义务教育教科书同步教学资源

课时练

人民教育出版社教学资源编辑室 组编

数学

九年级 下册

人民教育出版社
PEOPLE'S EDUCATION PRESS
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

课时练. 数学九年级. 下册 / 人民教育出版社教学资源编辑室组编. — 北京 : 人民教育出版社, 2018.12
ISBN 978-7-107-33223-4

Ⅰ. ①课… Ⅱ. ①人… Ⅲ. ①中学数学课—初中—习题集 Ⅳ. ① G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 266650 号

课时练　数学　九年级　下册

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷
版　　次　2018 年 12 月第 1 版
印　　次　　　年　　月第　次印刷
开　　本　890 毫米 ×1240 毫米　1/16
印　　张　12
字　　数　372 千字
定　　价　16.12 元

编委会

亮点解读

依据最新理念 落实学科素养
搭建科学体系 培养关键能力

1. 引导学生经历真实的学习过程

★【学习目标】为学生提供达成目标的探究方法和经历真实学习过程的“抓手”

学习目标

1.经历从实际问题中抽象出反比例函数模型的过程,理解反比例函数的概念并能判断一个给定的函数是否为反比例函数.

2.能根据变量间的关系求出相应的函数解析式,体会函数思想和待定系数法在反比例函数中的应用.

★探究环节从学生角度出发,将问题逐层深入、细化,让学生经历知识的形成过程

要点突破 2 根据反比例函数的概念确定字母的取值(范围)

【例 2】已知关于 x 的函数 $y=(m-2)x^{3-m^2}$ 是反比例函数,求 m 的值.

思考 1:在该反比例函数中,自变量 x 的次数为多少?

思考 2:在反比例函数 $y=kx^{-1}$ 中,自变量 x 的系数能否为 0?

2. 培养学生在具体情境中解决实际问题的能力

★探究环节中注重情境设计,培养学生在情境中解决具体问题的能力

学习任务一 反比例函数的概念

学习过程

1.请用适当的函数解析式表示下列问题中两个变量之间的对应关系:

(1)李明家到学校的距离为 3 km,他骑车到学校的平均速度 v(单位:km/h)关于所需要的时间 t(单位:h)的函数解析式为________.

(2)若一个长方形的面积为 36 m²,则该长方形的长 y(单位:m)关于宽 x(单位:m)的函数解析式为________.

★训练环节的习题中通过情境化设计考查学生解决实际问题的能力

7.去学校食堂就餐,经常会在一个买菜窗口前等待,经调查发现,学生的舒适度指数 y 与等待时间 x(单位:min)之间满足反比例函数关系,如下表:

等待时间 x/min	1	2	5	10	20
舒适度指数 y	100	50	20	10	5

已知学生等待时间不超过 30 min.

(1)求 y 关于 x 的函数解析式,并写出自变量 x 的取值范围.

(2)当等待时间为 8 min 时,求舒适度指数 y 的值.

3. 注重学生数学素养的持续性发展

★融入数学文化,提升科学精神、应用意识和人文素养

4.《孙子算经》是我国古代重要的数学著作,成书于约一千五百年前,其中有道歌谣算题:“今有竿不知其长,量得影长一丈五尺,立一标杆,长一尺五寸,影长五寸,问杆长几何?”歌谣的意思是:有一根竹竿不知道有多长,量出它在太阳下的影子长一丈五尺,同时立一根一尺五寸的小标杆,它的影长为五寸(提示:1 丈=10 尺,1 尺=10 寸),可以求出竹竿的长为________尺.

★在学习环节中突出学生数学建模、数学抽象等学科素养的培养

1.如图 27.2.1-61(示意图),铁道口的栏杆短臂 OB 长 1 m,长臂 OD 长 16 m,当短臂端点下降 0.5 m 时,长臂端点升高 (　　)

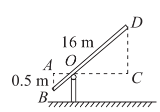


图 27.2.1-61

A.8 m　　B.16 m　　C.4 m　　D.1 m

目录

第二十六章 反比例函数

26.1 反比例函数

26.1.1 反比例函数

学习目标

1. 经历从实际问题中抽象出反比例函数模型的过程，理解反比例函数的概念并能判断一个给定的函数是否为反比例函数.
2. 能根据变量间的关系求出相应的函数解析式，体会函数思想和待定系数法在反比例函数中的应用.

自主预习·探新知

学习任务一 反比例函数的概念

学习过程

1. 请用适当的函数解析式表示下列问题中两个变量之间的对应关系：

(1)李明家到学校的距离为 3 km，他骑车到学校的平均速度 v(单位:km/h)关于所需要的时间 t(单位:h)的函数解析式为________.

(2)若一个长方形的面积为 36 m^2，则该长方形的长 y(单位:m)关于宽 x(单位:m)的函数解析式为________.

(3)小亮到商店买练习本共花了 12 元，则练习本的价格 y(单位:元/本)关于所买的本数 x 的函数解析式为________.

2. 上述解析式都具有________的形式，其中 k 是______常数.

探究归纳

一般地，形如________的函数，叫做反比例函数，其中 x 是自变量，y 是函数，自变量 x 的取值范围是____________.

学习任务二 反比例函数三种不同形式的解析式

(1)________(k 为常数，$k\neq0$)；

(2)________(k 为常数，$k\neq0$)；

(3)________(k 为常数，$k\neq0$).

即时小练

1. 在反比例函数 $y=-\frac{3}{2x}$ 中，常数 k 为 ( )

A. -3　B. 2　C. $-\frac{1}{2}$　D. $-\frac{3}{2}$

2. 在反比例函数 $y=\frac{2\ 019}{x}$ 中，自变量 x 的取值范围是 ( )

A. $x>0$　B. $x<0$

C. 不等于 0 的一切实数　D. 任意实数

3. 小华看一部 300 页的小说所需的天数 y 与平均每天看的页数 x 成反比例，y 关于 x 的函数解析式为________.

合作探究·释疑难

要点突破1 反比例函数的识别

【例1】下列哪些式子表示 y 是 x 的反比例函数？每一个反比例函数中相应的 k 值是多少？

(1) $y=\frac{5}{x}$；(2) $y=5x$；(3) $y=\frac{x}{5}$；(4) $y=\frac{1}{3x}$；

(5) $y=-3x^{-1}$；(6) $y=\frac{a}{x}$；(7) $y=\frac{2}{x+1}$.

解：

规律方法

定义法判定反比例函数

判断一个函数是不是反比例函数，往往根据定义，看其解析式是否能化为 $y=\frac{k}{x}$ 或 $y=kx^{-1}$ 或 $xy=k$(其中 k 为常数，$k\neq0$)的形式.

【变式训练】

1. 在下列函数中，y 是 x 的反比例函数的是 ( )

A. $y=\frac{8}{x+5}$　B. $y=\frac{3}{x}+7$

C. $xy=5$　D. $y=\frac{2}{x^2}$

要点突破2 根据反比例函数的概念确定字母的取值(范围)

【例2】已知关于 x 的函数 $y=(m-2)x^{3-m^2}$ 是反比例函数，求 m 的值.

思考1：在该反比例函数中，自变量 x 的次数为多少？

思考2：在反比例函数 $y=kx^{-1}$ 中，自变量 x 的系数能否为0？

解:

规律方法

利用方程思想巧求反比例函数中的字母参数

根据反比例函数的概念确定字母参数的取值(范围)时,往往需要借助方程思想.

(1)若字母参数出现在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 或 $xy=k$ 中,则需满足 $k\neq0$,且 x 的次数是1;

(2)若字母参数出现在反比例函数 $y=kx^{-1}$ 中,则需满足 $k\neq0$,且 x 的次数是-1,两者缺一不可.

【变式训练】

2.若 $y=\frac{1}{x^{n-1}}$ 是 y 关于 x 的反比例函数,则 $n=$________.

3.当 $m=$________时,关于 x 的函数 $y=(m+1)x^{m^2-2}$ 是反比例函数.

要点突破 3 用待定系数法确定函数的解析式

【例3】已知 y 是 x 的反比例函数,且当 $x=0.3$ 时,$y=10$.

(1)求出 y 与 x 之间的函数解析式;

(2)当 $x=-6$ 时,求 y 的值;

(3)当 $y=9$ 时,求 x 的值.

解:

规律方法

用待定系数法求反比例函数解析式的四步骤

第1步:设 ⇒ 设反比例函数的解析式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$

↓

第2步:列 ⇒ 把已知 x 与 y 的一组对应值同时代入 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$,列出关于 k 的方程

↓

第3步:解 ⇒ 解方程,求出 k 的值

↓

第4步:代 ⇒ 将求出的 k 的值代入所设解析式中,即得到所求反比例函数的解析式

【变式训练】

4.已知 y 与 x 成反比例,且当 $x=3$ 时,$y=4$.

(1)求 y 关于 x 的函数解析式;

(2)当 $x=\frac{3}{2}$ 时,y 的值是多少?

【例4】已知 y 与 $x-2$ 成反比例,且当 $x=-1$ 时,$y=3$.

(1)求 y 与 x 之间的函数解析式;

(2)当 $x=5$ 时,求 y 的值.

解:

解后反思

在本题中,y 与 $x-2$ 成反比例,则把 $x-2$ 看成一个整体,从而设出解析式 $y=\frac{k}{x-2}(k\neq0)$,避免设成 $y=\frac{k}{x}$ 的形式.

【变式训练】

5.如果 y 与 x 成正比例,z 与 x 成反比例,那么 y 与 z 之间的函数关系是 ( )

A.成正比例 B.成反比例

C.一次函数关系 D.不确定

6.已知 $y+1$ 与 $x-1$ 成反比例,且当 $x=2$ 时,$y=3$.

(1)y 与 x 之间的函数解析式为________;

(2)当 $x=-2$ 时,y 的值为________.

达标检测

1.若 $y=x^{2m+1}$ 为关于 x 的反比例函数,则 m 的值是 ( )

A.1 B.0 C.0.5 D.-1

2.下列函数:①$y=2x$,②$y=\frac{4}{x}$,③$y=-\frac{5}{x}$,④$y=\frac{1}{x+2}$.其中,y 是 x 的反比例函数的是________(只填序号).

3.已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$,如果当 $x=2$ 时,$y=-7$,那么 $k=$________.

4.苹果每千克 x 元,花10元钱可买 y 千克的苹果,则 y 与 x 之间的函数解析式为____________.

5.已知 $y+a$ 与 x 成反比例.当 $x=-\frac{1}{3}$时,$y=5$;当 $x=-\frac{1}{2}$时,$y=2$.

(1)求 y 关于 x 的函数解析式;

(2)当 $x=2$ 时,求 y 的值.

分层演练·提素能

基础巩固

1.如果直角三角形的面积一定,那么下列关于这个直角三角形各边长的关系中,正确的是 ( )

A.两条直角边长成正比例

B.两条直角边长成反比例

C.一条直角边长与斜边长成正比例

D.一条直角边长与斜边长成反比例

2.下列函数关系中,y 是 x 的反比例函数的有 ( )

①$\frac{y}{x}=4$;②$xy=-\frac{1}{2}$;③面积一定时,矩形的长 x 与宽 y;④$y=-\frac{1}{x^2}$;⑤$y=\frac{1}{x-2}$.

A.1 个 B.2 个 C.3 个 D.4 个

3.若 $y=(m-1)x^{|m|-2}$是关于 x 的反比例函数,则 m 的值为 ( )

A.2 B.-1 C.1 D.0

4.已知一平行四边形的面积是 12 cm^2,它的一边长是 a cm,这条边上的高是 h cm,则 a 关于 h 的函数解析式是________,这个函数是________函数.

5.已知 y 是 x 的函数,下表给出了 x 与 y 的一些对应值.

x	-3	-2	-1		2
y	2	3	6	-6	

(1)请探索 y 关于 x 的函数类型,并求出解析式;

(2)根据函数解析式完成表格.

能力提升

6.若 y 与$\frac{1}{x}$成反比例,x 与$\frac{1}{z}$成正比例,则 y 是 z 的________(填“正比例”“反比例”“一次”或“二次”)函数.

7.已知关于 x 的函数 $y=(5m-3)x^{2-n}+(m+n)$.

(1)当 m,n 为何值时,为一次函数?

(2)当 m,n 为何值时,为正比例函数?

(3)当 m,n 为何值时,为反比例函数?

8.已知函数 $y=y_1+y_2$,y_1与 x 成正比例,y_2与 x 成反比例,且当 $x=1$ 时,$y=4$;当 $x=2$ 时,$y=5$.

(1)求 y 关于 x 的函数解析式;

(2)当 $x=-2$ 时,求 y 的值.

9.某广场有一段 25 米的旧围栏,用线段 AB 表示,现打算利用该旧围栏的一部分(或全部)为一边圈出一块面积为 100 平方米的长方形草坪 $CDEF$(示意图如图 26.1.1-1).已知整修旧围栏的价格是 1.75 元/米,建新围栏的价格是 4.5 元/米,设利用旧围栏 CF 的长度为 x 米,修建草坪围栏所需的总费用为 y 元.

(1)求 y 与 x 之间的函数解析式,并写出自变量 x 的取值范围;

(2)若计划总费用为 150 元,则应利用旧围栏多少米?

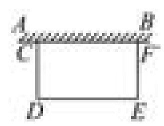


图 26.1.1-1

拓展创新

10.将 $x=\frac{2}{3}$代入反比例函数 $y=-\frac{1}{x}$,所得函数值记为 y_1;又将 $x=y_1+1$ 代入原反比例函数,所得函数值记为 y_2;再将 $x=y_2+1$ 代入原反比例函数,所得函数值记为 y_3……如此继续下去,则 $y_{2019}=$________.

