt{(a-b)^2}$的结果是 (　　)

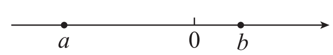


图 16.1-1

A.$-2a+b$　　B.$2a-b$

C.$-b$　　D.b

规律方法

化简形如$\sqrt{a^2}$的二次根式需注意的问题

(1)$\sqrt{a^2}=|a|$，化简时要注意 a 的符号，当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$；当 $a\geqslant0$ 时，$\sqrt{a^2}=a$.

(2)若被开方数是多项式，则应该先因式分解，再化简.

【变式训练】

6.(广东广州中考)如图16.1-2，数轴上点 A 表示的数为 a，化简：$a+\sqrt{a^2-4a+4}=$________.

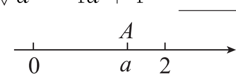


图 16.1-2

达标检测

1.下列各式中,不是二次根式的是 （　　）

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3-\pi}$　　C.$\sqrt{a^2}$　　D.$\sqrt{\frac{1}{2}}$

2.(湖南益阳中考)若代数式$\frac{\sqrt{3-2x}}{x-2}$有意义,则 x 的取值范围是________.

3.如果$\sqrt[n]{m-n}$是二次根式,那么 m,n 应满足的条件是__________.

4.计算:(1)$(\sqrt{9})^2$;　(2)$-(\sqrt{3})^2$;　(3)$-\sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2}$.

5.阅读下面材料:我们在学习二次根式时,若式子$\sqrt{x}$有意义,则 $x\geqslant0$;若式子$\sqrt{-x}$有意义,则 $x\leqslant0$."若式子$\sqrt{x}+\sqrt{-x}$有意义,求 x 的取值范围"这个问题可以转化为不等式组来解决,即求关于 x 的不等式组$\begin{cases}x\geqslant0,\\-x\geqslant0\end{cases}$的解集,解这个不等式组,得 $x=0$.

请你运用上述数学方法解决下列问题:

(1)若$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$有意义,求 x 的取值;

(2)已知 $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}-3$,求$\sqrt{y^x}$的值.

5.已知实数 a 在数轴上的对应点的位置如图 16.1-3 所示,化简$\sqrt{(a-1)^2}+a=$________.

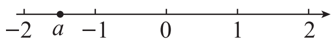


图 16.1-3

6.若三角形的一条高是其对应底边长的$\frac{\sqrt{2}}{2}$,底边长为 x cm,则这个三角形的面积 $S=$________cm^2.当 $x=2$ 时,$S=$________cm^2.

7.计算:(1)$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$;　(2)$\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}}$;

(3)$\left(\sqrt{2\frac{1}{3}}\right)^2+\sqrt{\left(-2\frac{1}{3}\right)^2}$;

(4)$\sqrt{x^2-2x+1}(x>1)$.

8.当 x 是怎样的实数时,下列各式在实数范围内有意义?

(1)$\sqrt{x-\pi}$;(2)$\frac{\sqrt{4-x}}{x+2}$;(3)$\sqrt{x+5}-\sqrt{3-2x}$;

(4)$\frac{x}{\sqrt{2x-1}}$.

分层演练·提素能

基础巩固

1.已知下列式子:

①$\sqrt{\frac{1}{5}}$;②$\sqrt[3]{7}$;③$\sqrt{x^2+2}$;④$\sqrt{(-x)^2}$;⑤$\sqrt{x-1}$.

其中一定是二次根式的是 （　　）

A.①③⑤　　B.①②③　　C.①③④　　D.①④⑤

2.若$\sqrt{(1-a)^2}=1-a$,则 a 的取值范围是 （　　）

A.$a>1$　　B.$a\geqslant1$　　C.$a<1$　　D.$a\leqslant1$

3.已知实数 m,n 满足$|n-2|+\sqrt{m+1}=0$,则 $m+2n$ 的值为________.

4.下列式子:①0;②π^2;③$2+x=4$;④$\frac{x-2}{3}>1$;⑤$2a+3b$;⑥$\sqrt{2-x}$($x\leqslant2$).其中是代数式的有________个.

能力提升

9.(1)若$\sqrt{a-2}+\sqrt{b+3}=0$,则$(a+b)^{2\,018}=$________;

(2)若 $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$,则 $x^y=$________.

10.已知$\sqrt{2a-3}+b=4$,化简$\sqrt{a^2-2a+1}-\sqrt{b^2-8b+16}=$________.

拓展创新

11.已知实数 x,y,a 满足$\sqrt{x+y-8}+\sqrt{8-x-y}=\sqrt{3x-y-a}+\sqrt{x-2y+a+3}$,试问:长度分别为 x,y,a 的三条线段能否构成一个三角形?请说明理由.

16.2 二次根式的乘除

第 1 课时 二次根式的乘法

学习目标

1.经历二次根式乘法法则的推导过程,提高从具体数字中抽象概括运算规律的能力.

2.掌握二次根式的乘法法则,会逆用二次根式的乘法法则,能熟练正用或逆用乘法法则进行二次根式的化简和运算,提升数学运算的核心素养.

自主预习·探新知

学习任务 二次根式的乘法法则

学习过程

1.计算下列各式,观察计算结果.

(1)$\sqrt{4}\times\sqrt{25}=$________,$\sqrt{4\times25}=$________;

(2)$\sqrt{16}\times\sqrt{9}=$________,$\sqrt{16\times9}=$________;

(3)$\sqrt{100}\times\sqrt{36}=$________,$\sqrt{100\times36}=$________.

2.用“$>$”“$<$”或“$=$”填空.

(1)$\sqrt{4}\times\sqrt{25}$________$\sqrt{4\times25}$;

(2)$\sqrt{16}\times\sqrt{9}$________$\sqrt{16\times9}$;

(3)$\sqrt{100}\times\sqrt{36}$________$\sqrt{100\times36}$;

(4)$\sqrt{\frac{9}{4}}\times\sqrt{\frac{1}{4}}$________$\sqrt{\frac{9}{4}\times\frac{1}{4}}$.

3.根据填空你可以得出什么结论?当 $a\geqslant0,b\geqslant0$ 时,$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{ab}$ 有什么关系?请你猜想一下.

4.$\sqrt{(-4)\times(-9)}=\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}$ 成立吗?为什么?

5.由 4 知,等式 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 成立的条件是什么?

探究归纳

1.二次根式的乘法法则

(1)语言叙述:两个二次根式相乘,就是把________相乘,根指数________.

(2)符号表示:$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=$________$(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

2.积的算术平方根的性质

(1)语言叙述:积的算术平方根等于____________.

(2)符号表示:$\sqrt{ab}=$________$(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

即时小练

1.化简:

(1)$\sqrt{25\times81}=$________$\times$________$=$________$\times$________$=$________;

(2)$\sqrt{49\times144}=$________$\times$________$=$________$\times$________$=$________;

(3)$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=$________$=$________;

(4)$\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{2}}=$________$=$________.

2.判断对错.

(1)$\sqrt{8}\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{8\times\frac{1}{2}}=2$. ( )

(2)$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$. ( )

(3)$\sqrt{(-9)\times(-64)}=\sqrt{-9}\times\sqrt{-64}$. ( )

(4)$\sqrt{4\times64\times81}=\sqrt{4}\times\sqrt{64}\times\sqrt{81}$. ( )

合作探究·释疑难

要点突破 1 二次根式的乘法运算

【例 1】 计算:(1)$\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{75}$;

(2)$5\sqrt{27}\times(-3\sqrt{3})$;

(3)$\sqrt{\frac{5}{3}}\times\sqrt{\frac{9}{125}}\times\sqrt{3}$;

(4)$3\sqrt{ab}\times\sqrt{\frac{1}{b}}(a\geqslant0,b>0)$.

思考 1:在(1)和(3)中,根据二次根式的乘法法则,________不变,把被开方数________.

思考 2:在(2)和(4)中,根据乘法的________律和________律,应把系数与________、被开方数与________分别________.

解:

规律方法

二次根式相乘有规则

(1)二次根式相乘时,把被开方数和各个根号外面的系数分别相乘,将系数相乘的积作为积的系数,把被开方数相乘的积作为积的被开方数.

(2)二次根式相乘时,被开方数中有开得尽方的因数或因式一定要开方.

【变式训练】

1.(浙江金华中考)下列各组数中,把两数相乘,积为1的是 ( )

A.2和-2　　B.-2和$\frac{1}{2}$

C.$\sqrt{3}$和$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\sqrt{3}$和$-\sqrt{3}$

2.计算:(1)$3\sqrt{\frac{1}{5}}\times2\sqrt{125}$; (2)$\sqrt{2}\times\frac{1}{6}\sqrt{3}\times\sqrt{6}$;

(3)$\sqrt{\frac{4}{3}}\times\sqrt{\frac{27}{16}}$; (4)$\sqrt{3\frac{1}{5}}\times\sqrt{31\frac{1}{4}}$.

要点突破 2 二次根式乘法法则的逆用

【例2】化简:(1)$\sqrt{360}$;(2)$\sqrt{81\times100}$;

(3)$\sqrt{21\times112}$;(4)$\sqrt{12x^2y^2z^3}$($x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$).

思考:360中包含的最大的平方数是________;81×100中含有两个平方数,是________和________;21×112中包含的平方数是________和________;$12x^2y^2z^3$中包含的平方数(式)是________,________,________和________.

解:

规律方法

化简二次根式的三步骤、一关键、一条件

三步骤:(1)分解,即把被开方数分解因式(或因数).

(2)化积,即把各因式(或因数)积的算术平方根化为每个因式(或因数)的算术平方根的积.

(3)化简,即如果因式中有平方式(或平方数),应用关系式$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$把这个因式(或因数)开出来,将二次根式化简.

一关键:找出因式(或因数)中的平方式(或平方数).

一条件:在$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$中,$a$和$b$必须都是非负数.

【变式训练】

3.化简:

(1)$\sqrt{9\times64}$; (2)$\sqrt{49a^2b^3}$($a\geqslant0,b\geqslant0$);

(3)$\sqrt{13^2-12^2}$.

4.计算:$-\sqrt{3}\times\sqrt{(-16)\times(-36)}$.

达标检测

1.(湖南益阳中考)下列各式化简后的结果为$3\sqrt{2}$的是 ( )

A.$\sqrt{6}$　　B.$\sqrt{12}$　　C.$\sqrt{18}$　　D.$\sqrt{36}$

2.下列各式成立的是 ( )

A.$4\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=8\sqrt{5}$　　B.$5\sqrt{3}\times4\sqrt{2}=20\sqrt{5}$

C.$4\sqrt{3}\times3\sqrt{2}=7\sqrt{5}$　　D.$5\sqrt{2}\times3\sqrt{3}=15\sqrt{6}$

3.$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$成立的条件是________.

4.化简:(1)$\sqrt{480}$; (2)$\sqrt{(-16)\times144\times(-8)}$.

5.计算：(1)$\sqrt{15}\times\sqrt{5}$；　(2)$3\sqrt{7}\times2\sqrt{14}$；

(3)$3\sqrt{2}\times5\sqrt{14a^2}(a\geqslant0)$；

(4)$\sqrt{5n}\cdot\sqrt{\frac{4}{5}mn}(m\geqslant0,n\geqslant0)$；

(5)$4\sqrt{48}\times\left(-\frac{2}{3}\sqrt{0.5}\right)\times6\sqrt{6}$；

(6)$a\sqrt{ab}\cdot3\sqrt{\frac{b}{a}}(a>0,b\geqslant0)$.

分层演练·提素能

基础巩固

1.化简$\sqrt{(-5)^2\times3}$的结果是　(　　)

A.$-5\sqrt{3}$　B.$5\sqrt{3}$　C.$\pm5\sqrt{3}$　D.30

2.下列各式计算正确的是　(　　)

A.$\sqrt{(-4)\times(-16)}=\sqrt{-4}\times\sqrt{-16}=(-2)\times(-4)=8$

B.$\sqrt{8a^2}=4a(a\geqslant0)$

C.$\sqrt{3^2+4^2}=3+4=7$

D.$\sqrt{41^2-40^2}=\sqrt{41+40}\times\sqrt{41-40}=9\times1=9$

3.如果$\sqrt{50}\cdot\sqrt{a}$的结果是一个整数，那么a所取的最小正整数为　(　　)

A.2　B.5　C.20　D.50

4.当$ab<0$时，化简$\sqrt{ab^2}$的结果是　(　　)

A.$-b\sqrt{a}$　B.$b\sqrt{a}$

C.$b\sqrt{-a}$　D.$-b\sqrt{-a}$

5.若一个直角三角形的两条直角边长分别为$2\sqrt{3}$ cm和$3\sqrt{6}$ cm，则这个三角形的面积为________cm^2.