26.1.2 反比例函数的图象和性质

第 1 课时 反比例函数的图象和性质(1)

学习目标

1.经历反比例函数图象的形成过程,体会函数的三种表示方法及相互转换,对函数进行认识上的整合,提升对数形结合思想的认识.

2.通过观察反比例函数的图象,分析、探究反比例函数的性质,培养探究、归纳及概括能力.

自主预习·探新知

学习任务 反比例函数的图象和性质

学习过程

1.利用描点法画函数图象的一般步骤:

(1)列表;(2)____________;(3)____________.

2.填表并在图 26.1.2-1 中画出函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象.

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0.5	1	1.5	2	…
$y=\frac{2}{x}$	…									…

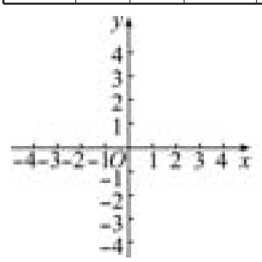


图 26.1.2-1

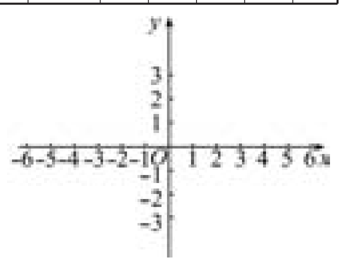


图 26.1.2-2

填表并在图 26.1.2-2 中画出函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象.

x	…	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	…
$y=-\frac{3}{x}$	…									…

(1)每个图象中的两条曲线会与 x 轴、y 轴相交吗?为什么?

(2)函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象在哪两个象限?函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象在哪两个象限?

(3)反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象在哪两个象限内?由什么确定?

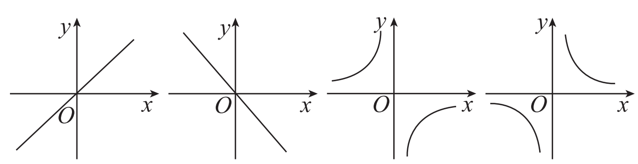
(4)你能否总结出在每个象限内反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 随着自变量 x 的增加,y 将怎样变化?

探究归纳

反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象和性质	
形状	由两支曲线组成,因此称它的图象为________
位置	当 $k>0$ 时,双曲线的两支分别位于________象限; 当 $k<0$ 时,双曲线的两支分别位于________象限
增减性	当 $k>0$ 时,在每一个象限内,y 随 x 值的增大而________; 当 $k<0$ 时,在每一个象限内,y 随 x 值的增大而________
图象趋势	反比例函数的图象无限接近于 x 轴、y 轴,但永远不能到达 x 轴、y 轴
对称性	反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象既是中心对称图形,又是轴对称图形

即时小练

1.反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的大致图象是 ( )



A　　B　　C　　D

2.(1)函数 $y=\frac{20}{x}$ 的图象位于______象限,在每一个象限内,y 随 x 的增大而______;

(2)函数 $y=-\frac{30}{x}$ 的图象位于______象限,在每一个象限内,y 随 x 的增大而______;

(3)函数 $y=\frac{\pi}{x}$,当 $x>0$ 时,图象位于第______象限,y 随 x 的增大而______.

3. 反比例函数 $y=\frac{m-6}{x}$ 图象的一支如图 26.1.2-3 所示，根据图象可知常数 m 的取值范围是________.

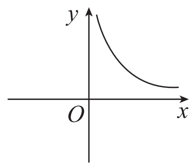


图 26.1.2-3

合作探究·释疑难

要点突破 1 反比例函数的图象与性质的简单应用

【例 1】 已知反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$，下列结论：

①图象必经过点 $(-1,2)$；

② y 随 x 的增大而增大；

③图象在第二、第四象限内；

④若 $x>1$，则 $y>-2$.

其中正确的有________.（填序号）

规律方法

数形结合，知一推二

只要知道反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中 k 的符号、双曲线的位置、增减性（在每一个象限内 y 随 x 的变化情况）中的一个，就可以推出另外的两个.此时，借助数形结合的数学思想往往可以帮助我们快速解题.

【变式训练】

1. 已知函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象如图 26.1.2-4 所示，有以下结论：

① $m<0$；

②在每一个分支上，y 随 x 的增大而增大；

③若点 $A(-1,a)$，$B(2,b)$ 在这个函数的图象上，则 $a<b$；

④若点 $P(x,y)$ 在这个函数的图象上，则点 $P_1(-x,-y)$ 也在这个函数的图象上.

其中正确的结论是________.（填序号）

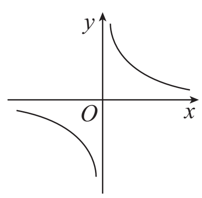
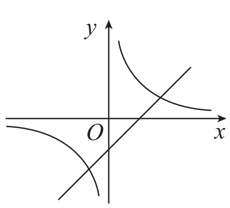


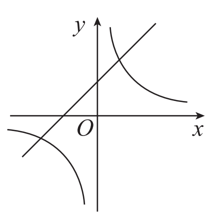
图 26.1.2-4

要点突破 2 与反比例函数有关的图象识别

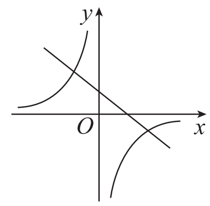
【例 2】（湖南永州中考）在同一平面直角坐标系中，函数 $y=x+k$ 与 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq0$）的图象大致是（　　）



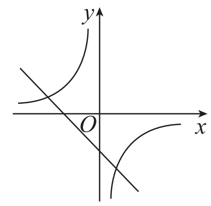
A



B



C



D

规律方法

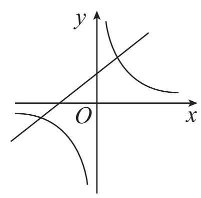
一次函数与反比例函数图象识别的两种方法

(1) 排除法：根据常数的符号逐一排除不符合要求的选项即可得到答案.

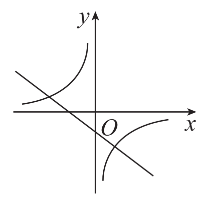
(2) 假设法：先假设某一图象正确，确定常数的符号，再看另一函数图象是否与该常数的符号相符.

【变式训练】

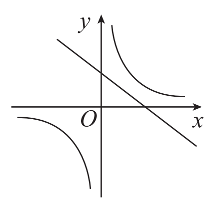
2. 若 $ab>0$，则一次函数 $y=ax+b$ 与反比例函数 $y=\frac{ab}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的大致图象可能是（　　）



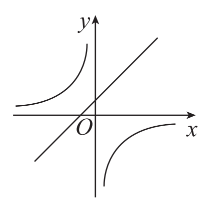
A



B



C



D

要点突破 3 利用反比例函数的性质比较函数值的大小

【例 3】 若点 $A(-5,y_1)$，$B(-3,y_2)$，$C(2,y_3)$ 在反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1<y_3<y_2$　　B. $y_1<y_2<y_3$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

思考 1：反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象位于第几象限？

思考 2：题中给出的三个点在反比例函数图象的同一支上吗？可以用什么方法比较大小？

【一题多变】

若点的坐标改为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，且 $x_1<0<x_2<x_3$，其他条件不变，则应该选________.

规律方法

比较反比例函数值大小的三种方法

(1)直接代入法(或特殊值代入法):先直接代入已知点的横坐标(或代入合适的横坐标),分别求出其纵坐标,再比较函数值的大小.
(2)性质法:在同一分支上的点可以通过比较其横坐标的大小来判断函数值的大小,不在同一分支上的点,可以根据函数值的符号判断函数值的大小.
(3)图象法:利用画图象、找点的办法判断函数值的大小.

【变式训练】

3.(甘肃天水中考)反比例函数 $y=-\frac{1}{x}$ 的图象上有两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,若 $x_1<0<x_2$,则下列结论正确的是 ( )

A.$y_1<y_2<0$　　B.$y_1<0<y_2$
C.$y_1>y_2>0$　　D.$y_1>0>y_2$

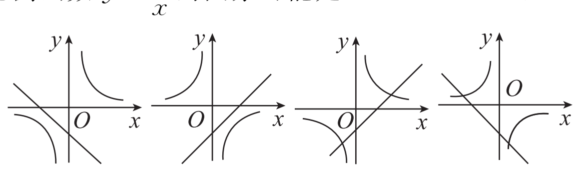
4.已知反比例函数 $y=\frac{2m+1}{x}$(m 为常数)的图象的一支在第一象限,回答下列问题:
(1)图象的另一支位于哪个象限?常数 m 的取值范围是什么?
(2)在这个函数图象的某一支上任取两点 $A(x_1,y_1)$和 $B(x_2,y_2)$,如果 $y_1<y_2$,那么 x_1与 x_2有怎样的大小关系?

达标检测

1.已知函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点(2,3),下列说法正确的是 ( )

A.y 随 x 的增大而增大
B.函数的图象只在第一象限
C.当 $x<0$ 时,必有 $y<0$
D.点(-2,-3)不在此函数的图象上

2.在同一平面直角坐标系中,一次函数 $y=x-1$ 与反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象可能是 ( )



A　B　C　D

3.在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$($k<0$)的图象上有两点$(-1,y_1)$,$\left(-\frac{1}{4},y_2\right)$,则 y_1-y_2的值是 ( )

A.负数　　B.非正数
C.正数　　D.不能确定

4.反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象与坐标轴有______个交点,图象位于______象限,当 $x>0$ 时,函数值 y 随 x 的增大而______.

5.在反比例函数 $y=\frac{2k-2\ 018}{x}$ 图象的每一个分支上,y 随 x 的增大而减小.
(1)求出函数的图象位于哪些象限;
(2)求 k 的取值范围.

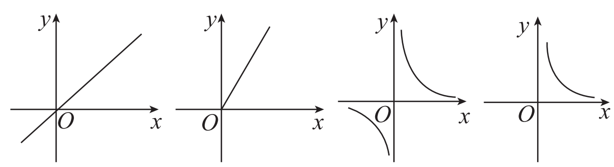
分层演练·提素能

基础巩固

1.若函数 $y=\frac{k}{x}$($k\neq0$)的图象过点$\left(\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right)$,则此函数图象位于 ( )

A.第一、第二象限　　B.第一、第三象限
C.第二、第三象限　　D.第二、第四象限

2.若一个矩形的面积是 8,则表示这个矩形的一组邻边的长 y 与 x 的函数关系的图象大致是 ( )



A　B　C　D

3.关于反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象,下列说法正确的是 ( )

A.图象经过点(1,1)
B.两个分支分布在第二、第四象限
C.两个分支关于 x 轴成轴对称
D.当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小

4.(山东日照中考)反比例函数 $y=\frac{kb}{x}$ 的图象如图 26.1.2-5 所示,则一次函数 $y=kx+b$($k\neq0$)的图象

大致是 ( )

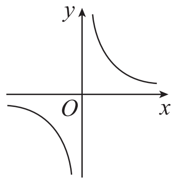
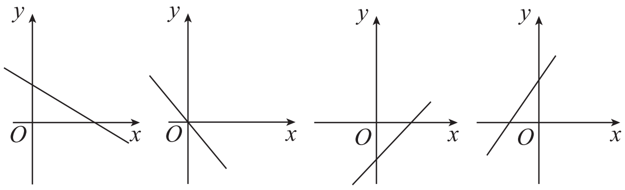


图 26.1.2-5



A B C D

5.点 A 为反比例函数图象上一点,它到原点的距离为5,到 x 轴的距离为3,若点 A 在第二象限内,则这个反比例函数的解析式为 ( )

A.$y=\frac{12}{x}$ B.$y=-\frac{12}{x}$

C.$y=\frac{1}{12x}$ D.$y=-\frac{1}{12x}$

6.已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象如图 26.1.2-6 所示,则 k 的值可能是________(写一个即可).

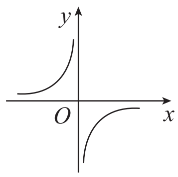


图 26.1.2-6

7.已知反比例函数 $y=(m-2)x^{m^2-10}$ 的图象分布在第一、第三象限内,求实数 m 的值.

能力提升

8.三个反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}$,$y=\frac{k_2}{x}$,$y=\frac{k_3}{x}$ 在 x 轴上方的图象如图 26.1.2-7 所示,由此观察得到 k_1,k_2,k_3 的大小关系为 ( )

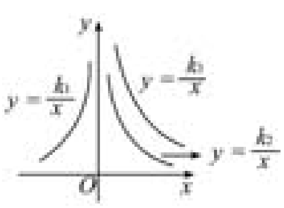


图 26.1.2-7

A.$k_1>k_2>k_3$ B.$k_3>k_1>k_2$

C.$k_2>k_3>k_1$ D.$k_3>k_2>k_1$

9.若反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 图象上有两个点为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,且 $x_1<x_2$,则下列关于 y_1 与 y_2 的关系的说法正确的是 ( )

A.$y_1>y_2$ B.$y_1<y_2$

C.$y_1=y_2$ D.不能确定

10.反比例函数 $y=\frac{k-2}{x}$ 的图象的一个分支如图 26.1.2-8 所示,对于给出的下列说法:

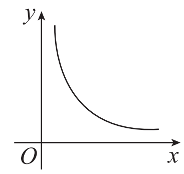


图 26.1.2-8

①k 的取值范围是 $k>2$;

②图象的另一个分支在第三象限;

③在函数图象上取点 $A(a_1,b_1)$ 和 $B(a_2,b_2)$,当 $a_1>a_2$ 时,$b_1<b_2$;

④在函数图象的某一个分支上取点 $A(a_1,b_1)$ 和 $B(a_2,b_2)$,当 $a_1>a_2$ 时,$b_1<b_2$.

其中正确的是________.(填序号)

11.已知反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}$(k 为常数,且 $k\neq1$).

(1)若点 $A(1,2)$ 在这个函数的图象上,求 k 的值;

(2)若在这个函数图象的每一支上,y 随 x 的增大而减小,求 k 的取值范围;

(3)若 $k=13$,试判断点 $B(3,4)$,$C(2,5)$ 是否在这个函数的图象上,并说明理由.

拓展创新

12.直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 $y=\frac{6}{x}$ 交于 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 两点,求 $3x_1y_2-7x_2y_1$ 的值.

第 2 课时 反比例函数的图象和性质(2)

学习目标

1.回顾反比例函数的性质,加深对反比例函数性质的理解,并逐步形成解决问题的一些基本策略.

2.通过研究过双曲线上一点向两坐标轴作垂线得到的矩形,探究反比例函数的比例系数 k 的几何意义,体会数形结合思想在本课时中的应用.

自主预习·探新知

学习任务一 回顾反比例函数的性质

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象是双曲线,它既是轴对称图形,又是中心对称图形,增减性如下:

当 $k>0$ 时,在每一个象限内,y 随 x 值的增大而________;

当 $k<0$ 时,在每一个象限内,y 随 x 值的增大而________.

学习任务二 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 中比例系数 k 的几何意义

学习过程

1.如图 26.1.2-9,在 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象上,过任意一点 $P(x,y)$ 作 x 轴、y 轴的垂线 PM,PN,分别交 x 轴、y 轴于点 M,N,则矩形 $PMON$ 的面积 $S=PM\cdot$________$=|y|\cdot$________$=$________.

因为 $y=\frac{k}{x}$,所以 $k=$________,所以 $S=$________.

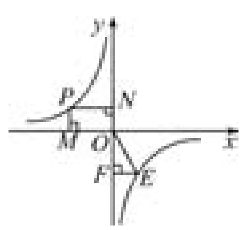


图 26.1.2-9

2.如图 26.1.2-9,在 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象上任取一点 E,作 $EF\perp y$ 轴于点 F,连接 OE,则 $S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}EF\cdot OF$,若点 E 的坐标为 (a,b),则 $S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}$__________$=$________.

探究归纳

1.过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点作 x 轴、y 轴的垂线,所得的矩形面积为________.

2.过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点作一坐标轴的垂线,并连接该点与原点,所得的三角形面积为________.

即时小练

1.如图 26.1.2-10,反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(x<0)$ 的图象经过点 P,则 k 的值为 ( )

A.-6 B.-5

C.6 D.5

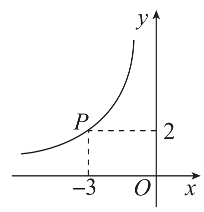


图 26.1.2-10

2.若点 $A(3,-4)$,$B(-2,m)$在同一个反比例函数的图象上,则 m 的值为 ( )

A.6 B.-6 C.12 D.-12

3.如图 26.1.2-11 所示,A,C 是函数$y=\frac{1}{x}$的图象上的任意两点,过点 A 作 $AB\perp x$ 轴于点 B,过点 C 作 $CD\perp y$ 轴于点 D,记$\triangle AOB$ 的面积为 S_1,$\triangle COD$ 的面积为 S_2,则 ( )

A.$S_1>S_2$ B.$S_1<S_2$

C.$S_1=S_2$ D.无法确定

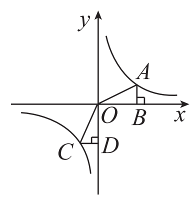


图 26.1.2-11

4.若双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 与直线 $y=2x+1$ 的一个交点的横坐标为-1,则 k 的值为________.

合作探究·释疑难

要点突破 1 反比例函数比例系数 k 的几何意义

【例 1】如图 26.1.2-12,直线 $y=mx$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 交于 A,B 两点,过点 A 作 $AM\perp x$ 轴,垂足为点 M,连接 BM,若 $S_{\triangle ABM}=2$,则 k 的值为 ( )

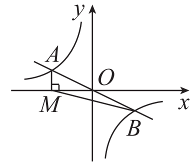


图 26.1.2-12

A.-2 B.2 C.4 D.-4

思考 1:双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 中的 k 与哪个三角形的面积有关?有什么关系?

思考 2:如何求△AOM 的面积?

思考 3:怎样判断 k 的符号?

规律方法

计算与双曲线上的点有关的图形面积

如图 26.1.2-13,$S_{\triangle AOP}=\frac{|k_1|}{2}$,$S_{\triangle APB}=\frac{|k_2|}{2}$,$S_{\triangle AP_1P_2}=2|k_3|$.

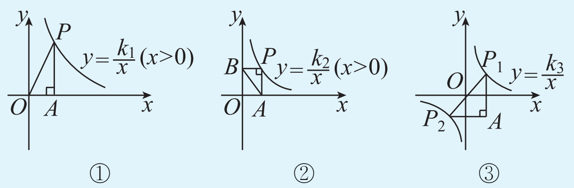


图 26.1.2-13

【变式训练】

1.如图 26.1.2-14,点 A 是反比例函数图象上的一点,自点 A 向 y 轴作垂线,垂足为点 T,已知 $S_{\triangle AOT}=4$,则此函数的解析式为 ( )

A.$y=-\frac{4}{x}$

B.$y=\frac{8}{x}$

C.$y=\frac{16}{x}$

D.$y=-\frac{8}{x}$

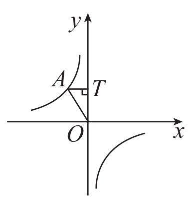


图 26.1.2-14

要点突破 2 反比例函数与一次函数图象交点问题

【例 2】(四川内江中考)如图 26.1.2-15,已知 $A(-4,2)$,$B(n,-4)$两点是一次函数 $y=kx+b$ 和反比例函数 $y=\frac{m}{x}$图象上的两个交点.

(1)求一次函数和反比例函数的解析式;

(2)求△AOB 的面积;

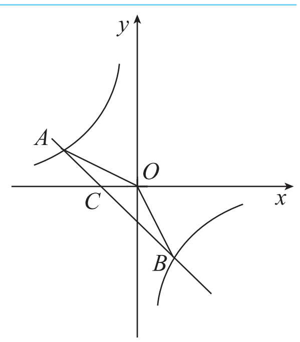


图 26.1.2-15

(3)观察图象,直接写出不等式 $kx+b-\frac{m}{x}>0$ 的解集.

思考 1:应先求哪个函数的解析式?

思考 2:可将△AOB 分成以________为底的两个三角形.

思考 3:不等式 $kx+b-\frac{m}{x}>0$ 的含义是一次函数图象在反比例函数图象的________(填"上方"或"下方").

解:

规律方法

反比例函数与一次函数综合问题的解题策略

(1)求反比例函数和一次函数的解析式,关键是求出两者图象的交点,然后利用待定系数法列方程求解,这其中渗透了方程思想的应用.

(2)涉及函数取值范围或不等式时,往往可以通过读图解决,这体现了数形结合思想的应用.

(3)特别地,反比例函数和正比例函数图象都是中心对称图形,反比例函数图象和正比例函数图象的交点关于原点对称.

【变式训练】

2.如图 26.1.2-16,一次函数 $y=x+b$ 的图象经过点 $B(-1,0)$,且与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$在第一象限内的图象交于点 $A(1,n)$.

(1)求一次函数和反比例函数的解析式;

(2)当 $1\leqslant x\leqslant 6$ 时,求反比例函数 y 的取值范围.

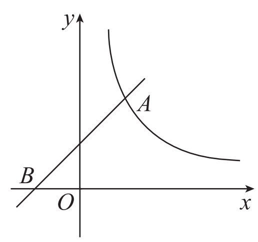


图 26.1.2-16

达标检测

1.下列给出的函数:①$y=x$;②$y=x^2$;③$y=\frac{1}{x}$,其图象是中心对称图形的是 ( )

A.①② B.②③ C.①③ D.都不是

2.正比例函数 $y=6x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象的交点位于 ( )

A.第一象限 B.第二象限

C.第三象限 D.第一、第三象限

3.如图 26.1.2-17,正方形 $ABOC$ 的边长为 2,反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x<0)$ 的图象经过点 A,则 k 的值是 ( )

A.2 B.-2 C.4 D.-4

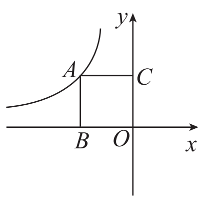


图 26.1.2-17

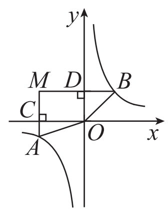


图 26.1.2-18

4.如图 26.1.2-18,在平面直角坐标系中,过点 $M(-3,2)$分别作 x 轴、y 轴的垂线,与反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象交于 A,B 两点,则四边形 $MAOB$ 的面积为________.

5.(四川巴中中考)如图 26.1.2-19,一次函数 $y=kx+b$ 与反比例函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$的图象交于$A(m,4)$,$B(2,n)$两点,与坐标轴分别交于 M,N 两点.

(1)求一次函数的解析式;

(2)根据图象直接写出 $kx+b-\frac{4}{x}>0(x>0)$中 x 的取值范围;

(3)求△AOB 的面积.

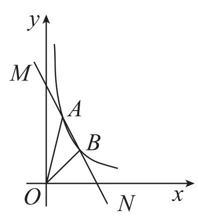


图 26.1.2-19

分层演练·提素能

基础巩固

1.(江苏徐州中考)如图 26.1.2-20,在平面直角坐标系 xOy 中,函数$y=kx+b(k\neq0)$与 $y=\frac{m}{x}(m\neq0)$的图象相交于点 $A(2,3)$,$B(-6,-1)$,则不等式 $kx+b>\frac{m}{x}$的解集为( )

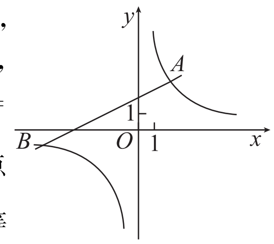


图 26.1.2-20

A.$x<-6$ B.$-6<x<0$ 或 $x>2$

C.$x>2$ D.$x<-6$ 或 $0<x<2$

2.(山东青岛中考)一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$的图象经过 $A(-1,-4)$,$B(2,2)$两点,P 为反比例函数 $y=\frac{kb}{x}$图象上一动点,O 为坐标原点,过点 P 作 y 轴的垂线,垂足为 C,则△PCO 的面积为 ( )

A.2 B.4 C.8 D.不确定

3.已知 M 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$图象上一点,$MA\perp x$ 轴于点 A,若 $S_{\triangle AOM}=4$,则这个反比例函数的解析式是________.

4.反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$的图象与经过原点的直线 l 相交于 A,B 两点,已知点 A 的坐标为$(2,1)$,那么点 B 的坐标为________.

5.如图 26.1.2-21,A,B 是双曲线 $y=\frac{k}{x}(x>0)$上的点,分别过 A,B 两点作 x 轴、y 轴的垂线段.S_1,S_2,S_3分别表示图中三个小矩形的面积,若 $S_3=1$,且 $S_1+S_2=4$,则 $k=$________.

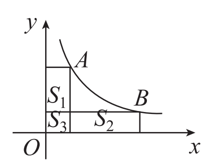


图 26.1.2-21

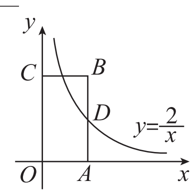


图 26.1.2-22

6.(山东枣庄中考)如图 26.1.2-22,反比例函数 $y=\frac{2}{x}$的图象经过矩形 $OABC$ 的边 AB 的中点 D,则矩形 $OABC$ 的面积为________.

7.(湖南郴州中考)如图 26.1.2-23,一次函数 $y_1=x+1$ 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}(x>0)$的图象交于点 M,作 $MN\perp x$ 轴,N 为垂足,且 $ON=1$.

(1)在第一象限内,当 x 取何值时,$y_1>y_2$?(根据图象直接写出结果)

(2)求反比例函数的解析式.

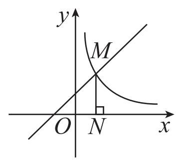


图 26.1.2-23

能力提升

8.(湖北仙桃中考)如图 26.1.2-24,$P(m,m)$是反比例函数 $y=\frac{9}{x}$在第一象限内的图象上一点,以 P 为顶点作等边三角形 PAB,使 AB 落在 x 轴上,则 $\triangle POB$ 的面积为 ( )

A.$\frac{9}{2}$　　B.$3\sqrt{3}$

C.$\frac{9+12\sqrt{3}}{4}$　　D.$\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$

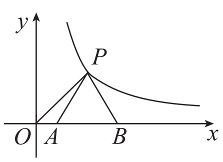


图 26.1.2-24

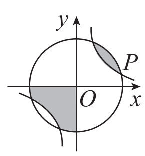


图 26.1.2-25

9.如图 26.1.2-25 所示,点 $P(3a,a)$是反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$的图象与⊙O 的一个交点,图中阴影部分的面积为 10π,则 $k=$________.