6.计算：(1)$\sqrt{12}\times\sqrt{30}$；

(2)$4\sqrt{ab^3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{a^3b}$；

(3)$\frac{3}{2}\sqrt{20}\times(-\sqrt{15})\times\left(-\frac{1}{3}\sqrt{48}\right)$.

能力提升

7.已知$m=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times(-2\sqrt{21})$，则有　(　　)

A.$5<m<6$　B.$4<m<5$

C.$-5<m<-4$　D.$-6<m<-5$

8.把$(2-m)\sqrt{\frac{1}{m-2}}$的根号外的因式移入根号内，得到　(　　)

A.$\sqrt{2-m}$　B.$\sqrt{m-2}$

C.$-\sqrt{2-m}$　D.$-\sqrt{m-2}$

9.设$\sqrt{2}=a$，$\sqrt{3}=b$，请用含有a，b的式子表示$\sqrt{24}=$________.

10.(1)有这样一个问题：$\sqrt{2}$与下列哪些数相乘，结果是有理数？

A.$3\sqrt{2}$　B.$2\sqrt{3}$　C.$\sqrt{6}$　D.$\frac{3}{\sqrt{2}}$　E.0

问题的答案是________(只需填字母)；

(2)如果一个数与$\sqrt{2}$相乘的结果是有理数，那么这个数的一般形式是什么(用代数式表示)？

拓展创新

11.观察分析下列数据，寻找规律：

$0,\sqrt{3},\sqrt{6},3,2\sqrt{3},\sqrt{15},\cdots$.

(1)这组数据第10个数是什么？

(2)你发现了什么规律？写出这组数据的第n个数.

(3)求这组数据的第19个数与第55个数的积.

第 2 课时　二次根式的除法与最简二次根式

学习目标

1.经历二次根式除法法则的推导过程，掌握二次根式的除法法则，能够灵活运用与逆用二次根式的除法法则，提高数学运算能力.

2.理解最简二次根式的概念，会把二次根式化成最简二次根式.

自主预习 · 探新知

学习任务一　二次根式的除法法则

学习过程

1.计算下列算式，并观察比较计算结果.

(1)因为$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}=$________，$\sqrt{\frac{16}{4}}=$________，

所以$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$________$\sqrt{\frac{16}{4}}$.

(2)因为$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}=$________，$\sqrt{\frac{36}{9}}=$________，

所以$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$________$\sqrt{\frac{36}{9}}$.

(3)因为$\sqrt{100}\div\sqrt{\frac{1}{4}}=$________，$\sqrt{100\div\frac{1}{4}}=$________，所以$\sqrt{100}\div\sqrt{\frac{1}{4}}$________$\sqrt{100\div\frac{1}{4}}$.

2.通过上面的计算，你能发现什么规律？请用字母 a，b 表示这一规律.

3.上述所得式子中 a，b 的取值范围和$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a\geqslant0,b\geqslant0)$中 a，b 的取值范围相同吗？为什么？

4.如果将 2 中所得到的式子的左右两边位置互换，等式还成立吗？

探究归纳

1.二次根式的除法法则

(1)语言叙述：两个二次根式相除，把被开方数________，根指数________.

(2)符号表示：$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=$________$(a\geqslant0,b>0)$.

2.商的算术平方根

(1)语言叙述：商的算术平方根等于________除以________.

(2)符号表示：$\sqrt{\frac{a}{b}}=$________$(a\geqslant0,b>0)$.

学习任务二　最简二次根式

最简二次根式满足的两个条件

(1)被开方数不含________；

(2)被开方数中不含能开得尽方的________.

即时小练

1.下列二次根式中，不能再化简的是　(　　)

A.$\sqrt{4}$　　B.$\sqrt{12}$　　C.$\sqrt{7}$　　D.$\sqrt{18}$

2.判断对错.

(1)$\sqrt{6}\div\sqrt{2}=\sqrt{3}$.　(　　)

(2)$\sqrt{\frac{-4}{-9}}=\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-9}}$.　(　　)

(3)$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(　　)

合作探究 · 释疑难

要点突破 1　二次根式的除法运算

【例 1】计算：

(1)$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$；　(2)$\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}}$；　(3)$-5\sqrt{3\frac{1}{2}}\div\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{16}}$.

思考 1：(1)和(2)中两个二次根式相除，根指数不变，只需把两个________相除即可.

思考 2：在(3)中，需将系数与________分别相除.

解：

规律方法

(1)两个二次根式相除，可先将根号前的系数与系数对应相除，根号内的被开方数与被开方数对应相除，再把除得的结果相乘，即$(m\sqrt{a})\div(n\sqrt{b})=(m\div n)\times(\sqrt{a}\div\sqrt{b})$，其中 $a\geqslant0,b>0,n\neq0$.

(2)被开方数相除时，可以先用法则“除以一个不等于 0 的数等于乘这个数的倒数”进行约分，再得出最终结果.

【变式训练】

1.计算：

(1)$\frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{7}}$； (2)$\frac{-\sqrt{0.45}}{-\sqrt{0.5}}$； (3)$-\sqrt{2\frac{1}{5}}\div\sqrt{4\frac{1}{11}}$；

(4)$\sqrt{\frac{8b}{3a}}\div\sqrt{\frac{b^2}{16a^3}}$.

要点突破 2 二次根式除法法则的逆用

【例 2】化简：(1)$\sqrt{3.5}$； (2)$\sqrt{2\frac{7}{9}}$；

(3)$\sqrt{\frac{16\times25}{81}}$； (4)$\sqrt{\frac{5x}{169y^2}}(x>0,y>0)$.

思考 1：若想利用商的算术平方根的性质$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$($a\geqslant0,b>0$)进行化简，需先把小数化为________的形式，把带分数化为________的形式.

思考 2：如果分母中的根号不能直接约掉，那么应该怎样去掉？

思考 3：二次根式化简的结果有什么要求？

解：

规律方法

二次根式$\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant0,b>0)$的化简“两形式”

(1)分数形式：当被开方数为分数形式时，利用$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0,b>0)$化简.

(2)小数或带分数形式：当被开方数为小数或带分数形式时，先化为分数或假分数形式后再利用(1)进行化简.

【变式训练】

2.$-\sqrt{\frac{1}{2}}$的绝对值等于 (　　)

A.$\sqrt{2}$ B.$-\sqrt{2}$ C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$ D.$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.化简：

(1)$\sqrt{\frac{-3}{-16}}$； (2)$\sqrt{3\frac{1}{9}}$； (3)$\sqrt{\frac{49}{5}}$；

(4)$\sqrt{\frac{3m}{7n^2}}(m\geqslant0,n>0)$.

要点突破 3 最简二次根式

【例 3】下列二次根式中哪些是最简二次根式？哪些不是？若不是，请说明理由.

(1)$\sqrt{0.3}$； (2)$\sqrt{\frac{2}{5}xy}$； (3)$\sqrt{\frac{y}{x}}$； (4)$\frac{\sqrt{x}}{3}$；

(5)$\sqrt{a^2-2a+1}$； (6)$\sqrt{a^2+b^2}$； (7)$\sqrt{32n}$；

(8)$\frac{\sqrt{2}}{3}$.

思考：被开方数中含有分母的是________，被开方数可以直接进行开方运算的是________.

解：

规律方法

在判断一个二次根式是否为最简二次根式时，需要看被开方数中是否含有能开得尽方的因数或因式，及被开方数是否含有分母.若被开方数是多项式，则先进行因式分解，再进行判断.

【变式训练】

4.(广西贵港中考)下列二次根式中，最简二次根式是 (　　)

A.$-\sqrt{2}$ B.$\sqrt{12}$ C.$\sqrt{\frac{1}{5}}$ D.$\sqrt{a^2}$

达标检测

1.下列计算错误的是 (　　)

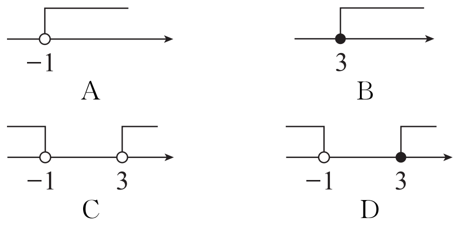
A.$\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ B.$\sqrt{4\frac{2}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C.$\sqrt{\frac{-7}{-64}}=\frac{\sqrt{7}}{8}$ D.$-\sqrt{\frac{28}{9}}=-\frac{2\sqrt{7}}{3}$

2.下列式子中，属于最简二次根式的是 (　　)

A.$\sqrt{9}$ B.$\sqrt{7}$ C.$\sqrt{20}$ D.$\sqrt{\frac{1}{3}}$

3.(四川绵阳中考)等式$\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$成立的$x$的取值范围在数轴上可表示为 (　　)



4.把$\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{12ab}}$化去分母中的根号后得________.

5.计算:(1)$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$;　(2)$\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{8}}$;

(3)$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{27a}}$;　(4)$\sqrt{6\frac{3}{4}}$;

(5)$\sqrt{2.5}$;　(6)$\sqrt{\frac{x^3y}{9z^2}}(x\geqslant0,y\geqslant0,z>0)$.

分层演练·提素能

基础巩固

1.下列根式中最简二次根式有　　(　　)

①$2\sqrt{x^2y}$;　②$\sqrt{\frac{ab}{2}}$;　③$\frac{\sqrt{2}}{5}$;　④$\frac{\sqrt{2y^2}}{c}$;

⑤$\sqrt{0.1}$;　⑥$\sqrt{5(a^2-b^2)}$;　⑦$\sqrt{x^2+y^2}$.

A.2个　　B.3个　　C.4个　　D.5个

2.计算$\sqrt{18}\div\sqrt{\frac{3}{4}}\times\sqrt{\frac{4}{3}}$的结果为　　(　　)

A.$3\sqrt{2}$　　B.$4\sqrt{2}$

C.$5\sqrt{2}$　　D.$6\sqrt{2}$

3.已知长方形的长为$3\sqrt{10}$,面积为$30\sqrt{6}$,要在这个长方形上剪下一个正方形,则所剪下的正方形的最大面积是　　(　　)

A.30　　B.40　　C.50　　D.60

4.不等式$\sqrt{3}x<\sqrt{54}$的最大整数解为________.

5.比较大小:(1)$10\sqrt{2}$________$4\sqrt{13}$;

(2)$4\sqrt{\frac{5}{2}}$________$6\sqrt{10}\div2\sqrt{2}$.

6.计算:(1)$4\sqrt{6x^3}\div2\sqrt{\frac{x}{3}}$;

(2)$3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\div\sqrt{8}$;

(3)$\sqrt{1\frac{1}{3}}\div\left(\sqrt{2\frac{1}{3}}\div\sqrt{1\frac{2}{5}}\right)$.

能力提升

7.如果$ab>0,a+b<0$,那么下面各式:①$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,②$\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}=1$,③$\sqrt{ab}\div\sqrt{\frac{a}{b}}=-b$,其中正确的是　　(　　)

A.①②　　B.②③　　C.①③　　D.①②③

8.对于任意两个和为正数的实数a,b,定义运算"※"如下:$a※b=\frac{a-b}{\sqrt{a+b}}$.例如,$3※1=\frac{3-1}{\sqrt{3+1}}=1$,那么$8※12=$________.

9.计算:(1)$\sqrt{2\frac{1}{2}}\div3\sqrt{28}\times\left(-5\sqrt{2\frac{2}{7}}\right)$;

(2)$\frac{2}{b}\sqrt{ab^5}\cdot\left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right)\div3\sqrt{\frac{b}{a}}(a>0,b>0)$.

拓展创新

10.已知$a=\sqrt{\frac{2\ 015}{2\ 016}}$,$b=\sqrt{\frac{2\ 016}{2\ 017}}$,试比较$\frac{a}{b}$与1的大小.

11.如图16.2-1,在等腰三角形ABC中,$AB=AC$,D是边BC上的一点,$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,垂足分别为点E,F.若$DE+DF=3\sqrt{3}$,$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{128}$,求AB的长.

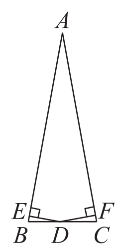


图16.2-1

16.3 二次根式的加减

第 1 课时 二次根式的加减

学习目标

1.探索二次根式加减运算的步骤和方法，培养通过归纳和类比得出运算法则的推理能力.

2.掌握二次根式的加减法则，会用该法则进行二次根式的加减运算，并能利用二次根式的加减运算解决一些实际问题.