10.如图 26.1.2-26,点 A 在函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$的图象上,点 B 在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$的图象上,且 $AB\parallel x$ 轴,点 C,D 在 x 轴上.若四边形 $ABCD$ 为矩形,且它的面积为 3,则 $k=$________.

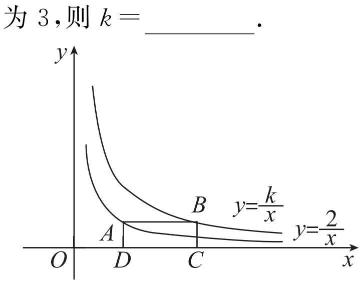


图 26.1.2-26

11.如图 26.1.2-27,点 A,B 分别是双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>0)$上的点,$AC\perp y$ 轴于点 C,$BD\perp y$ 轴于点 D,连接 AD,BC,若四边形 $ACBD$ 是面积为 12 的平行四边形,则 $k=$________.

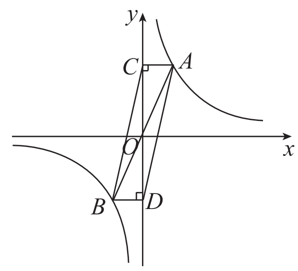


图 26.1.2-27

12.如图 26.1.2-28,直线 $y=x+b$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数,$k\neq0$)在第一象限内交于点 $A(1,2)$,且与 x 轴、y 轴分别交于 B,C 两点.

(1)求直线和双曲线所对应的函数解析式;

(2)若点 P 在 x 轴上,且$\triangle BCP$ 的面积等于 2,求点 P 的坐标.

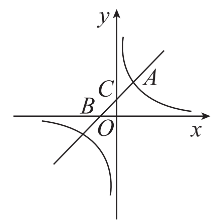


图 26.1.2-28

拓展创新

13.(湖南岳阳中考)已知点 A 在函数 $y_1=-\frac{1}{x}(x>0)$的图象上,点 B 在直线 $y_2=kx+1+k$(k 为常数,且 $k\geqslant0$)上.若 A,B 两点关于原点对称,则称点 A,B 为函数 y_1,y_2 图象上的一对"友好点".请问这两个函数图象上的"友好点"对数的情况为 ( )

A.有 1 对或 2 对　　B.只有 1 对

C.只有 2 对　　D.有 2 对或 3 对

26.2 实际问题与反比例函数

第1课时 实际问题与反比例函数(1)

学习目标

1.经历建立反比例函数模型的过程，体会数学与现实生活的紧密联系，提高解决实际问题的能力.

2.会用几何、方程、反比例函数等知识解决一些实际问题.

自主预习·探新知

学习任务 实际问题中常见的反比例关系举例

1.当路程 s 一定时，时间 t 与速度 v 成反比例关系，可以写成________(s 是常数).

2.当矩形的面积 S 一定时，长 a 与宽 b 成反比例关系，可以写成________(S 是常数).

3.当三角形的面积 S 一定时，底边长 y 与这一底上的高 x 成反比例关系，可以写成________(S 是常数).

4.当长方体的体积 V 一定时，底面积 S 与高 h 成反比例关系，可以写成________(V 是常数).

即时小练

1.一司机驾驶汽车从甲地去乙地，他以 80 km/h 的平均速度用了 4 h 到达乙地，当他按原路匀速返回时，汽车的速度 v(单位:km/h)关于时间 t(单位:h)的函数解析式是 ( )

A.$v=320t$　　B.$v=\frac{320}{t}$

C.$v=20t$　　D.$v=\frac{20}{t}$

2.一块等腰三角形纸板的面积为 10，底边长为 x，底边上的高为 y，则 y 关于 x 的函数解析式为 ( )

A.$y=\frac{10}{x}$　B.$y=\frac{5}{x}$　C.$y=\frac{20}{x}$　D.$y=\frac{x}{20}$

3.已知一个长方体盒子的体积是 100 cm^3，它的长是 y cm，宽是 10 cm，高是 x cm.

(1)写出 y 与 x 之间的函数解析式；

(2)当 $x=2$ 时，求 y 的值.

合作探究·释疑难

要点突破1 反比例函数在几何问题中的应用

【例1】李大爷准备在一块空地上用篱笆围成一块面积为 64 m^2 的长方形菜地.

(1)该菜地的长 x (单位:m)与宽 y(单位:m)有什么样的函数关系？

(2)小明建议把长定为 8 m，那么按小明的建议，李大爷要准备多长的篱笆？

(3)通过测量，发现宽最多为 5 m，那么长至少为多少米时，才能保证菜地的面积不变？

思考1:长方形菜地的面积和菜地的长与宽之间存在怎样的等量关系？其中哪个是已知量？该菜地的长 x 的取值范围是什么？

思考2:长方形的周长公式是什么？

思考3:长方形菜地的面积一定，当宽 y 取最大值时，长 x 取最大值还是最小值？

解:

规律方法

利用反比例函数解决实际问题的步骤

第1步:审清题意，找出问题中的常量、变量，并厘清常量和变量之间的关系；

第2步:根据常量和变量之间的关系，设出反比例函数解析式；

第3步:利用待定系数法确定函数解析式，并注意自变量的取值范围；

第4步:利用反比例函数的图象与性质解决实际问题.

【变式训练】

1. 某养鱼专业户准备挖一个面积为 2 000 m^2 的长方形鱼塘.

(1)求鱼塘的长 y(单位:m)关于宽 x(单位:m)的函数解析式;

(2)由于受场地的限制,鱼塘的宽最多只能为 20 m,当鱼塘的宽是 20 m 时,鱼塘的长为多少米?

要点突破 2 反比例函数在行程问题中的应用

【例 2】 小林家与工作单位的距离为 3 600 m,他每天骑自行车上班时的速度为 v(单位:m/min),所需时间为 t(单位:min).

(1)速度 v 与时间 t 之间有怎样的函数关系?

(2)若小林到单位用 15 min,则他骑车的平均速度是多少?

(3)如果小林骑车的平均速度最快为 300 m/min,那么他至少需要几分钟到达单位?

解:

规律方法

用反比例函数解决行程问题时,关键是抓住这个规律:当路程一定时,速度与时间的乘积为定值,则速度和时间成反比例函数关系.

【变式训练】

2. 张丽每天上学、放学都往返于她家和学校之间.已知她家离学校 1 500 m,设她每天往返的速度均为 v m/min,从家到学校所用时间为 t min.

(1)请你写出 v 与 t 之间的函数解析式,并画出其函数图象;

(2)星期一,她步行到学校,速度为 80 m/min,到学校后发现忘了带铅笔盒,于是借了一辆自行车回家去取,为了不耽误上课时间,她必须在不超过 10 min 的时间内赶到家,那么她骑自行车的速度要比步行至少快多少?

要点突破 3 反比例函数在工程问题中的应用

【例 3】 某工人加工一批机器零件,如果每小时加工 30 个,那么 12 h 可以完成.

(1)设每小时加工零件 x(单位:个),所需时间为 y(单位:h),写出 y 与 x 之间的函数解析式,并画出图象;

(2)若要在一个工作日(即 8 h)内完成,则每小时要比原来多加工多少个?

解:

规律方法

在工程问题中,往往存在三个量:工作总量、工作效率和工作时间.当工作总量一定时,工作效率与工作时间的乘积为定值,则工作效率和工作时间成反比例函数关系.

【变式训练】

3. 码头工人每天在码头上装卸货物,装卸速度 y(单位:吨/天)与装卸货物所需时间 x(单位:天)之间的函数关系如图 26.2-1.

(1)求 y 与 x 之间的函数解析式;

(2)由于遇到紧急情况,要求船上的货物不超过 5 天卸货完毕,那么平均每天至少要卸多少吨货物?

(3)若码头原有工人 10 名,且每名工人每天的卸货量相同,卸完这批货物恰好用 8 天时间,在(2)的条件下,至少需要增加多少名工人才能完成任务?

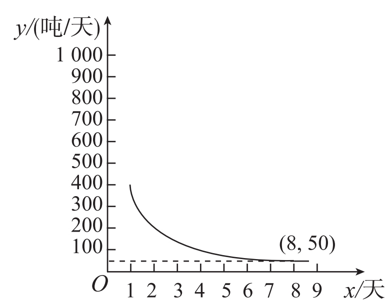


图 26.2-1

达标检测

1.日常生活中有许多现象应用了反比例函数，下列现象符合反比例函数关系的有　（　　）

①购买同一种商品，买得越多，花钱越多；

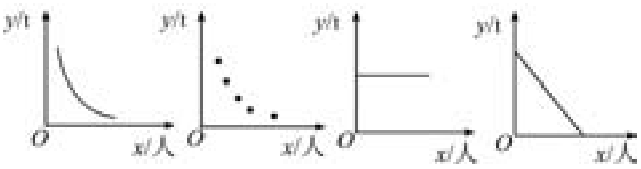
②百米赛跑时，用时越短，跑得越快；

③把浴盆放满水，水流越大，用时越短；

④从网上下载同一个文件，网速越快，用时越少.

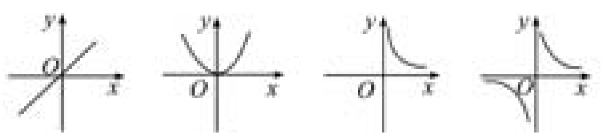
A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

2.某村的粮食总产量为 a t(a 为常数)，设该村粮食的人均产量为 y(单位：t)，人口数为 x(单位：人)，则 y 与 x 之间的函数图象大致是　（　　）



A　　B　　C　　D

3.甲、乙两地相距 100 km，一辆汽车从甲地开往乙地，把汽车到达乙地所用时间 y(单位：h)表示为汽车平均速度 x(单位：km/h)的函数，则此函数的图象大致是　（　　）



A　　B　　C　　D

4. 某地区探测出一处储藏量为 1 亿吨的稀土矿藏，政府准备进行有组织、有计划地开采.

(1)求开采年限 y(单位：年)与开采速度 x(单位：万吨/年)之间的函数解析式；

(2)如果政府初步决定每年开采 100 万吨，那么这处矿藏的开采年限为多少年？

(3)为节约资源，政府决定将开采年限定为 150 年，那么开采的速度应定为每年多少万吨才能达到要求？(结果保留整数)

5.一定体积的水放在量筒内，它的高度 h(单位：cm)与量筒的截面积 S(单位：cm^2)成反比例函数关系.

(1)当体积为 1 cm^3 时，求 h 与 S 的函数解析式；

(2)当把 1 cm^3 的水滴入截面积分别为 1 cm^2，5 cm^2 的量筒中时，量筒中液面的高度分别为多少？

(3)结合(2)中结论，你认为体积值相同而截面积不同的几种量筒，哪种量筒读数时更方便？

分层演练・提素能

基础巩固

1.小华以 x 字/分的速度书写，y 分钟写了 300 字，则 y 关于 x 的函数解析式为　（　　）

A.$x=\dfrac{300-y}{y}$　　B.$y=\dfrac{300}{x}$

C.$x+y=300$　　D.$y=\dfrac{300-x}{x}$

2.如图 26.2-2，某玻璃器皿制造公司要制造一种容积为 5 L(1 L=1 dm^3)的圆柱形量筒，量筒的底面积 S 与量筒高 h 存在反比例函数关系.当量筒高为 25 cm 时，则量筒的底面积为　（　　）

A.200 cm^2

B.150 cm^2

C.50 cm^2

D.20 cm^2

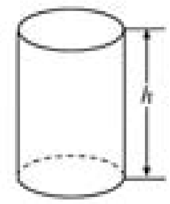
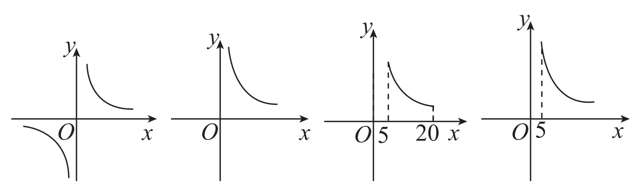


图 26.2-2

3.(湖北宜昌中考)某学校要种植一块面积为 100 m^2 的长方形草坪，要求边长均不小于 5 m，则草坪的一边长 y(单位：m)随另一边长 x(单位：m)的变化而变化的图象可能是　（　　）



A　　B　　C　　D

4.你吃过拉面吗？实际上在做拉面的过程中就渗透着数学知识：一定体积的面团做成拉面，面条的总长度 y(单位：m)是面条的横截面积 S(单位：mm^2)的反比例函数，其图象如图 26.2-3 所示.

(1)写出 y 关于 S 的函数解析式：________.

(2)当面条横截面积为 1.6 mm^2 时，面条总长度是________ m.

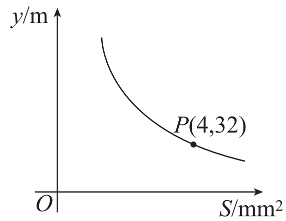


图 26.2-3

5. 贝贝从图书馆借了一本科幻小说，如果每天读 30 页，需 12 天读完.

(1)这本书有________页；

(2)如果加快读书速度，使每天读的书达到 p(单位：页)，那么将全本书读完所需的时间 t(单位：天)将________(填“增大”或“减小”)；

(3)t 与 p 之间的函数解析式是________；

(4)如果准备在 6 天之内将此书读完，那么每天至少应读________页；

(5)如果每天最多读 90 页，那么最少________天可以读完此书.

6. 某乡镇要将生活垃圾存放区改建为一片草地，必须把 1 000 m^3 生活垃圾运走.

(1)假如每天能运 x m^3，所需时间为 y 天，写出 y 与 x 之间的函数解析式.

(2)若每辆拖拉机一天能运 10 m^3，则 4 辆这样的拖拉机要用多少天才能运完？

(3)在(2)的情况下，运了 10 天后，剩下的任务要在不超过 6 天的时间完成，那么至少需要增加多少辆这样的拖拉机才能按时完成任务？

能力提升

7. 去学校食堂就餐，经常会在一个买菜窗口前等待，经调查发现，学生的舒适度指数 y 与等待时间 x(单位：min)之间满足反比例函数关系，如下表：

等待时间 x/min	1	2	5	10	20
舒适度指数 y	100	50	20	10	5

已知学生等待时间不超过 30 min.

(1)求 y 关于 x 的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围.

(2)当等待时间为 8 min 时，求舒适度指数 y 的值.

(3)舒适度指数不低于 10 时，学生才会感到舒适.请说明，作为食堂的管理员，让每名在窗口买菜的学生最多等待多少时间？

8. 某物流公司要把 3 000 t 货物从 M 市运到 W 市(每日的运输量为固定值).

(1)从运输开始，求每天运输的货物质量 y(单位：t)与运输时间 x(单位：天)之间的函数解析式；

(2)因受到沿线道路扩建工程影响，实际每天的运输量比原计划减少 20%，以致推迟 1 天完成运输任务，求原计划完成运输任务的天数.

9. (浙江丽水中考)丽水某公司将“丽水山耕”农副产品运往杭州市场进行销售，记汽车行驶时间为 t h，平均速度为 v km/h(汽车行驶速度不超过 100 km/h).根据经验，v，t 的一组对应值如下表：

v/(km/h)	75	80	85	90	95
t/h	4.00	3.75	3.53	3.33	3.16

(1)根据表中的数据，求出平均速度 v(单位：km/h)关于行驶时间 t(单位：h)的函数解析式；

(2)汽车上午 7:30 从丽水出发，能否在上午 10:00 之前到达杭州市场？请说明理由.

(3)若汽车到达杭州市场的行驶时间 t 满足 $3.5 \leqslant t \leqslant 4$，求平均速度 v 的取值范围.

拓展创新

10. 如图 26.2-4 所示，墙 MN 长为 12 m，要利用这面墙围一个矩形小院 $ABCD$，面积为 60 m^2，现有建材能建围墙总长至多为 26 m，设 $AB=x$ m，$BC=y$ m.

(1)写出 y 与 x 之间的函数解析式；

(2)要求 x 和 y 都取整数，且小院的长宽比尽可能小，x 应取何值？

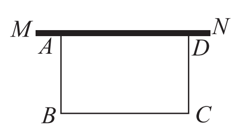


图 26.2-4

第 2 课时 实际问题与反比例函数(2)

学习目标

1.经历利用反比例函数知识解决物理问题的过程，认识到数学知识可以解决跨学科问题.

2.通过分析实际问题中变量之间的关系，建立反比例函数模型，进而解决问题，从而体会建模思想的应用.

自主预习·探新知

学习任务 物理中的反比例函数

学习过程

1.当功 W 一定时，力 F 与物体在力的方向上通过的位移 s 成反比例关系，可以写成________(W 是常数).

2.当压力 F 一定时，压强 p 与受力面积 S 之间成反比例关系，可以写成________(F 是常数).

3.在某一电路中，保持电压 U 不变，电流 I 与电阻 R 成反比例关系，可以写成________(U 是常数).

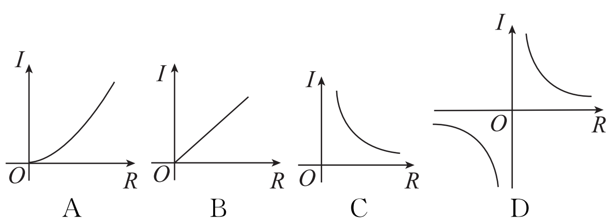
4.当物体的质量 m 一定时，物体的密度 ρ 关于体积 V 的函数解析式是________(m 是常数).

探究归纳

在利用反比例函数解决与其他学科有关的实际问题时，一定要注意 $y=\frac{k}{x}$ 中，k 为________，且 k ________ 0 这一条件，要结合学科知识，深入探究问题的含义.

即时小练

1.(浙江台州中考)已知电流 I(单位:A)、电压 U(单位:V)、电阻 R(单位:Ω)之间的关系为 $I=\frac{U}{R}$，当电压为定值时，I 关于 R 的函数图象是 (　　)



2.实验表明，当导线的长度一定时，导线的电阻与它的横截面积成反比例.一条长为 100 cm 的导线的电阻 R(单位:Ω)与它的横截面积 S(单位: cm^2)的函数图象如图 26.2-5 所示，那么其函数解析式为________，当 $S=2\ cm^2$ 时，$R=$________ Ω.

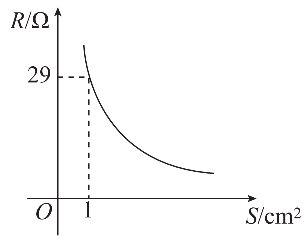


图 26.2-5

3.人的视觉机能受运动速度的影响很大，行驶中司机在驾驶室内观察前方物体时是动态的，车速增加，视野变窄.当车速为 50 km/h 时，视野为 80 度.如果视野 f(单位:度)是车速 v(单位:km/h)的反比例函数，求 f 与 v 之间的函数解析式，并计算当车速为 100 km/h 时视野的度数.

合作探究·释疑难

要点突破 1 反比例函数在物理问题中的应用

【例 1】某校科技小组进行野外考察，途中遇到一片十几米宽的湿地.为了安全、迅速地通过这片湿地，他们沿着前进路线铺了若干块木板，构筑成一条临时通道.木板对地面的压强 p(单位:Pa)是木板面积 S(单位: m^2)的反比例函数，其图象如图 26.2-6 所示.

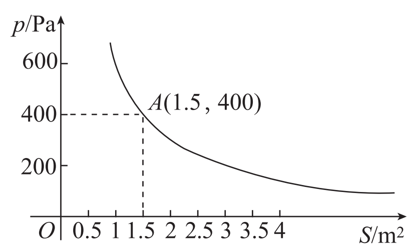


图 26.2-6

(1)求此函数的解析式和自变量的取值范围;

(2)当木板面积为 0.2 m^2 时，压强是多少?

(3)如果要求压强不超过 6 000 Pa，那么木板的面积至少要多大?

解:

规律方法

在利用反比例函数解决其他学科问题时，要先根据题目中的实际意义结合该学科具有的特性，找出各变量的关系，建立反比例函数模型，再根据需要利用反比例函数的性质解决问题.此类问题渗透了建模思想和转化思想.

【变式训练】

1. 舞台灯光可以在很短的时间内将阳光灿烂的晴日变成浓云密布的阴天，或由黑夜变成白昼，这样的效果是通过改变电阻来控制电流的变化实现的.因为当电流 I 较小时，灯光较暗；反之，当电流 I 较大时，灯光较亮.在某一舞台的电路中，保持电压 U（单位：V）不变，电流 I（单位：A）与电阻 R（单位：Ω）成反比例，当电阻 $R=20\ \Omega$ 时，电流 $I=11$ A.

(1)求电流 I 与电阻 R 之间的函数解析式；

(2)当舞台线路所承受的电流不超过 10 A 时，那么电阻 R 至少应该是多少？

2. 某工厂要利用杠杆将立在路中央的雕塑移动一下位置.已知雕塑的阻力为 5 000 N，杠杆的阻力臂长为 2 m.

(1)请写出杠杆的动力臂 l（单位：m）与动力 F（单位：N）之间的函数解析式；

(2)如果工厂在移动雕塑的过程中能使用的动力只有 800 N，那么使用的杠杆的动力臂应为多长？

要点突破 2　与反比例函数有关的分段函数问题

【例 2】 某药品研究所开发一种抗菌新药，经多年动物实验，首次用于临床人体实验.测得成人服药后血液中药物浓度 y（单位：μg/mL）与服药时间 x（单位：h）之间的函数关系如图 26.2-7 所示（当 $4\leqslant x\leqslant 10$ 时，y 与 x 成反比例）.

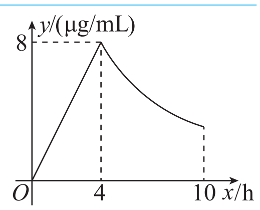


图 26.2-7

(1)根据图象分别求出血液中药物浓度上升和下降阶段 y 与 x 之间的函数解析式；

(2)血液中药物浓度不低于 4 μg/mL 的持续时间为多少小时？

解：

规律方法

解分段函数的方法

若题目中的函数是一个分段函数，则当 x 取不同的值时，函数解析式也不同.解决此类分段函数问题时，要先注意函数、自变量的取值范围以及所给的自变量或函数值应代入哪个函数解析式中，再运用相应函数的性质解题.

【变式训练】

3. 家用电灭蚊器的发热部分使用了 PTC 发热材料，它的电阻 R（单位：kΩ）随温度 T（单位：℃）（在一定范围内）变化的大致图象如图 26.2-8（示意图）所示.通电后，发热材料的温度在由室温 10 ℃上升到 30 ℃的过程中，电阻与温度成反比例关系，且在温度达到 30 ℃时，电阻下降到最小值；随后电阻随温度升高而增加，温度每上升 1 ℃，电阻增加 $\frac{4}{15}$ kΩ.

(1)求当 $10\leqslant T\leqslant 30$ 时，R 和 T 之间的函数解析式；

(2)求温度在 30 ℃时电阻 R 的值，并求出 $T\geqslant 30$ 时，R 和 T 之间的函数解析式；

(3)家用电灭蚊器在使用过程中，温度在什么范围内时，发热材料的电阻不超过 6 kΩ？

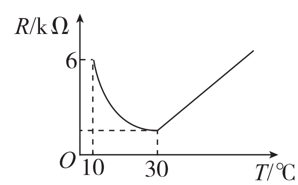


图 26.2-8

达标检测

1. 如图 26.2-9，一个圆台形物体的上底面积是下底面积的 $\frac{2}{3}$，此时圆台对桌面的压强为 200 Pa，则将圆台翻过来（上底朝下）放在桌面上对桌面的压强是________Pa.


图 26.2-9

2. 对物体做功一定的情况下，力 F（单位：N）与此物体在力的方向上移动的距离 s（单位：m）成反比例函数关系，其图象如图 26.2-10 所示，点 $P(5,1)$ 在图象上，则当力达到 10 N 时，物体在力的方向上移动的距离是________m.

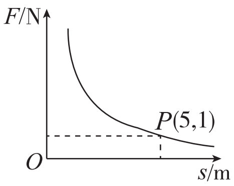


图 26.2-10

3. 蓄电池的电压 U 为定值，使用此电源时，电流 I（单位：A）是电阻 R（单位：Ω）的反比例函数，其图象如图 26.2-11 所示.

(1)求这个反比例函数的解析式；

(2)当 $R=10$ Ω 时，电流能是 4 A 吗？

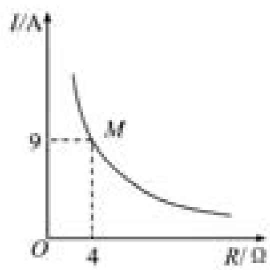


图 26.2-11

4. 如图 26.2-12（示意图），制作某金属工具时，先将材料煅烧 6 min，使温度升到 800 ℃，再停止煅烧进行锻造，8 min 时温度降为 600 ℃.煅烧时温度 T 与时间 x 成一次函数关系；锻造时温度 T 与时间 x 成反比例函数关系.该材料初始温度是 32 ℃.

(1)分别求出材料煅烧和锻造时 T 关于 x 的函数解析式；

(2)根据工艺要求，当材料温度低于 480 ℃时，须停止操作，那么锻造的操作时间有多长？

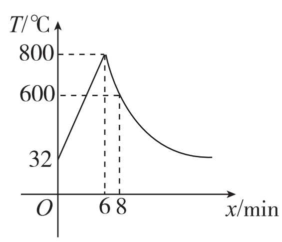


图 26.2-12

分层演练·提素能

基础巩固

1. 一块蓄电池的电压 U 为定值，使用此蓄电池为电源时，电流 I（单位：A）与电阻 R（单位：Ω）之间的函数关系如图 26.2-13 所示，如果以此蓄电池为电源的用电器，限制电流不得超过 10 A，那么此用电器的可变电阻应 （　　）

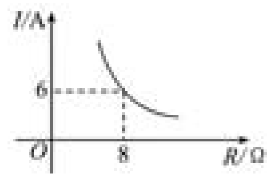


图 26.2-13

A.不小于 4.8 Ω　　B.不大于 4.8 Ω

C.不小于 14 Ω　　D.不大于 14 Ω

2. 探究杠杆平衡时阻力和动力的关系.实验过程中，保持阻力和阻力臂不变，然后改变动力 F_1 和动力臂 l_1，并保持杠杆水平平衡，分别测量出动力臂 l_1 和动力 F_1 的数据如下表所示.请你根据实验条件和实验数据帮助小东归纳出动力 F_1 与动力臂 l_1 的关系：________.

l_1/m	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
F_1/N	12	6	4	3	2.4	2

3. 如图 26.2-14 所示，总质量（m）相等但底面积不等的两种水杯放在水平桌面上，若水杯对桌面的压强为 p，杯底面积为 S，则 p 关于 S 的函数解析式为________，其中甲水杯对桌面的压强________（填“大于”“小于”或“等于”）乙水杯对桌面的压强.