自主预习 · 探新知

学习任务 二次根式的加减法则

学习过程

1.类比合并同类项进行计算.

(1)$5x+2x=$________$x=$________x；

$5\sqrt{3}+2\sqrt{3}=$________$\sqrt{3}=$________$\sqrt{3}$.

(2)$5x-2x=$________$x=$________x；

$5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=$________$\sqrt{3}=$________$\sqrt{3}$.

2.上面两组运算的依据是____________.

3.计算：$\sqrt{27}+\sqrt{12}+\sqrt{18}$

$=$________$+$________$+3\sqrt{2}$（化为最简二次根式）

$=$________$\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

（合并被开方数相同的二次根式）

$=$________$\sqrt{3}+3\sqrt{2}$. （计算结果）

4.由 1 和 3 可知，什么样的二次根式可以合并？

探究归纳

1.二次根式合并的条件及方法

只有________的最简二次根式才能合并，在有理数范围内成立的运算律，在实数范围内仍然________.

2.二次根式的加减法则和步骤

二次根式加减时，可以先将二次根式化成________，再将________的二次根式进行合并.

即时小练

1.下列根式中，可以与 $3\sqrt{2}$ 进行合并的是 （　　）

A.$\sqrt{12}$　B.$\sqrt{8}$　C.$\sqrt{6}$　D.$\sqrt{3}$

2.下列计算中正确的是 （　　）

A.$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$　B.$\sqrt{3}-\sqrt{2}=1$

C.$3+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$　D.$3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

3.（湖南衡阳中考）计算：$\sqrt{8}-\sqrt{2}=$________.

合作探究 · 释疑难

要点突破 1 二次根式的合并

【例 1】下列各组二次根式中，可以合并的是________.（只填序号）

①$\sqrt{24}$与$\sqrt{54}$；　②$\sqrt{\frac{1}{5}}$与$\sqrt{\frac{3}{5}}$；

③$\sqrt{72x}$与$\sqrt{18x}$；　④$\sqrt{\frac{48}{a}}$与$\sqrt{\frac{27}{a}}$.

规律方法

二次根式合并要“一化二看”再判断

要判断两个二次根式在加减运算中是否可以进行合并，不要只看表面形式，要“一化二看”再判断. “一化”即化成最简二次根式，“二看”即看化简后的二次根式的被开方数是否相同.

【变式训练】

1.下列各组二次根式中，能合并的是________.（只填序号）

①$\sqrt{48}$和$\sqrt{27}$；　②$\sqrt{\frac{1}{3}}$和$\sqrt{\frac{2}{3}}$；　③$\sqrt{45a}$和$\sqrt{125a}$.

要点突破 2 二次根式的加减

【例 2】计算：(1)$\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{18}$；

(2)（江苏泰州中考）$\frac{1}{2}\sqrt{12}-\left(3\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{2}\right)$；

(3)$3\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{32}+7\sqrt{\frac{1}{8}}$；

(4)$\frac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\frac{x}{4}}-2x\sqrt{\frac{1}{x}}$.

解：

规律方法

二次根式的加减，类比学习很简单

二次根式的加减运算与整式的加减运算类似，都是“同类”部分不变，前面的系数相加减，并把“不同类”的部分也作为最终结果中的一部分，同时整式加减运算中的交换律、结合律、去括号法则、添括号法则等在二次根式的加减运算中仍然适用.

【变式训练】

2.计算:(1)$\sqrt{75}-\frac{1}{\sqrt{3}}$; (2)$\sqrt{\frac{1}{2}}-\left(\sqrt{18}-\frac{1}{2}\sqrt{50}\right)$;

(3)$\sqrt{24}-\sqrt{\frac{1}{6}}-\frac{1}{3}\sqrt{54}$.

达标检测

1.下列二次根式中,能与$\sqrt{3}$合并的是 ( )

A.$\sqrt{24}$ B.$\sqrt{32}$ C.$\sqrt{96}$ D.$\sqrt{\frac{3}{4}}$

2.下列计算正确的是 ( )

A.$4\sqrt{3}-3\sqrt{3}=1$ B.$\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{7}$

C.$5\sqrt{2a}+\sqrt{2a}=6\sqrt{2a}$ D.$3+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

3.(浙江杭州中考)$|1+\sqrt{3}|+|1-\sqrt{3}|=$ ( )

A.1 B.$\sqrt{3}$ C.2 D.$2\sqrt{3}$

4.若最简二次根式$\sqrt{1+a}$与$\sqrt{4-2a}$可以合并,则a的值为________.

5.计算:(1)$\sqrt{75}+2\sqrt{8}-\sqrt{200}$;

(2)$\sqrt{2}+3\sqrt{0.5}-\frac{\sqrt{3}}{3}+8\sqrt{\frac{1}{3}}$;

(3)$(\sqrt{12a}+\sqrt{20a})+(\sqrt{3a}-\sqrt{5a})$;

(4)(浙江绍兴中考)$(2\sqrt{3}-\pi)^0+|4-3\sqrt{2}|-\sqrt{18}$;

(5)$a\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{4b}-\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-b\sqrt{\frac{1}{b}}\right)$.

分层演练·提素能

基础巩固

1.下列各组根式,化简后可以合并的一组是 ( )

A.$\sqrt{54}$和$\sqrt{\frac{3}{4}}$ B.$\sqrt{2\frac{2}{3}}$和$\sqrt{1.125}$

C.$\sqrt{ab^3c^5}$和$3\sqrt{\frac{c}{ab}}$ D.$\sqrt{\frac{1}{x^2y}}$和$\sqrt{\frac{y^4}{x^5}}$

2.已知$xy=3(x>0,y>0)$,则$x\sqrt{\frac{y}{x}}+y\sqrt{\frac{x}{y}}$的值为 ( )

A.3 B.$2\sqrt{3}$ C.$\sqrt{3}$ D.6

3.已知一块三角形钢板,测得其三边长分别为$2\sqrt{3}$ cm,$\sqrt{12}$ cm,$\sqrt{27}$ cm,则该钢板的周长为________cm.

4.若最简根式$\sqrt[a+b]{3a}$与$\sqrt{a+2b}$的和是一个二次根式,则$ab=$________.

5.计算:

(1)$-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+5\sqrt{3}+4\sqrt{2}$;

(2)$\sqrt{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{3}\sqrt{54}-2\sqrt{\frac{2}{27}}\right)$;

(3)$\sqrt{32}-3\sqrt{\frac{1}{3}}+10\sqrt{0.08}-\frac{1}{2}\sqrt{48}$;

(4)$\left(\sqrt{24}-\sqrt{0.5}+2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{6}\right)$.

6.是否存在实数m,使最简二次根式$\sqrt{m-2}$与$\sqrt{26-m}$可以合并?若存在,求出m的值;若不存在,请说明理由.

能力提升

7.若$\sqrt{11}$的整数部分为x,小数部分为y,则$x\sqrt{11}+y=$________.

8.若a,b为有理数,且$\sqrt{18}+\sqrt{9}+\sqrt{\frac{1}{8}}=a+b\sqrt{2}$,则$5a-4b$的值为________.

9.计算:(1)$\frac{3}{4}\sqrt{16x}+6\sqrt{\frac{x}{9}}-3x\sqrt{\frac{1}{x}}$;

(2)$\frac{1}{2}\sqrt{a}+\frac{3}{4}\sqrt{a^3}-\frac{7}{8a}\sqrt{a^5}-\frac{1}{4a^2}\sqrt{a^7}$;

(3)$\left(4b\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{a}\sqrt{a^3b}\right)-\left(3a\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{9ab}\right)$ $(a>0,b>0)$.

拓展创新

10.为了宣传环保、绿化,小丽为学校宣传栏做了两张大小不同的正方形壁画,其中一张面积为800 cm²,另一张面积为450 cm².她想再把壁画的边镶上金色彩带,若小丽现在有长为1.2 m的金色彩带,请你帮忙算一算,她的金色彩带够用吗?如果不够用,还需要大约多长的金色彩带?($\sqrt{2}\approx1.414$,结果保留整数)

第 2 课时　二次根式的混合运算

学习目标

1.类比整式的运算,理解并掌握二次根式中的运算律、运算法则及乘法公式.
2.能熟练地进行二次根式的混合运算,提高数学综合运算能力.

自主预习·探新知

学习任务　二次根式的混合运算

1.多项式乘法法则和乘法公式在二次根式的运算中________.

2.二次根式的混合运算顺序与实数的运算顺序一样,先算________,再算________,最后算________,有括号的先算________.

即时小练

1.下列等式不成立的是　(　　)

A.$6\sqrt{2}\times\sqrt{3}=6\sqrt{6}$　　B.$\sqrt{8}\div\sqrt{2}=4$

C.$2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$　　D.$\sqrt{32}-\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

2.判断对错.

(1)$\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)=3+2\sqrt{3}$.　(　　)

(2)$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$.　(　　)

(3)$(\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2})^2-1^2=1$.　(　　)

(4)$\sqrt{10}\div\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{10}\div1=\sqrt{10}$.　(　　)

合作探究·释疑难

要点突破 1　二次根式的混合运算

【例 1】计算:

(1)$\sqrt{6}\times(2\sqrt{2}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}+1)^2$;

(2)$\left(3\sqrt{18}-4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\div\sqrt{32}$;

(3)$\sqrt{27}\div\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

(4)$(4-\sqrt{15})^{2\,018}(4+\sqrt{15})^{2\,018}$.

解:

解后反思

二次根式混合运算的四点注意

(1)确定运算顺序:先算乘方,再算乘除,最后算加减,有括号的先算括号内的.
(2)灵活运用运算律.
(3)正确使用乘法公式.
(4)在有些运算中约分可使运算简便.

【变式训练】

1.计算:

(1)$\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})-\sqrt{24}-|\sqrt{6}-3|$;

(2)$\sqrt{2}(2\sqrt{6}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)^2$;

(3)$\left(\sqrt{18}+\frac{1}{5}\sqrt{50}-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\div\sqrt{50}$.

要点突破 2　二次根式的化简求值

【例 2】已知 $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$,$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,求下列式子的值:(1)a^2b+ab^2;　(2)a^2+b^2.

思考 1:把 a 和 b 的值直接代入(1)和(2)运算产生的问题是什么?

思考 2:利用因式分解及乘法公式对(1)和(2)中的算式进行恒等变形:

(1)$a^2b+ab^2=$________.

(2)$a^2+b^2=a^2+b^2+2ab$________$=$________.

解:

【一题多变】

1.已知条件不变,则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=$________.

2.若 $a=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,$b=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,则$\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}=$________.

规律方法

二次根式化简求值的运算技巧

(1)一般是先化简,再代入求值.化简时要化简代数式,如果字母表示的二次根式不是最简形式时,那么也要将其化简,这样就可以逐步简化运算.
(2)代入求值有两种类型:一是直接代入法,二是把代数式或已知的二次根式变形后整体代入,要结合题目的特点灵活选择恰当的方法.
(3)最终结果要化为最简的形式.

【变式训练】

2.若 $x=\sqrt{5}+1, y=\sqrt{5}-1$，则 $x^2+xy+y^2=$________.

3.(1)先化简，再求值：

$(2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})-4x(x-2)$，其中 $x=\sqrt{3}+\frac{1}{2}$.

(2)已知 $x=\sqrt{2\ 018}+3$，求 $x^2-6x+10$ 的值.

达标检测

1.下列计算正确的是 (　　)

A.$\sqrt{75}-\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

B.$\frac{\sqrt{27}-\sqrt{12}}{3}=\sqrt{9}-\sqrt{4}=1$

C.$(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=1$

D.$\frac{6-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

2.若 $x+y=\sqrt{3}+\sqrt{2}, xy=\sqrt{6}$，则 $x^2+y^2=$ (　　)

A.5　　B.3　　C.2　　D.1

3.若 $x=\sqrt{5}+2$，则 $(x-1)(x-3)+(2\ 019-\sqrt{5})^0$ 的值为________.

4.计算：

(1)(陕西中考)$(-\sqrt{2})\times\sqrt{6}+|\sqrt{3}-2|-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$；

(2)$(\sqrt{6}+\sqrt{8})\times\sqrt{3}$；

(3)$(4\sqrt{6}-3\sqrt{2})\div2\sqrt{2}$；

(4)$(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{2}+\sqrt{3})$；

(5)$(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$；

(6)$(1-2\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})-(2\sqrt{3}-1)^2$.