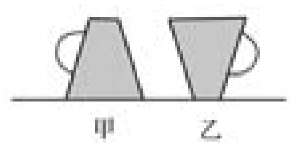


图 26.2-14

4. 收音机刻度盘上的波长 λ 和频率 f 的单位分别是米（单位：m）和千赫兹（单位：kHz），下面是波长 λ 和频率 f 的一些对应值：

波长/m	300	500	600	1 000	1 500
频率/kHz	1 000	600	500	300	200

(1)根据表中数据特征可判断频率 f 是波长 λ 的________（填“正比例”“反比例”或“一次”）函数，其解析式为________；

(2)当频率 f 不超过 400 kHz 时，求波长 λ 的取值范围.

5.某商场出售一批名牌衬衣，进价为 80 元/件，在营销中发现，该衬衣的日销售量 y(单位：件)是售价 x(单位：元/件)的反比例函数，且当售价定为 100 元/件时，每天可售出 30 件.

(1)请求出 y 与 x 之间的函数解析式(不必写出自变量的取值范围)；

(2)若要使日销售利润达到 2 040 元，则每件售价应定为多少元?

6.(福建厦门中考改编)药品研究所的某种新药在成人用药后，测得血液中的药物浓度 y(单位：μg/mL)随用药后的时间 x(单位：h)变化的图象(图象由线段 OA 与部分双曲线 AB 组成)如图 26.2-15(示意图)所示.并测得当 $y=a$ 时，该药物才具有疗效.若成人用药 4 h，药物开始产生疗效，且用药后 9 h，药物仍具有疗效(超过9 h，药物失去疗效)，则成人用药后，血液中药物至少需要多长时间达到最大浓度?

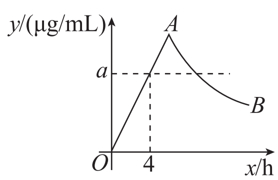


图 26.2-15

能力提升

7.某气球内充满了一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的气压 p(单位：kPa)是气体体积 V(单位：m^3)的反比例函数，其图象如图 26.2-16 所示.当气球内的气压大于 120 kPa 时，气球将爆炸.为了安全起见，气球的体积应 (　　)

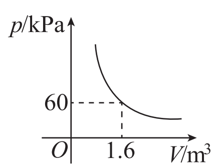


图 26.2-16

A.不小于$\frac{5}{4}$ m^3　　B.小于$\frac{5}{4}$ m^3

C.不小于$\frac{4}{5}$ m^3　　D.小于$\frac{4}{5}$ m^3

8.(江苏盐城中考)我市某蔬菜生产基地用装有恒温系统的大棚栽培一种适宜生长温度为 15～20 ℃的新品种，某天恒温系统从开启到关闭及关闭后，大棚里温度 y(单位：℃)随时间 x(单位：h)变化的函数图象如图 26.2-17 所示，其中 AB 段是恒温阶段，BC 段是双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 的一部分，请根据图中信息解答下列问题：

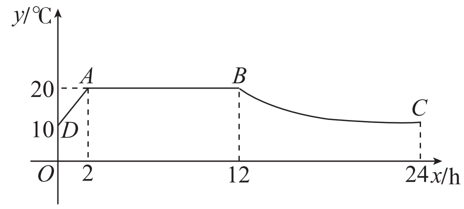


图 26.2-17

(1)求 k 的值；

(2)恒温系统在一天内保持大棚里温度在 15 ℃及 15 ℃以上的时间有多少小时?

拓展创新

9.在公平秤普及以前，曾经有一些不法商贩在市场买卖中，利用杆秤砣大做文章.

(1)利用标准秤砣和非标准秤砣对同一物体的称量结果如图 26.2-18 所示，你认为________是非标准秤，原因是把秤砣变________(填“轻”或“重”)；

(2)在称同一物体时，所称得的物体质量 y(单位：kg)与所用秤砣质量 x(单位：kg)之间满足关系为________；

(3)当秤砣较轻时，称得的物体质量变大，这正好符合(2)中函数的一条性质，即________________.

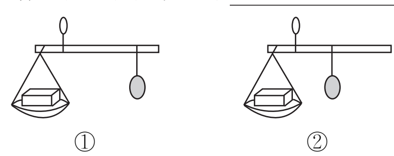


图 26.2-18

章末归纳整合

知识体系·全构建

回顾本章知识,将下面的知识体系图补充完整.

- 反比例函数
  - 概念:一般地,形如 $y=$①________(k 为常数,$k\neq0$)的函数,叫做反比例函数
  - 图象位置
    - 当 $k>0$ 时,双曲线的两个分支分别位于②________象限
    - 当 $k<0$ 时,双曲线的两个分支分别位于③________象限
  - 增减性
    - 当 $k>0$ 时,在每个分支所在的象限内,y 值随 x 的增大而④________
    - 当 $k<0$ 时,在每个分支所在的象限内,y 值随 x 的增大而⑤________
  - 用待定系数法确定反比例函数的解析式
  - 应用
    - 反比例函数在实际问题中的应用
    - 反比例函数在几何问题中的应用
    - 反比例函数在跨学科问题中的应用

答案:①$\frac{k}{x}$ ②第一、第三 ③第二、第四 ④减小 ⑤增大

核心考点·精突破

考点一 反比例函数的概念

方法技巧

解决反比例函数概念类问题的技巧

(1)方程思想:根据反比例函数的概念或相关条件列方程,从而求出参数得到答案;

(2)待定系数法:反比例函数中只含有一个未知数,只要求出其图象上一个点的坐标,代入即可得到反比例函数的解析式,从而解决问题.

题组集训

1.已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象经过点(5,2),若点$(1,n)$也在反比例函数的图象上,则 n 等于 ( )

A.2 B.5

C.10 D.0.1

2.若反比例函数 $y=(2k-1)x^{3k^2-2k-1}$ 的图象位于第二、第四象限,则 k 的值是________.

考点二 反比例函数的图象与性质

方法技巧

反比例函数的图象与性质的识记,一般离不开分类讨论和数形结合.

(1)分类讨论:识记反比例函数的图象和性质,往往要分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况;

(2)数形结合:画出反比例函数图象的草图,函数的增减性往往一目了然.

题组集训

3.(江苏连云港中考改编)姜老师给出一个函数解析式,甲、乙、丙三名同学分别正确指出了这个函数的一个性质.甲:函数图象的一个分支在第一象限;乙:函数图象的另一个分支在第三象限;丙:在每一个分支所在象限内,y 值随 x 值的增大而减小.根据他们的描述,姜老师给出的这个函数解析式可能是 ( )

A.$y=3x$ B.$y=\frac{3}{x}$

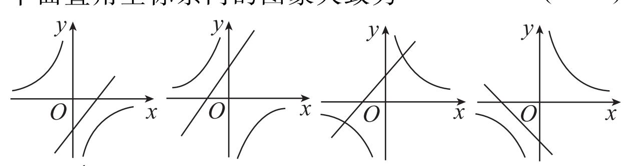
C.$y=-\frac{1}{x}$ D.$y=x^2$

4.(黑龙江中考)反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 图象上三个点的坐标为(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),若 $x_1<x_2<0<x_3$,则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是 ( )

A.$y_1<y_2<y_3$ B.$y_2<y_1<y_3$

C.$y_2<y_3<y_1$ D.$y_1<y_3<y_2$

5.(广西贺州中考)一次函数 $y=ax+a$(a 为常数,$a\neq0$)与反比例函数 $y=\frac{a}{x}$(a 为常数,$a\neq0$)在同一平面直角坐标系内的图象大致为 ( )



A B C D

6.(上海中考)如果反比例函数 $y=\frac{k}{x}$(k 是常数,$k\neq0$)的图象经过点(2,3),那么在这个函数图象所在的每个象限内,y 的值随 x 的值增大而________.(填"增大"或"减小")

考点三 反比例函数与一次函数的综合

方法技巧

反比例函数与一次函数的综合问题往往遵循以下解题思路：
(1)根据已知点的坐标(或两个函数图象的交点坐标)求出两个函数的解析式；
(2)根据二者的相应性质(如增减性等)，结合其他数学知识解决问题.

题组集训

7.(山东临沂中考)如图26-1，正比例函数 $y_1=k_1x$ 与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 A，B 两点，其中点 A 的横坐标为1.当 $y_1<y_2$ 时，x 的取值范围是（　　）

A.$x<-1$ 或 $x>1$　　B.$-1<x<0$ 或 $x>1$
C.$-1<x<0$ 或 $0<x<1$　　D.$x<-1$ 或 $0<x<1$

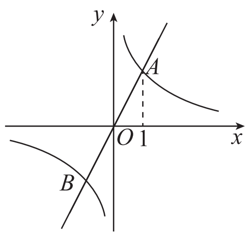


图 26-1

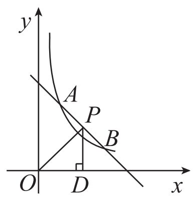


图 26-2

8.(河南中考)如图26-2，一次函数 $y=-x+b$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象交于点 $A(m,3)$ 和 $B(3,1)$.
(1)填空：一次函数的解析式为________，反比例函数的解析式为________；
(2)点 P 是线段 AB 上一点，过点 P 作 $PD\perp x$ 轴于点 D，连接 OP，若△POD 的面积为 S，求 S 的取值范围.

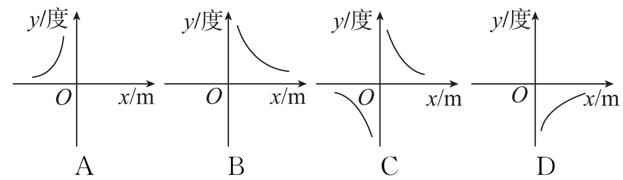
考点四 反比例函数的应用

方法技巧

解决反比例函数相关的应用问题，关键是准确建立反比例函数模型，从而利用反比例函数的性质来解决问题.

题组集训

9.科学证实：近视眼镜的度数 y(单位：度)与镜片焦距 x(单位：m)成反比例关系，如果500度近视眼镜片的焦距为0.2 m，则表示 y 与 x 函数关系的图象大致是（　　）



10.(浙江杭州中考)在面积都相等的所有矩形中，当其中一个矩形的一边长为1时，它的另一边长为3.
(1)设矩形的相邻两边长分别为 x，y.
①求 y 关于 x 的函数解析式；
②当 $y\geqslant 3$ 时，求 x 的取值范围.
(2)圆圆说其中有一个矩形的周长为6，方方说有一个矩形的周长为10，你认为圆圆和方方的说法对吗？为什么？

学科素养·速提升

专题一 方程思想

方程思想是根据条件构造方程(组)，并通过解方程(组)来解决问题.本章中反比例函数的解析式的确定及关于反比例函数的实际问题中无不渗透着方程思想，它集中体现在待定系数法的运用上.

【例1】(湖北黄冈中考)如图26-3，已知点 $A(1,a)$ 是反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象上的一点，直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 与反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象在第四象限的交点为点 B.

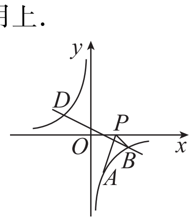


图 26-3

(1)求直线 AB 对应的函数解析式；
(2)动点 $P(x,0)$ 在 x 轴的正半轴上运动，当线段 PA 与线段 PB 之差达到最大时，求点 P 的坐标.

解：(1)将 $A(1,a)$ 代入 $y=-\frac{3}{x}$ 中，得 $a=-3$，所以 $A(1,-3)$.

因为点 B 是直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 与反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象在第四象限的交点，

所以$\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2},\\ y=-\dfrac{3}{x},\end{cases}$ 所以$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-2,\\ y_2=\dfrac{3}{2},\end{cases}$

所以点 B 坐标为$(3,-1)$.

设直线 AB 对应的函数解析式为 $y=kx+b$,

所以$\begin{cases}k+b=-3,\\ 3k+b=-1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=1,\\ b=-4,\end{cases}$

所以 $y=x-4$.

(2)当点 P 为 AB 与 x 轴的交点时,$PA-PB$ 最大,如图 26-4.

因为直线 AB 的解析式为$y=x-4$,所以点 P 的坐标为$(4,0)$.

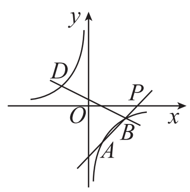


图 26-4

规律方法

待定系数法是利用方程思想求函数解析式的重要方法. 对于反比例函数,只要知道其图象上一点的坐标,建立方程即可确定反比例函数的解析式;而对于一次函数(非正比例函数),只要知道图象上两个点的坐标,通过建立方程组即可求得一次函数的解析式.

提能训练

1.(山东烟台中考)如图 26-5,直线 $y=x+2$ 与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象在第一象限交于点 P,若 $OP=\sqrt{10}$,则 k 的值为________.

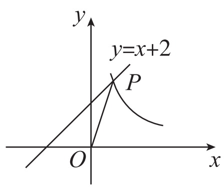


图 26-5

2.(四川绵阳中考)如图 26-6,设反比例函数的解析式为 $y=\dfrac{3k}{x}(k>0)$.

(1)若该反比例函数与正比例函数 $y=2x$ 的图象有一个交点的纵坐标为 2,求 k 的值;

(2)若该反比例函数与过点 $M(-2,0)$的直线 $l:y=kx+b$ 的图象交于 A,B 两点,如图 26-6 所示,当$\triangle ABO$ 的面积为$\dfrac{16}{3}$时,求直线 l 对应的函数解析式.

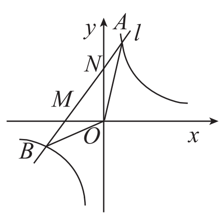


图 26-6

专题二 数形结合思想

数形结合思想就是在研究数学问题时,由数思形,以形助数,数形结合地解决问题的一种思想方法. 运用这一思想方法可使题目更加直观、形象,便于解决问题.

例 2(青海西宁中考)如图 26-7,一次函数 $y=x+m$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象交于 A,B 两点,且与 x 轴交于点 C,点 A 的坐标为$(2,1)$.

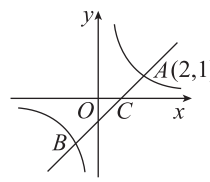


图 26-7

(1)求 m 及 k 的值;

(2)求点 C 的坐标,并结合图象写出不等式组 $0<x+m\leqslant\dfrac{k}{x}$的解集.

解:(1)由题意,得点 $A(2,1)$在函数 $y=x+m$ 的图象上,所以 $2+m=1$,即 $m=-1$.

因为 $A(2,1)$在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$的图象上,

所以$\dfrac{k}{2}=1$,所以 $k=2$.

(2)因为一次函数解析式为 $y=x-1$,

令 $y=0$,得 $x=1$,所以点 C 的坐标是$(1,0)$,

由图象可知,不等式组 $0<x+m\leqslant\dfrac{k}{x}$的解集为 $1<x\leqslant 2$.

解后反思

学会观察图象,正确识图及理解交点的意义,从而运用数形结合思想是解决本题的关键,由反比例函数图象与一次函数图象被交点分成的每段图象所对应的自变量的取值范围不同,从而得出相应的不等式组的解集.

提能训练

3.(四川泸州中考)一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$的图象经过点 $A(2,-6)$,且与反比例函数 $y=-\dfrac{12}{x}$的图象交于点 $B(a,4)$.

(1)求一次函数的解析式;

(2)将直线 AB 向上平移 10 个单位长度后得到直线 $l:y_1=k_1x+b_1(k_1\neq0)$,l 与反比例函数 $y_2=\dfrac{6}{x}$的图象相交,求使 $y_1<y_2$成立的 x 的取值范围.

第二十七章 相 似

27.1 图形的相似

第1课时 图形的相似(1)

学习目标

1.通过观察生活中的相似图形,理解并掌握相似图形的概念,并会判断两个图形是否相似.
2.了解比例线段的概念,经历利用比例的性质求线段的长度的学习过程.

自主预习·探新知

学习任务一 相似图形

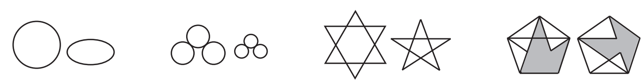
1.形状、大小完全相同的图形是________图形.
2.我们把形状________的图形叫做相似图形.
3.两个图形相似,其中一个图形可以看作由另一个图形________得到.
4.________是相似的一种特殊情况.

学习任务二 成比例线段

对于四条线段 a,b,c,d,如果其中两条线段的比(即它们长度的比)与另两条线段的比________,如 $\frac{a}{b}=$________(即 $ad=$________),我们就说这四条线段成比例,这四条线段叫做成比例线段,简称比例线段.

即时小练

1.下列各组图形相似的是 ( )



A B C D

2.将图27.1-1中的箭头缩小到原来的$\frac{1}{2}$,得到的图形是 ( )

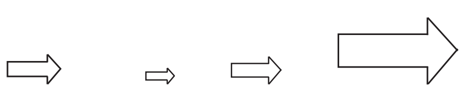


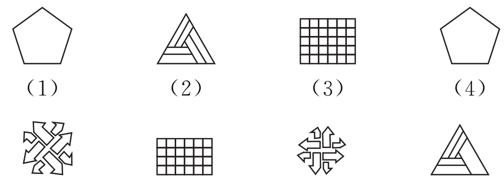
图27.1-1 A B C D

3.已知线段 a,b,c,d 成比例,且 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,其中 $a=8$ cm,$b=2$ cm,$c=12$ cm,则 $d=$________cm.

合作探究·释疑难

要点突破1 相似图形的判断

【例1】图27.1-2中有相似图形吗?若有,请找出来.



(1) (2) (3) (4)
(5) (6) (7) (8)

图27.1-2

解:

规律方法

判断相似图形的三点注意

(1)相似图形一定要形状相同,与它的位置、颜色、大小无关(其大小可能一样,也可能不一样,当形状与大小完全一样时,两个图形就是全等图形,所以全等图形是一种特殊的相似图形).
(2)相似图形不仅仅指平面图形,也包括立体图形,如大小不同的两个正方体也是相似图形.
(3)两个图形相似,其中一个图形可以看成是由另一个图形放大或缩小得到的,而把一个图形的部分拉长或加宽得到的图形和原图形不一定是相似图形.

【变式训练】

1.下列描述中的图形相似的有 ( )
①放大镜下的图片与原来的图片;②幻灯机中的底片与投影在屏幕上的画面;③天空中两朵白云的照片;④卫星上拍摄的长城照片与相机拍摄的长城照片.
A.4组 B.3组 C.2组 D.1组

要点突破2 成比例线段

【例2】已知四条线段的长度,判断它们是不是成比例线段.
(1)$a=12$ cm,$b=6$ cm,$c=4$ cm,$d=8$ cm;
(2)24 mm,10 cm,30 mm,8 cm.
思考1:(1)把第(1)小题中线段 a,b,c,d 按从小到大的顺序排列.

(2)排序后,计算第一、二两条线段的比及第三、四

两条线段的比，并比较比值的大小.

(3)根据计算的结果，得到结论：四条线段________.

思考 2：根据思考 1 中的方法判断第(2)小题，当四条线段的单位不一致时，应先统一单位.

因为 10 cm＝______mm，8 cm＝______mm，所以四条线段按从小到大的顺序排列为____________.

因为$\frac{24}{30}=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$，所以四条线段________.

解：

规律方法

判断四条线段是否成比例的方法

统一单位 → 将四条线段的单位统一

↓

大小排序 → 将四条线段的长度按照由大到小或由小到大排序

↓

计算判断 → 方法1：计算前两个的比与后两个的比，并判断线段是否成比例

方法2：计算首尾两个的积与中间两个的积，并判断线段是否成比例

【变式训练】

2. 下列各组中四条线段成比例的是 (　　)

A.4 cm，2 cm，1 cm，3 cm

B.1 cm，2 cm，3 cm，5 cm

C.3 cm，4 cm，5 cm，6 cm

D.1 cm，2 cm，2 cm，4 cm

3. 已知 b,c,a,d 是成比例线段，其中 $a=4$ cm，$b=3$ cm，$c=10$ cm，则线段 d 的长度为______cm.

4. 在比例尺为 1∶500 的地图上，量得 AB 的长度为 4 cm，则 AB 的实际长度是________m.

要点突破 3 比例的性质

【例 3】 若互不相等的四条线段 a,b,c,d 满足$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，m 为任意实数，则下列关系式中，一定成立的是 (　　)

A.$\frac{a+m}{b+m}=\frac{c+m}{d+m}$　　B.$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{c}$

C.$\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$　　D.$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

思考：可以通过逐一验证来解答本题.由已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$可得等积式________，然后将选项中各项都变形为等积式，化简后看能否得到这个式子.

规律方法

比例的常用性质

(1)比例的基本性质：

若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $ad=bc$；

若 $ad=bc$(a,b,c,d 均不等于 0)，则$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$或$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

(2)比例的其他性质：

①合比性质：若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.

②等比性质：若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$，

则$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{a}{b}(b+d+f+h\neq 0)$.

【变式训练】

5. 已知 $xy=mn$，x,y,m,n 均不等于 0，则把它改写成比例式后，正确的是 (　　)

A.$\frac{x}{n}=\frac{m}{y}$　　B.$\frac{y}{x}=\frac{m}{n}$

C.$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$　　D.$\frac{x}{n}=\frac{y}{m}$

6. (四川成都中考)已知$\frac{a}{6}=\frac{b}{5}=\frac{c}{4}$，且 $a+b-2c=6$，则 a 的值为________.

7. 已知$\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}=\frac{b+c}{a}=k(k\neq 0)$，则 k 的值是________.

达标检测

1. 下列各组线段中，能组成比例线段的是 (　　)

A.5，6，7，8　　B.3，6，2，5

C.2，4，6，8　　D.12，8，15，10

2. 下列判断正确的是 (　　)

A.不全等的三角形一定不是相似三角形

B.不相似的三角形一定不是全等三角形

C.相似三角形一定不是全等三角形

D.全等三角形不一定是相似三角形

3. 显微镜下的标本和放大镜下的同一标本________.(填“相似”或“不相似”)

4. 若$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$，则$\frac{2x+y-z}{x}=$________.

5. 已知线段 $a=0.3$ m,$b=60$ cm,$c=12$ dm.

(1)求线段 a 与线段 b 的比.

(2)如果线段 a,b,c,d 成比例,求线段 d 的长.

(3)b 是 a 和 c 的比例中项吗?为什么?

6. 图 27.1-5 中的图形(a)~(g),哪些与图形①②③相似?

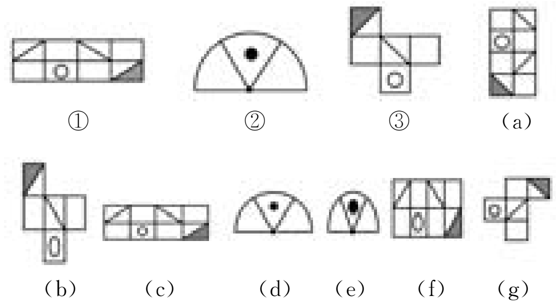


图 27.1-5

分层演练·提素能

基础巩固

1. 在图 27.1-3 中,相似图形的对数为 ( )

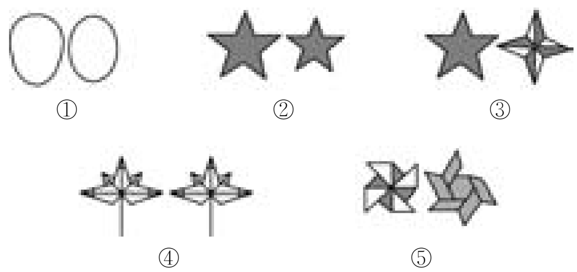


图 27.1-3

A.5　　B.4　　C.3　　D.2

2. 由 $5a=6b(a\neq 0)$,可得比例式 ( )

A. $\frac{b}{6}=\frac{5}{a}$　　B. $\frac{b}{5}=\frac{6}{a}$

C. $\frac{a}{b}=\frac{5}{6}$　　D. $\frac{a-b}{b}=\frac{1}{5}$

3. 下列情形:①用眼睛看和用放大镜看同一个三角形,看到的是相似图形;②用粉笔在黑板上写 1,2,3 三个数字,这三个数字是相似图形;③用粉笔在黑板上写“天”和用毛笔在纸上写“天”,这两个字是相似图形.你认为正确的是________,错误的是________(填序号).

4. 如图 27.1-4,已知点 C 是线段 AB 上的一点,$AC:CB=5:3$,则 $AC:AB=$________,$AB:CB=$________.

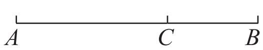


图 27.1-4

5. 已知线段 a,b,c,d 是成比例线段,其中 $a=3$ dm,$b=(x-1)$cm,$c=50$ cm,$d=(x+1)$cm,则 x 的值为________.

7. 已知 $\frac{a}{5}=\frac{b}{7}=\frac{c}{8}$,且 $3a-2b+c=9$,求 $2a+4b-3c$ 的值.

能力提升

8. 已知△ABC 的三边长分别是 a,b,c,且 $(a-c):(a+b):(c-b)=(-2):7:1$,则△$ABC$ 的形状为________.(填“锐角三角形”“直角三角形”或“钝角三角形”)

9. 如图 27.1-6,若点 P 在线段 AB 上,点 O 在线段 AB 的延长线上,$AB=10$,$\frac{AP}{BP}=\frac{AO}{BO}=\frac{3}{2}$,求线段 PO 的长.

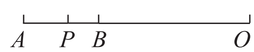


图 27.1-6

拓展创新

10. 有三条线段,它们的长分别为 $a=1$ cm,$b=\sqrt{2}$ cm 和 $c=2$ cm,再添上一条线段,使这四条线段成为比例线段,问:此线段的长为多少?

第 2 课时 图形的相似(2)

学习目标

1. 经历相似多边形图形的认识,会准确判定两个多边形相似.
2. 运用相似多边形的性质进行相关计算,感受数学中的转化思想和方程思想的应用,提高逻辑思维能力.

自主预习·探新知

学习任务 相似多边形的相关概念与性质

1. 相似多边形:两个边数________的多边形,如果它们的角分别________,边________,那么这两个多边形叫做相似多边形.这也是相似多边形的判定方法.
2. 相似比:相似多边形________的比叫做相似比.
3. 相似多边形的性质:由相似多边形的定义可知,相似多边形的对应角________,对应边________.

即时小练

1. 若矩形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似,则四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 一定是 ( )

A. 正方形　　B. 矩形
C. 菱形　　D. 梯形

2. 若五边形 $ABCDE$ 与五边形 $MNOPQ$ 相似,其中 AB 与 MN,AE 与 MQ 为对应边,且 $AB=12$,$MN=6$,$AE=7$,则 $MQ=$________.
3. 图 27.1-7 中的两个多边形相似吗?请说明理由.