分层演练 · 提素能

基础巩固

1.化简 $\sqrt{3}-\sqrt{3}(1-\sqrt{3})$ 的结果是 (　　)

A.3　　B.-3　　C.$\sqrt{3}$　　D.$-\sqrt{3}$

2.已知 $a-b=2\sqrt{3}-1, ab=\sqrt{3}$，则 $(a+1)(b-1)$ 的值为 (　　)

A.$-\sqrt{3}$　　B.$3\sqrt{3}$　　C.$3\sqrt{2}-2$　　D.$\sqrt{3}-1$

3.若一个长方形花坛的长为 $(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})$ m，宽为 $(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})$ m，则这个花坛的面积为________m^2.

4.(1)若 $x=2-\sqrt{5}$，则 $x^2-4x-2=$________；

(2)若 $a=\sqrt{2}+1, b=\sqrt{2}-1$，则 $\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=$________；

(3)若 $x=7+4\sqrt{3}, y=7-4\sqrt{3}$，则 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=$________.

5.计算：(1)$(2\sqrt{3}-\sqrt{18})(\sqrt{12}+3\sqrt{2})$；

(2)$(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+2)^2-2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)$；

(3)$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$；

(4)$(\sqrt{18}-\sqrt{12})\div\sqrt{6}-4\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{1}{4}\right)$.

能力提升

6.按如图 16.3-1 所示的程序计算，若开始输入的 n 值为 $\sqrt{2}$，则最后输出的结果是 (　　)

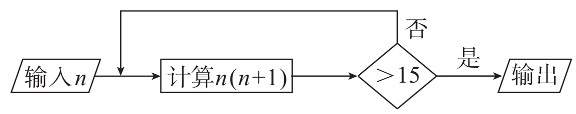


图 16.3-1

A.14　　B.16　　C.$8+5\sqrt{2}$　　D.$14+\sqrt{2}$

7.(1)计算：$\sqrt{6}\div\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=$________；

(2)比较大小：$\sqrt{6}-\sqrt{5}$________$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

8.(辽宁锦州中考)先化简，再求值：

$\frac{x}{x^2-1}\div\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$，其中 $x=\frac{1}{2}\sqrt{32}-3\sqrt{\frac{1}{2}}-(\pi-3)^0$.

9.已知 $5+\sqrt{13}$ 与 $5-\sqrt{13}$ 的小数部分分别是 a, b，试求代数式 $ab-4a+3b+6$ 的值.

拓展创新

10.如图 16.3-2，数轴上与 $1, \sqrt{2}$ 对应的点分别为 A，B，点 B 关于点 A 的对称点为 C，设点 C 表示的数为 x，则 $|x-\sqrt{2}|+\frac{2}{x}$ 的值为________.

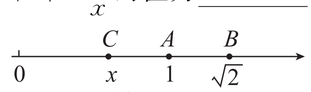


图 16.3-2

章末归纳整合

知识体系·全构建

回顾本章知识,将下面的知识体系图补充完整.

二次根式
- 概念
  - 二次根式:形如①________的式子
  - 最简二次根式
    - (1)被开方数不含②________;
    - (2)被开方数中不含能开得尽方的因数或因式
- 性质
  - (1)$\sqrt{a}\geqslant0(a\geqslant0)$;(2)$(\sqrt{a})^2=$③________$(a\geqslant0)$;
  - (3)$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant0,\\ ④\_\_\_\_\_\_, & a<0;\end{cases}$(4)当 $a\geqslant0$ 时,$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}$
- 运算
  - 乘除
    - 乘法:$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=$⑤________$(a\geqslant0,b\geqslant0)\Rightarrow\sqrt{ab}=$⑥________$(a\geqslant0,b\geqslant0)$
    - 除法:$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=$⑦________$(a\geqslant0,b>0)\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{b}}=$⑧________$(a\geqslant0,b>0)$
  - 加减:先化成⑨________二次根式,再合并⑩________相同的二次根式
  - 混合运算:类比整式的运算进行计算

答案:①$\sqrt{a}(a\geqslant0)$ ②分母 ③a ④$-a$ ⑤$\sqrt{ab}$ ⑥$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ ⑦$\sqrt{\frac{a}{b}}$ ⑧$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ⑨最简 ⑩被开方数

核心考点·精突破

考点一 二次根式有意义的条件

方法技巧

二次根式$\sqrt{a}$中的被开方数 a 可以是数,也可以是单项式、多项式、分式等代数式,但必须注意被开方数 $a\geqslant0$.只有 $a\geqslant0$,二次根式才有意义.考查二次根式有意义的条件时,经常综合分式、零指数幂的知识一起考查,此时除了保证被开方数非负外,还要保证其他代数式有意义.

题组集训

1.(山东日照中考)若式子$\frac{\sqrt{a+1}}{a-2}$有意义,则实数 a 的取值范围是 ( )

A.$a\geqslant-1$ B.$a\neq2$

C.$a\geqslant-1$,且 $a\neq2$ D.$a>2$

2.若代数式$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}+(x-2)^0$ 在实数范围内有意义,则 x 的取值范围是________.

考点二 二次根式非负性的应用

方法技巧

二次根式具有双重非负性(即二次根式本身是非负的,其被开方数也是非负的),这一性质经常作为隐含条件出现在问题中.因为条件没有直接给出,所以只有根据二次根式的性质挖掘出这些隐含条件,才能顺利解决问题.

题组集训

3.(四川自贡中考)若$\sqrt{a-1}+b^2-4b+4=0$,则 ab 的值等于 ( )

A.-2 B.0 C.1 D.2

4.(山东东营中考)若$|x^2-4x+4|$与$\sqrt{2x-y-3}$互为相反数,则 $x+y$ 的值为 ( )

A.3 B.4 C.6 D.9

考点三 二次根式的运算

方法技巧

二次根式的运算包括二次根式的加减、乘除及混合运算,是本章的重点和难点.在二次根式的混合运算中要注意运算顺序、运算律及乘法公式的应用,同时注意运算结果需化为最简二次根式.

题组集训

5.计算$(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$的结果等于________.

6.计算:

(1)(浙江湖州中考)$2\times(1-\sqrt{2})+\sqrt{8}$;

(2)(辽宁大连中考)$(\sqrt{2}+1)^2-\sqrt{8}+(-2)^2$;

(3)$(4\sqrt{3}-3\sqrt{6})\div2\sqrt{3}$.

考点四 二次根式化简求值

方法技巧

二次根式的化简求值多与分式、因式分解、完全平方公式及平方差公式综合考查.这类问题直接代入求值往往比较烦琐,应先化简已知条件,再代入变形后的式子中求解,这样可以简化运算.

题组集训

7.已知 $a-b=2+\sqrt{3}$,$b-c=2-\sqrt{3}$,则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ 的值为________.

8.(四川绵阳中考)先化简,再求值:

$\left(\dfrac{x-y}{x^2-2xy+y^2}-\dfrac{x}{x^2-2xy}\right)\div\dfrac{y}{x-2y}$,其中 $x=2\sqrt{2}$,$y=\sqrt{2}$.

学科素养·速提升

专题一 数形结合思想

数形结合思想是通过数与形之间的对应和转化来解决数学问题的,它包含"以形助数"和"以数解形"两个方面.利用它可使复杂问题简单化.在本章中,结合数轴化简二次根式就是数形结合思想的重要应用.

【例 1】 若数 a,b 在数轴上的对应点的位置如图 16-1 所示,则 $\sqrt{a^2}-\sqrt{(a-b)^2}=$________.

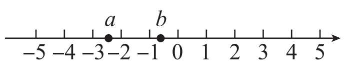


图 16-1

解析: 由数轴,得 $a<b<0$,所以 $a-b<0$,

所以 $\sqrt{a^2}=|a|=-a$,$\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=b-a$,

所以 $\sqrt{a^2}-\sqrt{(a-b)^2}=-a-(b-a)=-a-b+a=-b$.

答案: $-b$

方法技巧

首先利用数轴上"右边的点表示的数总比左边的点表示的数大"这一规律得到 $a<0$,$b<0$,且 $a<b$,然后进行开方,最后化简.

提能训练

1.在数轴上实数 a,b 的对应点的位置如图 16-2 所示,化简 $|a+b|+\sqrt{(a-b)^2}$ 的结果是 ( )

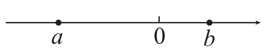


图 16-2

A.$-2a-b$ B.$-2a+b$

C.$-2b$ D.$-2a$

专题二 整体思想

整体思想的核心就是把所研究对象的一部分或全部视为一个整体运用到解题过程中.在关于二次根式的化简求值问题中,当求解已知条件中所含未知数比较困难时,可考虑把突破点放在问题的整体结构上,避开不必要的计算,运用整体思想,使问题得以简化.

【例 2】 已知 $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$,求 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+14}$ 的值.

解: 将 $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$ 两边同时平方,

得 $x+\dfrac{1}{x}-2=4$,

所以 $x+\dfrac{1}{x}=6$.

所以 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+14}=\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+12}$

$=\sqrt{6^2+12}$

$=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

解后反思

如果我们直接求 x 的值,那么要解决问题就比较困难,但把 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 视为整体,问题就变得非常容易.

提能训练

2.已知 $x=5+2\sqrt{6}$,$y=5-2\sqrt{6}$,则 $5x^2-16xy+5y^2$ 的值为________.

第十七章 勾股定理

17.1 勾股定理

第1课时 勾股定理

学习目标

1.经历勾股定理的探索过程，培养发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力，进一步体会数形结合的思想.

2.掌握勾股定理，理解勾股定理的证明过程，能用勾股定理解决有关直角三角形的边的计算问题.

自主预习·探新知

学习任务一 勾股定理

1.文字叙述：直角三角形两直角边的________等于斜边的________.

2.字母表示：如图17.1-1所示，如果直角三角形两直角边分别为 a,b，斜边为 c，那么________.

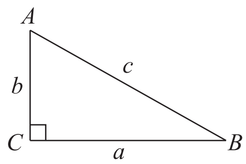


图17.1-1

学习任务二 勾股定理的拼图验证

学习过程

如图17.1-2，将4个全等的非等腰的直角三角形拼成一个大的正方形.

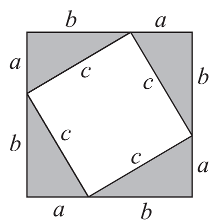


图17.1-2

(1)拼得大正方形的边长为________，则它的面积是________；大正方形的面积还可以表示为________$+$ $4\times$________.

(2)由它们的面积关系可得________$=$________$+$ $4\times$________，整理得________.

探究归纳

勾股定理的验证主要通过________完成，这种方法是以数形转换为指导思想，图形拼补为手段，各部分面积之间的关系为依据来实现的.

即时小练

1.在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边分别为 a,b,c，则下列结论正确的是________(只填序号).

①$a^2=c^2-b^2$；②$b^2=c^2-a^2$；③$c=\sqrt{a^2+b^2}$；

④$a=\sqrt{c^2-b^2}$；⑤$b=\sqrt{c^2-a^2}$.

2.在一个直角三角形中，若两条直角边长分别为6，8，则其斜边长为________.

3.下列说法中，正确的有________个.

①若 a,b,c 是△ABC 的三边，则 $a^2+b^2=c^2$；

②若 a,b,c 是 Rt△ABC 的三边，则 $a^2+b^2=c^2$；

③若 a,b,c 是 Rt△ABC 的三边，$\angle A=90^\circ$，则 $a^2+b^2=c^2$.

合作探究·释疑难

要点突破1 运用勾股定理计算求值

【例1】 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边分别是 a,b,c.

(1)已知 $a=b=6$，求 c；

(2)已知 $c=3,b=2$，求 a；

(3)已知 $a:b=2:1,c=5$，求 b.

解：

【一题多变】

已知一直角三角形两边长分别为3和2，则第三边长为________.

规律方法

利用勾股定理可以解决两类问题：

(1)已知直角三角形的两边长，求第三边的长；

(2)已知直角三角形的一边长和另外两边的数量关系，求另外两边的长.

应用勾股定理需注意两点：

(1)只有在直角三角形中，才能应用勾股定理；

(2)直角三角形中已知的两边没有明确是直角边还是斜边时，必须分类讨论.

【变式训练】

1.已知 Rt△ABC 的两直角边长分别为 6 和 8,则斜边 AB 上的高 h=________.

2.已知直角三角形两边长分别为 3 和 4,则其斜边长为________.

【例 2】如图 17.1-3 所示,在△ABC 中,$AB=15$,$BC=14$,$AC=13$,求△ABC 的面积.

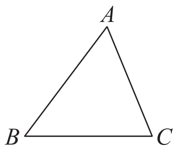


图 17.1-3

解:

规律方法

斜三角形作高的"三准则"

在非直角三角形中求有关线段的长时,常需添加辅助线构造直角三角形,而构造直角三角形最常用的方法就是作三角形的某条高.作高时,有三个准则可以参考:

(1)求三角形的面积尽量作已知边上的高;

(2)如果已知角度,要利用 30°,45°,60°这三个特殊角构造直角三角形;

(3)如果已知边长,应把 3,4,5;6,8,10;5,12,13 等这些常作为直角三角形的边长出现的整数值构造进直角三角形中,而不是分割"破坏"这些边长.

【变式训练】

3.如图 17.1-4,已知在△ABC 中,若 $AB=6\sqrt{2}$,$AC=10$,$\angle B=45°$,则△ABC 的面积为________.

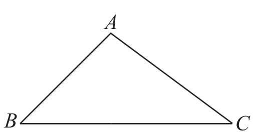


图 17.1-4

要点突破 2 勾股定理与图形面积

【例 3】如图 17.1-5,在△ABC 中,$\angle ABC=90°$,分别以 BC,AB,AC 为边向外作正方形,面积分别记为 S_1,S_2,S_3,若 $S_2=4$,$S_3=6$,则 S_1=________.

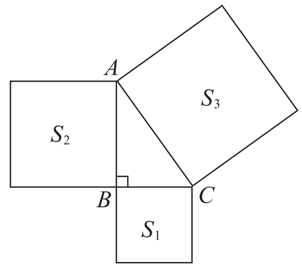


图 17.1-5

思考:观察图形,会发现 S_1,S_2,S_3 都与什么有关?

【一题多变】

把题干中的"向外作正方形"改为"向外作半圆",其他条件不变,如图 17.1-6 所示,则 S_1 的值为________.

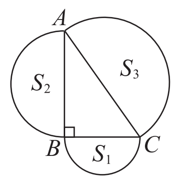


图 17.1-6

规律方法

巧用勾股定理求面积

(1)如图 17.1-7①所示,分别以直角三角形三边为边向外作正方形,有 $S_3=S_1+S_2$(S_1,S_2,S_3 分别代表三个正方形的面积,其中 S_3 代表以斜边为一边的正方形的面积).

(2)推广:如图 17.1-7②③所示,分别以直角三角形的三边为直径向外作半圆或以直角三角形的三边为边向外作等边三角形,则都有 $S_3=S_1+S_2$.

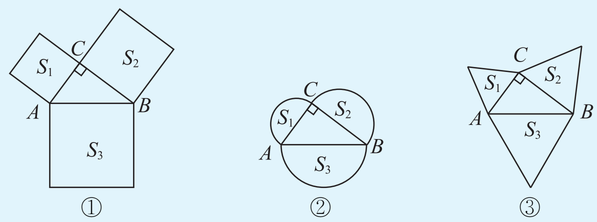


图 17.1-7

【变式训练】

4.如图 17.1-8 所示,阴影部分是两个正方形,图中还有一个大正方形和两个直角三角形,则两个阴影正方形面积的和为________.

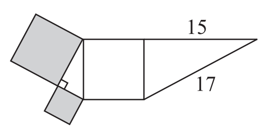


图 17.1-8

要点突破 3 勾股定理的证明

【例 4】一个直立的火柴盒在桌面上倒下,启迪人们发现了勾股定理的一种新的证明方法.如图 17.1-9,火柴盒的一个侧面四边形 $ABCD$ 倒下到四边形

$AB'C'D'$的位置，连接AC，AC'和CC'，设$AB=a$，$BC=b$，$AC=c$，请利用四边形$BCC'D'$的面积证明：$a^2+b^2=c^2$.

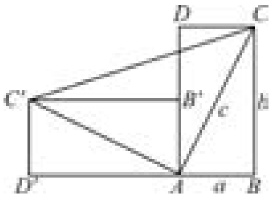


图 17.1-9

思考1：四边形$BCC'D'$的形状是________，其面积计算公式$S=$________.

思考2：四边形$BCC'D'$的面积可转化为哪些规则图形的面积的和？

证明：

规律方法

证明勾股定理的三步法

第1步：读图，即观察整个图形是由哪些图形拼接而成.

第2步：列式，即根据整个图形的面积等于各部分图形的面积和，列出关于直角三角形三边长的等式.

第3步：化简，即根据整式的运算化简等式，得出勾股定理.

【变式训练】

5.利用四个如图17.1-10①所示的直角三角形，拼出如图17.1-10②所示的图形，验证勾股定理.

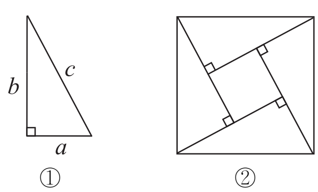


图 17.1-10

达标检测

1.如图17.1-11，阴影部分是一个正方形，则此正方形的面积为（　　）

A.17　　B.289

C.225　　D.19

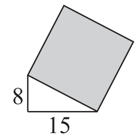


图 17.1-11

2.若直角三角形的两直角边长分别为a，b，且满足$\sqrt{a^2-6a+9}+|b-4|=0$，则该直角三角形斜边的长为________.

3.若一直角三角形的两边长分别为12和5，则第三边长为________.

4.若直角三角形有一条直角边长为6，另两条边长是连续偶数，则该直角三角形的周长为________.

5.在△ABC中，$\angle C=90°$.

(1)若$AC=1$，$BC=2$，求AB；

(2)若$\angle A=30°$，$BC=2$，求AC和AB；

(3)若$AB=34$，$BC:AC=8:15$，求AC和BC.

分层演练·提素能

基础巩固

1.若正方形的一条对角线长为10 cm，则这个正方形的面积是（　　）

A.100 cm² 　B.75 cm² 　C.50 cm² 　D.25 cm²

2.如图17.1-12，$AB=BC=CD=DE=1$，$AB\perp BC$，$AC\perp CD$，$AD\perp DE$，则$AE=$（　　）

A.1　B.$\sqrt{2}$　C.$\sqrt{3}$　D.2

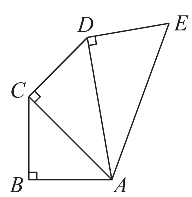


图 17.1-12

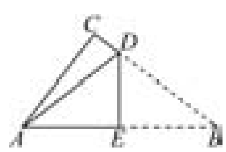


图 17.1-13

3.如图17.1-13，一张直角三角形的纸片，两直角边$AC=6$ cm，$BC=8$ cm.现将△ABC折叠，使点B与点A重合，折痕为DE，则BE的长为（　　）

A.4 cm　B.5 cm　C.6 cm　D.10 cm

4. 如图 17.1-14，分别以 Rt△ABC 的三边为边向外作正方形，其面积分别为 S_1，S_2，S_3，且 $S_1=7$，$S_2=9$，则 AB 的长为________.

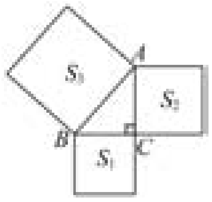


图 17.1-14

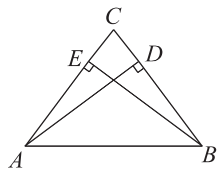


图 17.1-15

5. 如图 17.1-15，在△ABC 中，$CA=CB$，$AD\perp BC$，$BE\perp AC$，$AB=5$，$AD=4$，则 $AE=$________.

6. 一个零件的形状如图 17.1-16 所示，其面积是 36 cm²，已知 $AC\perp AB$，$BC\perp BD$，且 $AC=3$ cm，$AB=4$ cm，求 CD 的长.

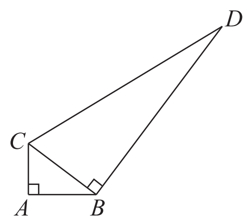


图 17.1-16

能力提升

7. 如图 17.1-17，直线 l 上有三个正方形 m，n，q，若 m，q 的面积分别为 5 和 11，则 n 的面积为 （　　）

A.4　　B.6　　C.16　　D.55

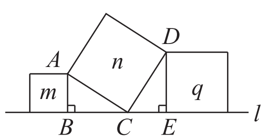


图 17.1-17

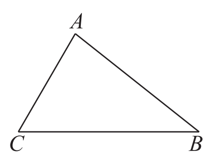


图 17.1-18

8. 如图 17.1-18，已知在△ABC 中，$\angle C=60°$，$AB=14$，$AC=10$，则 BC 的长为________.

9. 如图 17.1-19，已知在△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle 1=\angle 2$，$CD=1.5$，$BD=2.5$，求 AC 的长.

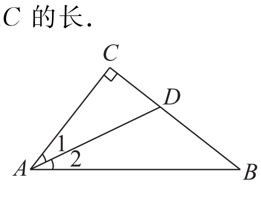


图 17.1-19

拓展创新

10. 勾股定理神秘而美妙，它的证法多样，其中的"面积法"给了小聪灵感.他惊喜地发现：当两个全等的直角三角形如图 17.1-20①或②摆放时，都可以用"面积法"来证明.下面是小聪利用图 17.1-20①证明勾股定理的过程：

将两个全等的直角三角形按如图 17.1-20①所示的方式摆放，其中$\angle DAB=90°$.求证：$a^2+b^2=c^2$.

证明：如图 17.1-20①，连接 DB，过点 D 作 BC 边上的高 DF，则 $DF=EC=b-a$.

因为 $S_{四边形ADCB}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab$，

$S_{四边形ADCB}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle DCB}=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$，

所以$\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$，

所以 $a^2+b^2=c^2$.

请参照上述证法，利用图 17.1-20②完成勾股定理的证明.

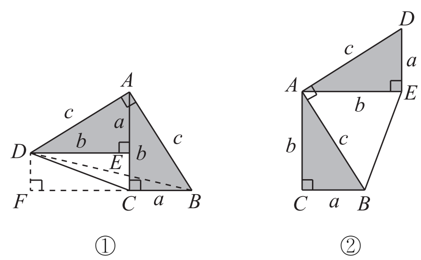


图 17.1-20

第 2 课时　勾股定理的应用

学习目标

1. 掌握勾股定理，能利用勾股定理解决简单的实际问题，通过对实际问题的解决，体会并理解数学建模思想，培养利用数学思维解决实际问题的能力.
2. 能够应用勾股定理在数轴上表示无理数，并理解立体图形中两点间距离最短问题，体会转化思想.

自主预习·探新知

学习任务一　勾股定理的实际应用

立体图形中距离最短问题

(1)如图 17.1-21，圆柱的侧面展开图是________，点 B 的位置应在长方形的边 CD 的________处，点 A 到点 B 的最短距离为线段________的长度.

(2)$AB=$________.

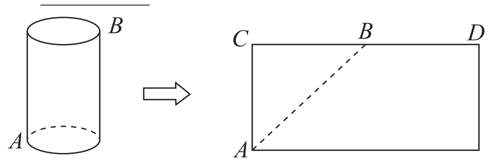


图 17.1-21

学习任务二　应用勾股定理在数轴上表示无理数

学习过程

在数轴上表示$\sqrt{26}$.

要在数轴上画出表示$\sqrt{26}$的点，只要画出长为$\sqrt{26}$的线段即可.利用勾股定理，长为$\sqrt{26}$的线段是直角边为正整数________，________的直角三角形的斜边.

如图 17.1-22，在数轴上找出表示 5 的点 A，则 $OA=$________，过点 A 作直线 l 垂直于 OA，在 l 上取点 B，使 $AB=$________，连接 OB，以原点 O 为圆心，以 OB 为半径作弧，弧与数轴的交点________即为表示$\sqrt{26}$的点.

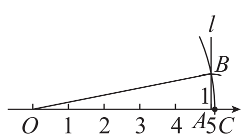


图 17.1-22

探究归纳

1. 有理数和________都可以在数轴上表示出来.
2. 作长为$\sqrt{n}$(n 为正整数)的线段：

当直角三角形的两直角边长分别为 1，1，斜边长为________，即 $1^2+1^2=(\sqrt{2})^2$；当两直角边长分别为$\sqrt{2}$，1，斜边长为________，即 $1^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2$；……

从而可以画出长为$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，…，$\sqrt{n}$的线段.

即时小练

1. 判断对错.

(1)利用勾股定理在数轴上不能表示负无理数.　(　　)

(2)如图 17.1-23，数轴上点 A 表示的数是$\sqrt{5}$.　(　　)

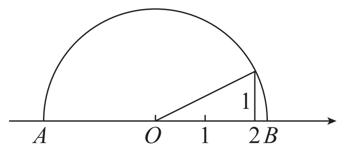


图 17.1-23

2. 如图 17.1-24，隔湖有两点 A，B，为了测得 A，B 两点间的距离，从与 AB 方向成直角的 BC 方向上任取一点 C，若测得 $CA=50$ m，$CB=40$ m，则 A，B 两点间的距离是________m.

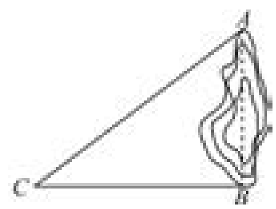


图 17.1-24

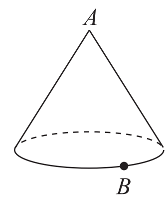


图 17.1-25

3. 如图 17.1-25(示意图)，有一个圆锥，高为 8 cm，底面圆直径为 12 cm.在圆锥的底面点 B 处有一只蚂蚁，它想吃掉圆锥顶部 A 处的食物，则它需要爬行的最短路程是________m.

合作探究·释疑难

要点突破 1　勾股定理的实际应用

【例 1】古诗赞美荷花："竹色溪下绿，荷花镜里香."如图 17.1-26(示意图)，平静的湖面上，一朵荷花亭亭玉立，露出水面 10 cm，忽见它随风斜倚，花朵恰好浸入水面，仔细观察，发现荷花偏离原地 40 cm.问：水深多少？

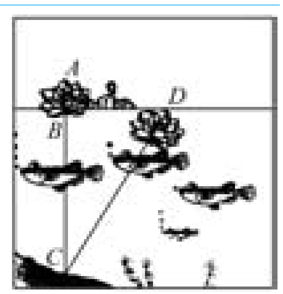


图 17.1-26

思考 1：图中有直角三角形吗？若有，请写出来.

思考 2：设水深 BC 为 x cm，用 x 将 CD 表示出来.

解：

规律方法

勾股定理的实际应用的一般步骤

(1)读懂题意,建立数学模型.

(2)分析数量关系,数形结合,正确标图,并将已知条件体现到图形中.

(3)应用勾股定理进行计算或建立等量关系,构建方程求解.

(4)解决实际问题.

【变式训练】

1. 某人拿着一根竹竿进一个宽为 3 m 的城门,他先水平横着拿不进去,又垂直竖起来拿,结果竹竿比城门高 1 m,当他把竹竿斜着时,两端恰好顶着城门的对角,则该竹竿长为________m.

要点突破 2 应用勾股定理在数轴上表示无理数

【例 2】 在如图 17.1-27 所示的数轴上作出表示$\sqrt{29}$的点.

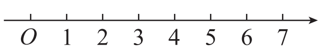


图 17.1-27

思考 1:根据在数轴上表示无理数的方法,需借助数轴构造一个直角三角形,并且斜边长为________.

思考 2:实数 29 可以转化为正整数________和________的平方和.

解：

【一题多变】

1. 如何在数轴上作出表示$\sqrt{30}$的点?

2. (1)在数轴上作出表示$-\sqrt{7}$的点,不写作法,只作图和保留作图痕迹;

(2)当被开方数不能直接拆成 2 个平方数的和时,如何处理?

规律方法

在数轴上表示无理数的三步法

第 1 步:“拆分”,即利用勾股定理拆分出哪两条线段长的平方和等于所画线段(斜边)长的平方.

第 2 步:“构造”,即以数轴的原点为直角三角形斜边的顶点,构造直角三角形.

第 3 步:“画弧”,即以数轴的原点为圆心,以直角三角形的斜边长为半径画弧,便可在数轴上找到表示该无理数的点.

【变式训练】

2. 在如图 17.1-28 所示的数轴上作出表示$-\sqrt{5}$的点.

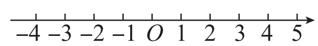


图 17.1-28

要点突破 3 立体图形中的最短路径问题

【例 3】 如图 17.1-29,长方体的长为 3 cm,宽为 2 cm,高为 1 cm.一只蚂蚁从点 A 出发沿着表面爬行到点 B,求蚂蚁爬行的最短路程.

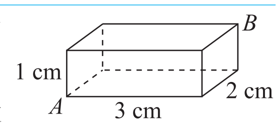


图 17.1-29

思考:立体图形中求最短路程的解决思路是什么?

解：

规律方法

化立体图形问题为平面图形问题,解决最短路径问题

求立体图形上两点间的最短距离时,可先将立体图形展开,使这两点在同一个平面内,再利用勾股定理求出两点之间线段的长度.但需要注意,一个立体图形的展开方式可能不止一种,要从中选出最短路径.

【变式训练】

3.有一圆柱形油罐,如图 17.1-30 所示,要从点 A 处环绕油罐建梯子,正好到点 A 的正上方点 B 处,问梯子最短需要多少米?(已知油罐的底面周长是 12 m,高 AB 是 5 m)

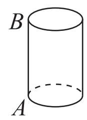


图 17.1-30

达标检测

1.如图 17.1-31,长方形 $OABC$ 的边 OA 长为 2,边 AB 长为 1,OA 在数轴上,以点 O 为圆心,对角线 OB 的长为半径画弧,交正半轴于一点,则这个点表示的实数是 ( )

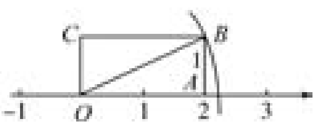


图 17.1-31

A.2.5　　B.$2\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.$\sqrt{5}$

2.(湖南湘潭中考)《九章算术》是我国古代最重要的数学著作之一,在“勾股”章中记载了一道“折竹抵地”问题:“今有竹高一丈,末折抵地,去本三尺,问折者高几何?”翻译成数学问题是:如图 17.1-32 所示,$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC+AB=10$,$BC=3$,求 AC 的长,如果设 $AC=x$,则可列方程为________.

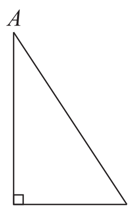


图 17.1-32

3.如图 17.1-33 所示,一只蚂蚁处在正方体的一个顶点 A 处,它想爬到 B 处寻找食物,若这个正方体的棱长为 1,则这只蚂蚁所爬行的最短路程为________.

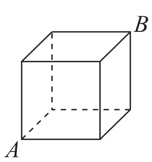


图 17.1-33

4.如图 17.1-34,有两棵树,一棵高为 12 m,另一棵高为 6 m,两树相距 8 m.一只小鸟从一棵树的树梢飞到另一棵树的树梢,则小鸟至少飞行________ m.

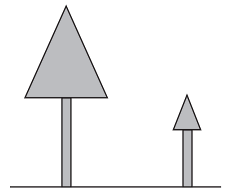


图 17.1-34

5.小明想知道学校旗杆的高度,他发现旗杆顶端的绳子垂到地面还多 1 m,当他把绳子的下端拉开 5 m 后,发现下端刚好接触地面,求旗杆的高度.

分层演练·提素能

基础巩固

1.如图 17.1-35 所示,有一块边长为 24 m 的正方形绿地,在绿地旁边 B 处有健身器材,由于居住在 A 处的居民践踏了绿地,小明想在 A 处树立一个标牌“少走◇米,踏之何忍?”“◇”处的数字应为 ( )

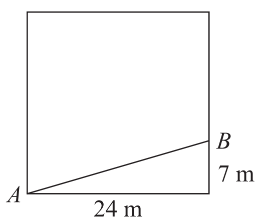


图 17.1-35

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

2.一个圆柱形铁桶(厚度不计)的底面直径为 24 cm,高为 32 cm,则这个桶内所能容下的最长木棒长为 ( )

A.32 cm　　B.50 cm　　C.40 cm　　D.45 cm

3.如图 17.1-36,长方体的底面边长分别为 1 cm 和 3 cm,高为 6 cm.如果用一根细线从点 A 开始经过 4 个侧面缠绕一圈到达点 B,那么所用细线最短需要 ( )

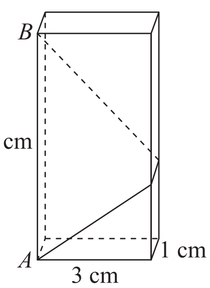


图 17.1-36

A.8 cm

B.10 cm

C.12 cm

D.15 cm

4. 如图 17.1-37，在正方形 $ODBC$ 中，$OC=1$，$OA=OB$，则数轴上点 A 表示的数是________.

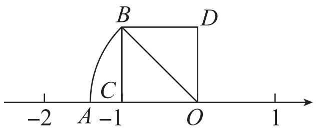


图 17.1-37

5. 放学以后，小丽和小宏从学校分别沿东南方向和西南方向回家.若小丽和小宏行走的速度都是 40 m/min，小丽用 15 min 到家，小宏用 20 min 到家，则小丽家和小宏家的直线距离为________m.

6. 如图 17.1-38，每个小正方形的边长为 1，则在 $\triangle ABC$ 中，边长为无理数的边有________条.

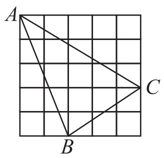


图 17.1-38

7. 在数轴上作出表示 $\sqrt{10}$ 的点.

能力提升

8. 我国古代有这样一道数学问题："枯木一根直立地上，高二丈，周三尺，有葛藤自根缠绕而上，五周而达其顶，问葛藤之长几何？"题意是：如图 17.1-39(示意图)所示，把枯木看作一个圆柱体，因一丈是十尺，则该圆柱的高为 20 尺，底面周长为 3 尺，有葛藤自点 A 处缠绕而上，绕五周后其末端恰好到达点 B 处.则问题中葛藤的最短长度是________尺(尺是我国古代的计量单位，1 米等于 3 尺).

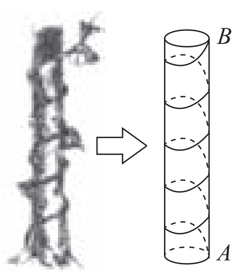


图 17.1-39

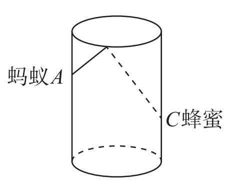


图 17.1-40

9. 如图 17.1-40(示意图)，圆柱形玻璃杯的高为 12 cm，底面周长为 18 cm.在杯内离杯底 4 cm 的点 C 处有一滴蜂蜜，此时一只蚂蚁正好在杯外壁，离杯上沿 4 cm 与蜂蜜相对的点 A 处，则蚂蚁到达蜂蜜所在地的最短路程为________cm.

10. 如图 17.1-41，在一棵树 CD 上距离地面 10 m 高的 B 处，有一只猴子和一只小鸟，猴子爬下树后沿 CA 走到离树 20 m 的池塘 A 处，小鸟先沿 BD 飞到树顶 D 处再沿直线 DA 飞到 A 处，如果猴子和小鸟所经过的距离相等，这棵树有多高？

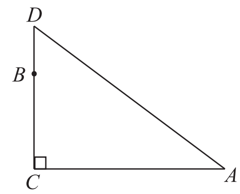


图 17.1-41

拓展创新

11. 如图 17.1-42，有一块直角三角形的绿地，量得两直角边长分别为 6 m，8 m.现在要将绿地扩充成等腰三角形，且扩充部分是以 8 m 为直角边的直角三角形，求扩充后等腰三角形绿地的周长.

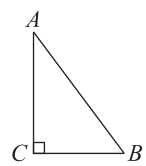


图 17.1-42

17.2 勾股定理的逆定理

学习目标

1. 经历勾股定理的逆定理的证明过程，培养从特殊到一般的逻辑思维能力和思考习惯.
2. 理解勾股定理的逆定理，能应用其判断一个三角形是不是直角三角形及解决实际问题.
3. 理解原命题、逆命题、逆定理的概念及关系，增强逻辑思维的严密性.

自主预习 · 探新知

学习任务一 互逆命题(定理)

1. 互逆命题

(1)定义：如果两个命题的题设和结论正好________，那么这样的两个命题叫做互逆命题. 如果把其中一个叫做原命题，那么另一个叫做它的________.

(2)关系：一般地，有的原命题成立，它的逆命题________，有的原命题成立，它的逆命题________.

2. 逆定理：如果一个定理的________经过证明是正确的，它也是一个定理，称这两个定理互为逆定理.

学习任务二 勾股定理的逆定理

学习过程

1. 勾股定理的逆命题

如果三角形的三边长 a，b，c 满足________，那么这个三角形是直角三角形.

2. 如图 17.2-1①，$\triangle ABC$ 的三边长分别为 a，b，c，且 $a^2+b^2=c^2$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

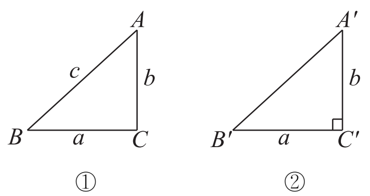


图 17.2-1

证明：如图 17.2-1②，画一个 $Rt\triangle A'B'C'$，使 $B'C'=a$，$A'C'=b$，$\angle C'=90°$，则由勾股定理，得 $A'B'=$________$=$________(用含 a，b 的式子表示)，则 $A'B'$________c________AB.

由三角形全等的判定方法________可得，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，则 $\angle C=\angle C'=$________，即 $\triangle ABC$ 是________三角形.

探究归纳

1. 勾股定理的逆命题是________的，它也是一个________. 我们把这个定理叫做勾股定理的逆定理. 它是判定直角三角形的一个依据.

2. 勾股数：能够成为________三角形三条边长的三个________，称为勾股数.

即时小练

1. 命题"锐角小于 90°"的逆命题是 (　　)

A. 如果一个角是锐角，那么这个角小于 90°

B. 不是锐角的角不小于 90°

C. 不小于 90°的角不是锐角

D. 小于 90°的角是锐角

2. 命题"如果直角三角形的两直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$"的逆命题是________________________________.

3. 判断对错.

(1)所有定理的逆命题都是真命题. (　　)

(2)所有定理都有逆定理. (　　)

(3)1，2，3 能作为一个直角三角形三边的长. (　　)

(4)因为以 2.5，6，6.5 为三边长的三角形是直角三角形，所以 2.5，6，6.5 是一组勾股数. (　　)

合作探究 · 释疑难

要点突破 1 互逆命题、互逆定理

【例 1】写出下列命题的逆命题，并判断它们是真命题还是假命题.

(1)若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；

(2)角平分线上的点到这个角的两边距离相等；

(3)若 $ab=0$，则 $a=0$.

解：

解后反思

逆命题的两点注意事项

(1)写出一个命题的逆命题，首先要分清已知命题的题设和结论，把已知命题的题设和结论互换就得到这个命题的逆命题.

(2)任何命题都有逆命题，但不一定每个定理都有逆定理.

【变式训练】

1. 判断下列命题的真假,并判断其逆命题的真假:

(1)如果两条直线相交,那么它们只有一个交点;

(2)如果 $a>b$,那么 $a^2>b^2$;

(3)如果两个数互为相反数,那么它们的和为零;

(4)如果 $ab<0$,那么 $a>0,b<0$.

要点突破 2 勾股数

【例 2】 下列各组数中,为勾股数的是________(填序号).

①7,24,25;②$1,\sqrt{2},\sqrt{3}$;③$3^2,4^2,5^2$;④2,3,4.

规律方法

判断勾股数的步骤

第 1 步:判断三个数是不是正整数;

第 2 步:找出最大数;

第 3 步:计算较小两数的平方和是否等于最大数的平方.

【变式训练】

2. 下列各组数中,为勾股数的是________(填序号).

①3,4,5;②$1,\frac{4}{3},\frac{5}{3}$;③5,12,13;④$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$;⑤5,6,8.

要点突破 3 由边长判定直角三角形

【例 3】 判断满足下列条件的三角形是不是直角三角形:

(1)在△ABC 中,$AB=25,BC=24,AC=7$;

(2)三角形的三边长 a,b,c 满足 $b^2-a^2=c^2$;

(3)三角形的三边长之比为 5∶12∶13.

思考:在(3)中,能不能用三边长的比值直接代替三边的长?如果不能,又该如何由比值表示三角形三边的长?

解:

规律方法

已知三角形的三边长 a,b,c,判断这个三角形是不是直角三角形的步骤:

第 1 步,比较 a,b,c 的大小,找出最大边长;

第 2 步,计算两较小边长的平方和,看它是否与最大边长的平方相等,若相等,则是直角三角形,并且边长最大的边所对的角是直角;若不相等,则不是直角三角形.

【变式训练】

3. 由线段 a,b,c 组成的三角形不是直角三角形的是 ( )

A. $a=7,b=24,c=25$ B. $a=\sqrt{41},b=4,c=5$

C. $a=\frac{5}{4},b=1,c=\frac{3}{4}$ D. $a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{4},c=\frac{1}{5}$

要点突破 4 勾股定理的逆定理的应用

【例 4】 一块钢板的形状如图 17.2-2 所示,工人师傅按规定做得 $AB=3,BC=4,AC=5,CD=12,AD=13$,你能帮工人师傅计算一下这块钢板的面积吗?

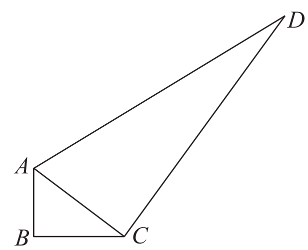


图 17.2-2

思考:因为 AB^2+BC^2________AC^2,所以△ABC 是________三角形;因为 AC^2+CD^2________AD^2,所以△ACD 是________三角形.

解:

规律方法

利用勾股定理的逆定理解决实际问题时,要先把实际问题转化成数学问题,通过分析、验证有直角三角形,再利用直角三角形的性质解决实际问题.

【变式训练】

4.一农民建房时挖出地基的平面图如图 17.2-3(示意图)所示,按标准应该为长方形,挖完测量得 $AB=CD=8$ m,$AD=BC=6$ m,$AC=9.2$ m,请你帮他判断一下挖的地基是否合格,并说明理由.

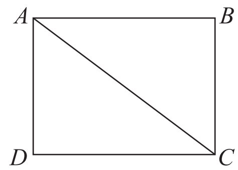


图 17.2-3

达标检测

1.下列各组数为勾股数的是 ( )

A.3,4,7　　B.10,24,26

C.$\frac{1}{3^2}$,$\frac{1}{4^2}$,$\frac{1}{5^2}$　　D.$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{5}{12}$

2.有六根细木棒,它们的长度(单位:cm)分别是 2,4,6,8,10,12,若从中取出三根首尾顺次连接搭成一个直角三角形,则这三根细木棒的长度分别为 ( )

A.2,4,8　　B.4,8,10

C.6,8,10　　D.8,10,12

3.命题"等腰三角形有两个角相等"的逆命题是________________,它是________命题(填"真"或"假").

4.古埃及人曾经用如图 17.2-4 所示的方法画直角:把一根长绳打上等距离的 13 个结,然后以 3 个结间距、4 个结间距、5 个结间距的长度为边长,用木桩钉成一个三角形,其中一个角便是直角,这样做的道理是________________________.

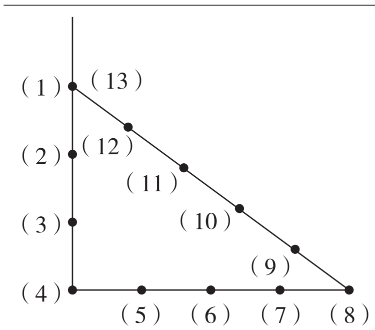


图 17.2-4

5.如图 17.2-5,在△ABC 中,$AC=8$,$BC=6$,DE 为△AEB 中 AB 边上的高,且 $DE=12$,$S_{\triangle ABE}=60$,求∠C 的度数.

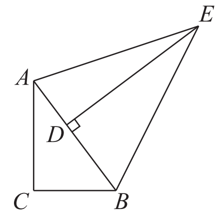


图 17.2-5

分层演练·提素能

基础巩固

1.如图 17.2-6,每个小正方形的边长为 1,则△ABC 是 ( )

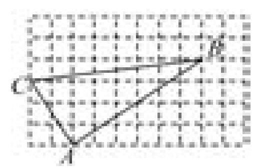


图 17.2-6

A.直角三角形　　B.锐角三角形

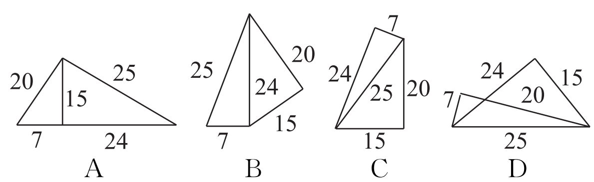
C.钝角三角形　　D.等腰三角形

2.一个木工师傅测量了一个等腰三角形木板的腰、底边和底边上的高的长,但他把这三个数据与其他的数据弄混了,请你帮助他找出来,这三个数据分别是 ( )

A.13,12,12　　B.12,12,8

C.13,10,12　　D.5,8,4

3.五根小木棒,其长度分别为 7,15,20,24,25,现将它们摆成两个直角三角形,下面正确的是 ( )



4.如图 17.2-7 所示,三个正方形的面积分别为 $S_1=3$,$S_2=2$,$S_3=1$,则分别以它们的一边为边围成的三角形中,∠1+∠2=________.

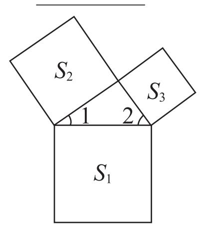


图 17.2-7

5.已知$\triangle ABC$的三边长分别为a,b,c,满足$a+b=10,ab=18,c=8$,则此三角形为________三角形.

6.B港有甲、乙两艘渔船,若甲船沿北偏东$60°$方向以8 n mile/h的速度前进,乙船沿南偏东某个角度以15 n mile/h的速度前进,2 h后,甲船到M岛,乙船到P岛,两岛相距34 n mile,你知道乙船是沿哪个方向航行的吗?

7.如图17.2-8所示,在四边形$ABCD$中,已知$AB:BC:CD:DA=2:2:3:1$,且$\angle B=90°$,求$\angle DAB$的度数.

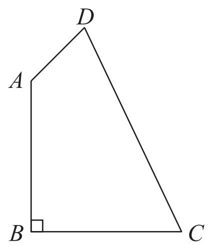


图17.2-8

能力提升

8.如图17.2-9,南北向直线MN为我国领海线,MN以西为我国领海.上午9:50,我国反走私艇A发现正东方向有一走私艇C以13 n mile/h的速度偷偷向我国领海驶来,便立即通知正在MN线上巡逻的我国反走私艇B.已知A,C两艇的距离是13 n mile,A,B两艇的距离是5 n mile,反走私艇B测得其离走私艇C的距离是12 n mile.若走私艇C的速度不变,则走私艇C大约最早会在什么时间到达我国领海?

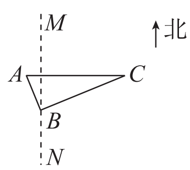


图17.2-9

9.张老师在一次探究性学习课中设计了如下数表:

n	2	3	4	5	…
a	2^2-1	3^2-1	4^2-1	5^2-1	…
b	4	6	8	10	…
c	2^2+1	3^2+1	4^2+1	5^2+1	…

(1)请你分别观察a,b,c与n之间的关系,并用含自然数$n(n>1)$的代数式表示$a=$________,$b=$________,$c=$________;

(2)猜想以a,b,c为边的三角形是否为直角三角形,并证明你的猜想.

拓展创新

10.在$\triangle ABC$中,$BC=a,AC=b,AB=c$.

若$\angle C=90°$,如图17.2-10①.

当$\triangle ABC$为锐角三角形时,小明猜想$a^2+b^2>c^2$,理由如下:

如图17.2-10②,设$CD=x$,在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中,$AD^2=b^2-x^2$,在$\mathrm{Rt}\triangle ADB$中,$AD^2=c^2-(a-x)^2$,

则$b^2-x^2=c^2-(a-x)^2$,所以$a^2+b^2=c^2+2ax$.

因为$a>0,x>0$,所以$2ax>0$,所以$a^2+b^2>c^2$,

所以当$\triangle ABC$为锐角三角形时,$a^2+b^2>c^2$.

所以小明的猜想是正确的.

(1)请你猜想,当$\triangle ABC$为钝角三角形时(如图17.2-10③),a^2+b^2与c^2的大小关系;

(2)证明你猜想的结论是否正确(温馨提示:在图17.2-10③中,作AC边上的高).

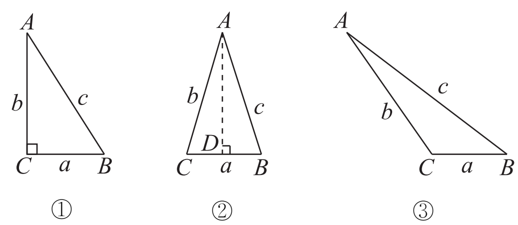


图17.2-10

章末归纳整合

知识体系·全构建

回顾本章知识，将下面的知识体系图补充完整.

- 勾股定理
  - 勾股定理
    - 内容：如果直角三角形的两条直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么①________
    - 几种变形：$a^2=c^2-b^2$，$b^2=$②________，$c=$③________，$a=\sqrt{c^2-b^2}$，$b=$④________
    - 证明：用拼图的方法，借助面积的相等关系证明
  - 互逆定理
    - 互逆命题：题设和结论正好相反的两个命题：一个是原命题，另一个就是它的⑤________
    - 互逆定理：题设和结论正好相反的两个定理
  - 勾股定理的逆定理
    - 内容：如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是⑥________三角形
    - 作用：(1)判断某一个三角形是不是直角三角形；(2)证明线段的⑦________关系
    - 判定直角三角形的步骤
      - 第 1 步：确定最大边长 c
      - 第 2 步：验证 a^2+b^2 与 c^2 的关系
        - $a^2+b^2=c^2\Rightarrow$是直角三角形
        - $a^2+b^2\neq c^2\Rightarrow$不是直角三角形
    - 勾股数：能够成为直角三角形三条边长的三个⑧________

答案：①$a^2+b^2=c^2$　②c^2-a^2　③$\sqrt{a^2+b^2}$　④$\sqrt{c^2-a^2}$　⑤逆命题　⑥直角　⑦垂直　⑧正整数

核心考点·精突破

考点一　有关勾股定理的计算

方法技巧

勾股定理是直角三角形特有的性质，因此应用的前提是在直角三角形中，有时需要添加辅助线，自己构造直角三角形.在应用勾股定理时，注意分清斜边和直角边.

题组集训

1.(陕西中考)如图 17-1，将两个大小、形状完全相同的△ABC 和△$A'B'C'$拼在一起，其中点 A'与点 A 重合，点 C'落在边 AB 上，连接 $B'C$.若∠$ACB=$∠$AC'B'=90°$，$AC=BC=3$，则 $B'C$ 的长为(　　)

A.$3\sqrt{3}$　　B.6　　C.$3\sqrt{2}$　　D.$\sqrt{21}$

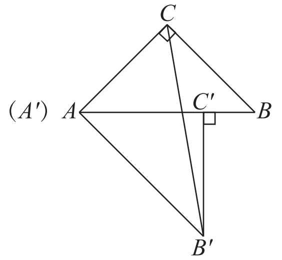


图 17-1

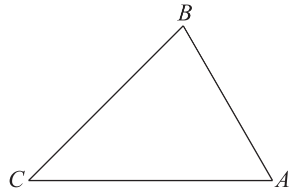


图 17-2

2.如图 17-2，在△ABC 中，∠$C=45°$，∠$B=75°$，$BC=\sqrt{6}$，则 AB 的长为________.

考点二　勾股定理的验证与图形面积

方法技巧

(1)用面积法验证勾股定理的正确性，通常的方法是割补几何图形，把一个图形分成几个图形的面积和，通过恒等变形得到勾股定理.

(2)利用勾股定理也可以解决与面积有关的问题.解题的关键是先把图形的面积转化为直角三角形边长的平方，再利用勾股定理所得的三边之间的数量关系得出几何图形面积之间的关系.

题组集训

3.如图 17-3，分别以直角三角形三边 a，b，c 为边，向外作等边三角形、半圆、等腰直角三角形和正方形，上述四种情况的面积关系满足 $S_1+S_2=S_3$ 的图形有________个.

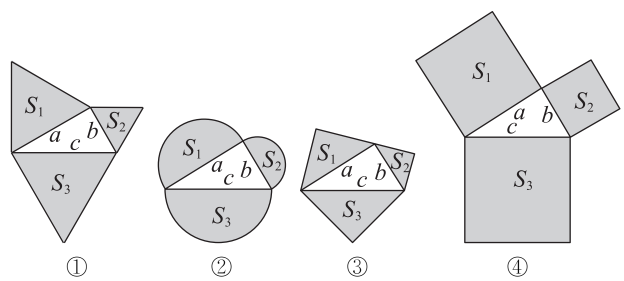


图 17-3

4.如图 17-4，将 Rt$\triangle ABC$ 绕其锐角顶点 A 逆时针旋转 90°得到 Rt$\triangle AED$，连接 BE，延长 DE，BC 相交于点 F，则有$\angle BFE=90°$，且四边形 $ACFD$ 是一个正方形.

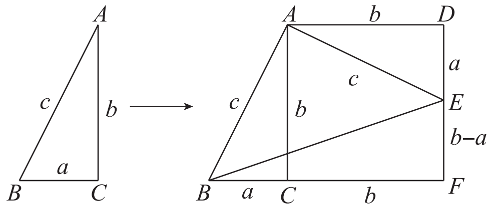


图 17-4

(1)判断$\triangle ABE$ 的形状，并说明理由；

(2)用含 b 的代数式表示四边形 $ABFE$ 的面积；

(3)利用右侧的图形说明：$a^2+b^2=c^2$.

考点三 勾股定理的逆定理

方法技巧

勾股定理的逆定理是直角三角形的判定方法，是用边的数量关系证明一个三角形是直角三角形，也是证明两条线段垂直的常用方法.当三边长符合勾股定理的逆定理时，最长边所对的角才是直角，不要习惯性地认为$\angle C$ 是直角.

题组集训

5.$\triangle ABC$ 的三边长分别为 a，b，c，下列条件：①$\angle A=\angle B-\angle C$；②$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$；③$a^2=(b+c)(b-c)$；④$a:b:c=4:12:13$，其中能判断$\triangle ABC$ 是直角三角形的有________个.

6.如图 17-5，D 为 AB 上一点，$\triangle ACE\cong\triangle BCD$，$AD^2+DB^2=DE^2$，试判断$\triangle ABC$ 的形状，并说明理由.

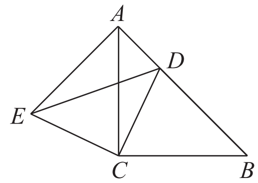


图 17-5

考点四 勾股定理及其逆定理的实际应用

方法技巧

利用勾股定理及其逆定理解决实际问题时，首先将实际问题转化为数学问题，需要画图时，要从实际问题中抽象出正确的几何图形，然后将已知条件和结论集中在同一个直角三角形中解决问题.

题组集训

7.(浙江绍兴中考)如图 17-6，小巷左右两侧是竖直的墙，一架梯子斜靠在左墙时，梯子底端到左墙角的距离为 0.7 m，顶端距离地面 2.4 m.如果保持梯子底端位置不动，将梯子斜靠在右墙时，顶端距离地面 2 m，则小巷的宽度为 ( )

A.0.7 m　　B.1.5 m　　C.2.2 m　　D.2.4 m

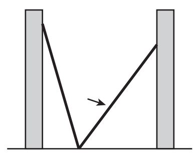


图 17-6

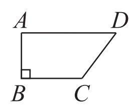


图 17-7

8.如图 17-7，某住宅小区施工过程中留下了一块空地(图中的四边形 $ABCD$)，经测量，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=12$ m，$BC=16$ m，$CD=15$ m，$DA=25$ m，$\angle B=90°$.小区为美化环境，欲在空地上铺草坪，已知草坪每平方米 26 元，则铺满这块空地共需花费________元.

学科素养·速提升

专题一 数形结合思想

勾股定理是已知直角三角形(形)，得到三角形三边的数量关系(数)，即以“形”定“数”；勾股定理的逆定理则是由三角形三边的数量关系(数)，得到这个三角形是直角三角形(形)，即以“数”定“形”，两者充分体现了数形结合思想.

【例 1】 如图 17-8，每个小正方形的边长为 1，四边形 $ABCD$ 是一个凹四边形.

(1)求凹四边形 $ABCD$ 的周长；

(2)连接 AC，$\angle ACD$ 是直角吗？求出凹四边形 $ABCD$ 的面积.

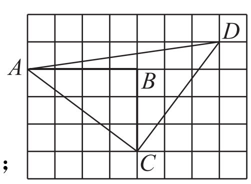


图 17-8

解：(1)$AB=4$，$BC=3$.根据勾股定理，得 $AD=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$；$CD=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

所以凹四边形 $ABCD$ 的周长是 $AB+BC+CD+AD=4+3+5+5\sqrt{2}=12+5\sqrt{2}$.

(2)$AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

因为 $5^2+5^2=(5\sqrt{2})^2$，

所以 $AC^2+CD^2=AD^2$.

所以$\angle ACD$ 是直角.

所以凹四边形 $ABCD$ 的面积$=\triangle ACD$ 的面积$-$

$\triangle ABC$ 的面积$=\frac{1}{2}AC\cdot CD-\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times 5\times 5-\frac{1}{2}\times 4\times 3=6.5$.

方法技巧

在网格中求非水平或竖直的两格点的线段长时，借助网格构造直角三角形，将要求的线段作为直角三角形的斜边，运用勾股定理求解；在网格中判断某三条线段构成的三角形是否为直角三角形时，常利用勾股定理分别求出三角形的三条边的平方，然后利用勾股定理的逆定理来进行判断.

提能训练

1. 如图17-9，每个小正方形的边长都为1，$\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点上，请按要求完成下列各题：

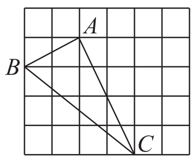


图 17-9

(1)画线段 $AD\parallel BC$，且使 $AD=BC$，连接 CD；

(2)线段 AC 的长为________，CD 的长为________，AD 的长为________；

(3)$\triangle ACD$ 为________三角形，四边形 $ABCD$ 的面积为________.

专题二 转化思想

求空间中两点之间的最短距离，要运用转化的数学思想，将空间中两点之间的距离转化为平面上两点之间的距离.

【例2】 一个长方体的货柜如图17-10所示，已知它的高为3 m，底面是边长为2 m的正方形.现在点 A 处有一只壁虎，想沿长方体表面到达点 C 处，则壁虎爬行的最短路程是多少？

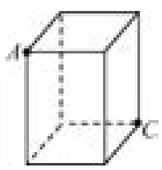


图 17-10

解：(1)如图17-11①所示，将长方体的右表面翻折至前表面，使 A,C 两点共面，连接 AC，则线段 AC 的长度即为此种情况的最短路程.

所以 $AC=\sqrt{(2+2)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$(m).

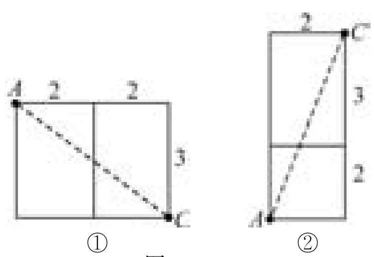


图 17-11

(2)如图17-11②所示，将长方体的后表面翻折至上表面，使 A,C 两点共面，连接 AC，则线段 AC 的长度即为此种情况的最短路程.

所以 $AC=\sqrt{2^2+(2+3)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$(m).

因为 $\sqrt{29}>5$，所以壁虎爬行的最短路程是5 m.

方法技巧

解立体图形中最短路径问题的四步骤

第1步：展开，即将立体图形展开为平面图形；(注意：①只需展开包含相关点的面；②可能存在多种展开方法)

第2步：定点，即确定相关点的位置；

第3步：连线，即连接相关点，构造直角三角形；

第4步：计算，即根据勾股定理求解.

提能训练

2. 如图17-12，有一棱长为2 dm的正方体盒子，现要按图中箭头所指方向从点 A 到点 D 拉一条捆绑线绳，使线绳经过 $ABFE$、$BCGF$、$EFGH$、$CDHG$ 四个面，则所需捆绑线绳的长至少为________dm.

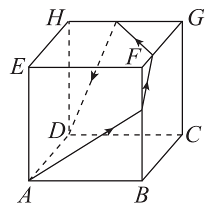


图 17-12

专题三 分类讨论思想

分类讨论在本章中常用在直角三角形中斜边、直角边不明确时以及未指明三角形的形状而作高时.

【例3】 若直角三角形有两边长的差为2，且这两条边中有一条边长为10，求这个三角形的三条边的长.

解：因为直角三角形有两边长的差为2，且这两条边中有一条边长为10，所以另一条边长为 $10+2=12$ 或 $10-2=8$.

(1)当该直角三角形的两边长为10，12，设另一条边长为 x.

①若 x 为斜边长，根据勾股定理，得 $x=2\sqrt{61}$；

②若12为斜边长，根据勾股定理，得 $x=2\sqrt{11}$.

(2)当该直角三角形的两边长为10，8，设另一条边长为 y.

①若 y 为斜边长，根据勾股定理，得 $y=2\sqrt{41}$；

②若10为斜边长，根据勾股定理，得 $y=6$.

综上所述，这个直角三角形的三条边的长为10，12，$2\sqrt{61}$ 或10，12，$2\sqrt{11}$ 或10，8，$2\sqrt{41}$ 或10，8，6.

解后反思

已知直角三角形中的两边长或两边长的关系求第三边长时，若未指明斜边和直角边，则要分类讨论，避免漏解.

提能训练

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=15$，$AC=13$，高 $AD=12$，则 $\triangle ABC$ 的周长为________.