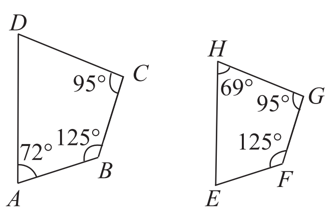


图 27.1-7

合作探究·释疑难

要点突破 1 相似多边形性质的应用

【例 1】如图 27.1-8,已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似,且 $AB/\!/CD$,求出未知边 x,y,z 的长度和 α,β 的度数.

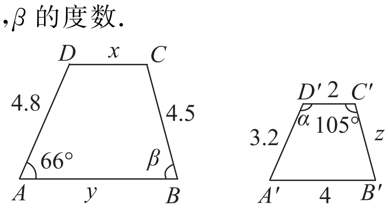


图 27.1-8

解:

规律方法

解决相似多边形计算问题的两种策略

(1)求相似多边形的未知边时,往往根据相似多边形的对应边成比例,借助方程思想求解;
(2)求相似多边形中的未知角时,关键是先找准对应角,再根据相似多边形的对应角相等求解.

【变式训练】

1. 五边形 $ABCDE$ 的边长分别是 2,3,4,5,6,另一个和它相似的五边形 $A'B'C'D'E'$ 的最短边的长为 6,则五边形 $A'B'C'D'E'$ 的最长边的长为__________.
2. 两个相似的四边形如图 27.1-9 所示,求未知边 x,y 的长度和 $\angle C$ 的大小.

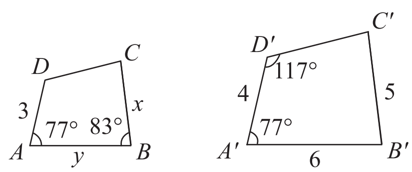


图 27.1-9

要点突破 2 相似多边形的判定

【例 2】如图 27.1-10,矩形 $ABCD$ 的长 BC 为 8 cm,宽 AB 为 6 cm,已知矩形 $ABEF$ 的面积为 21 cm^2,试问:矩形 $ECDF$ 与矩形 $ABCD$ 相似吗?请说明理由.

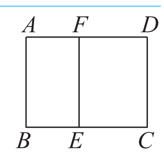


图 27.1-10

解:

规律方法

判断多边形是否相似的两个关键点

要判断两个多边形是否相似，一是看对应角是否相等；二是看对应边是否成比例.解题时不能单凭直观感受来判断，要经过严格的证明后才能下结论.

【变式训练】

3. 如图 27.1-11(示意图)，小林在一块长为 6 m，宽为 4 m，一边靠墙的矩形小花园 $ABCD$ 周围栽种了一种花来装饰，种花区域(阴影部分)的宽为 20 cm，则种花区域的内外边缘所围成的两个矩形相似吗？为什么？

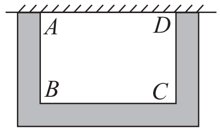


图 27.1-11

达标检测

1. 若如图 27.1-12 所示的两个四边形相似，则∠1 的度数是 (　　)

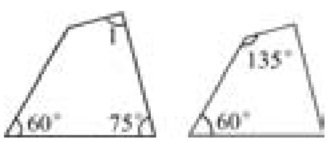


图 27.1-12

A.90°　　B.60°　　C.75°　　D.120°

2. 下列选项中的图形，一定相似的是 (　　)

A.正方形与矩形

B.正方形与菱形

C.菱形与菱形

D.正五边形与正五边形

3. 三个矩形如图 27.1-13 所示，则相似的是 (　　)

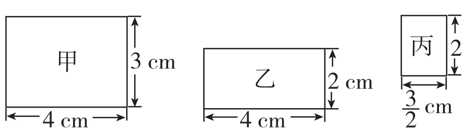


图 27.1-13

A.甲和乙　　B.甲和丙

C.乙和丙　　D.甲、乙和丙

4. 如图 27.1-14，在长为 8 cm、宽为 4 cm 的矩形中，截去一个矩形，使得留下的矩形(图中阴影部分)与原矩形相似，则留下的矩形的面积是________cm^2.

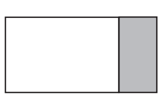


图 27.1-14

5. 已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似，A，B，C，D 的对应点分别为 A_1，B_1，C_1，D_1，且 $A_1B_1:B_1C_1:C_1D_1:D_1A_1=7:8:11:14$，若四边形 $ABCD$ 的周长为 80，求四边形 $ABCD$ 的各边的长.

分层演练·提素能

基础巩固

1. 下列说法正确的是 (　　)

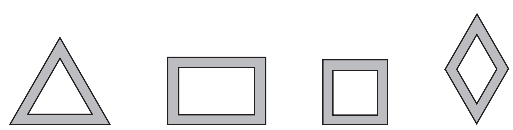
A.对应边都成比例的多边形相似

B.对应角都相等的多边形相似

C.边数相同的正多边形相似

D.矩形都相似

2. 小红利用一些花布的边角料，剪裁后装饰手工画，下面四个图案是她剪裁出的空心等边三角形、矩形、正方形、菱形，若每个图案花边的宽度都相等，则每个图案中花边的内外边缘所围成的几何图形不一定相似的是 (　　)



A　　B　　C　　D

3. 如图 27.1-15，各组图形中相似的是________.

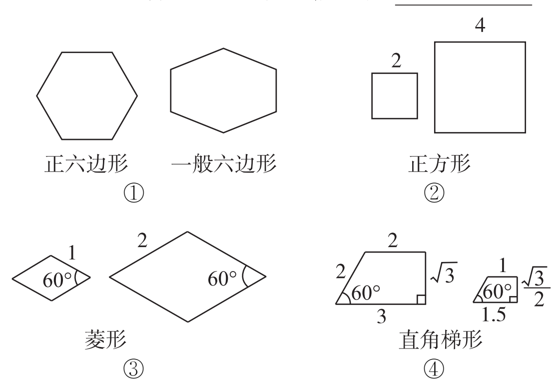


图 27.1-15

4.在一块长和宽分别为 3 m 和 2 m 的矩形塑料板四周镶上木条.已知在长边上镶的木条的宽为 0.5 m,若要使木条内缘围成的矩形与木条外缘围成的矩形相似,则在宽边上镶的木条的宽应是多少?

5.如图 27.1-16,四边形 $ABCD$ 与四边形 $GFEH$ 相似,且 $\angle A=\angle G=70°$,$\angle B=55°$,$\angle E=120°$,$DC=20$,$HE=15$,$HG=21$.

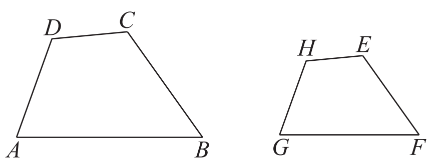


图 27.1-16

(1)写出它们相等的角及对应边的比例式;

(2)求$\angle D$,$\angle F$ 的大小和 AD 的长.

能力提升

6.如图 27.1-17,已知在矩形 $ABCD$ 中,$AB=1$,在 BC 上取一点 E,沿 AE 将$\triangle ABE$ 向上折叠,使点 B 落在 AD 上的点 F 处,若四边形 $ECDF$ 与矩形 $ABCD$ 相似,则 $AD=$ ( )

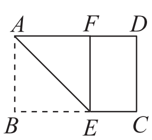


图 27.1-17

A.$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

C.$\sqrt{3}$　　D.2

7.两个相似多边形的最长边的长分别是 10 和 30,其中一多边形的最短边的长为 6,则另一多边形的最短边的长为________.

8.如图 27.1-18,已知$\triangle AEO$ 与$\triangle ABC$ 相似,$\triangle AOF$ 与$\triangle ACD$ 相似,那么四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEOF$ 相似吗?请说明你的理由.

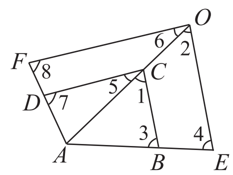


图 27.1-18

拓展创新

9.将一个矩形沿着一条对称轴翻折,如果所得到的矩形与这个矩形相似,那么我们就将这样的矩形定义为"白银矩形".事实上,"白银矩形"在日常生活中随处可见.例如,我们常见的 A4 纸就是一个"白银矩形".请根据上述信息求 A4 纸的较长边与较短边的比值.

27.2 相似三角形

27.2.1 相似三角形的判定

第 1 课时 相似三角形的判定(1)

学习目标

1.经历两个三角形相似的探索过程，体验分析归纳得出数学结论的过程，进一步培养探究、交流能力.
2.掌握平行线分线段成比例的基本事实及推论，并能用其进行简单的证明和计算.
3.掌握基本定理的推导过程，并能利用其判定三角形相似.

自主预习·探新知

学习任务一 相似三角形的概念

1.概念：三个角分别______，三条边______的两个三角形.

2.记法：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，记作 $\triangle ABC$ ______ $\triangle A'B'C'$.

3.相似比：相似三角形______的比.

4.性质：相似三角形的三个角分别______，三条边______.

学习任务二 平行线分线段成比例的基本事实

学习过程

1.如图 27.2.1-1，任意画两条直线 l_1，l_2，再画三条与 l_1，l_2 都相交的平行线 l_3，l_4，l_5，分别度量 l_3，l_4，l_5 在 l_1 上截得的两条线段 AB，BC 和在 l_2 上截得的两条线段 DE，EF 的长度，用“>”“<”或“=”填空：

$\frac{AB}{BC}$______$\frac{DE}{EF}$，$\frac{AB}{AC}$______$\frac{DE}{DF}$，$\frac{AC}{BC}$______$\frac{DF}{EF}$，

$\frac{AB}{DE}$______$\frac{BC}{EF}$，$\frac{AB}{DE}$______$\frac{AC}{DF}$.

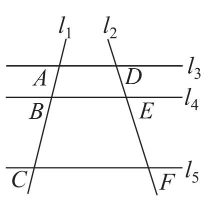


图 27.2.1-1

2.任意平移 l_5 后，上述各式______(填“依然成立”或“不成立”).

探究归纳

两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段______.

学习任务三 平行线分线段成比例基本事实的推论

学习过程

如图 27.2.1-2，$l_3 // l_4 // l_5$.

(1)若直线 l_1，l_2 相交，交点 A 恰好落到 l_3 上(如图 27.2.1-2①)，则 $\frac{AD}{AB}$______$\frac{AE}{AC}$；

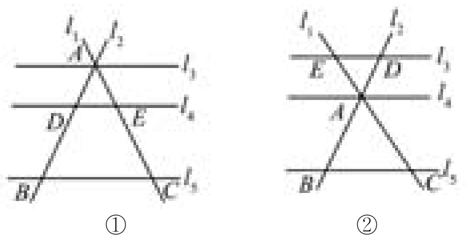


图 27.2.1-2

(2)若直线 l_1，l_2 相交，交点 A 恰好落到 l_4 上(如图 27.2.1-2②)，则 $\frac{AD}{AB}$______$\frac{AE}{AC}$.

探究归纳

平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线)，所得的对应线段______.

学习任务四 利用平行线判定两个三角形相似

学习过程

如图 27.2.1-3，在$\triangle ABC$ 中，$DE // BC$，DE 分别交 AB，AC 于点 D，E，根据条件填空：

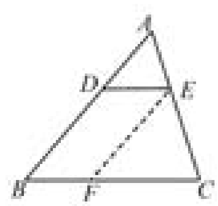


图 27.2.1-3

(1)$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 的对应角______.

(2)如图 27.2.1-3，作辅助线 $EF // AB$，思考下列问题并填空：

①四边形 $BDEF$ 的形状为______，BF = ______；

②$\frac{AD}{AB}$=______=$\frac{DE}{BC}$=______.

(3)$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ ______.

探究归纳

平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形______.

即时小练

1.如图 27.2.1-4，已知 $AB // CD // EF$，那么下列结论正确的是 ( )

A. $\frac{AD}{DF}=\frac{BC}{CE}$

B. $\frac{BC}{CE}=\frac{DF}{AD}$

C. $\frac{CD}{EF}=\frac{BC}{BE}$

D. $\frac{CE}{EF}=\frac{AD}{AF}$

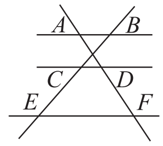


图 27.2.1-4

2.（贵州贵阳中考）如图 27.2.1-5，在△ABC 中，$DE∥BC$，$\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$，$BC=12$，则 DE 的长是　　（　　）

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

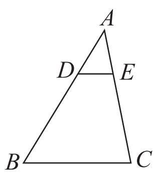


图 27.2.1-5

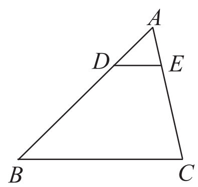


图 27.2.1-6

3.如图 27.2.1-6 所示，已知在△ABC 中，$DE∥BC$，$AD=2$，$BD=5$，$AC=5$，则 $AE=$________.

4.如图 27.2.1-7，判断下面两个三角形是否相似，并说明理由.

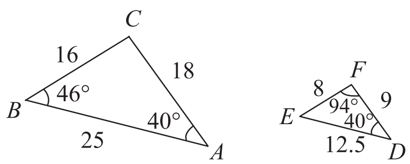


图 27.2.1-7

合作探究 · 释疑难

要点突破 1　平行线分线段成比例的基本事实及其推论的应用

【例 1】如图 27.2.1-8 所示，若 $AE∥CF∥DG$，$AB：BC：CD=1：2：3$，$BG=30$ cm，求 BE 和 FG 的长度.

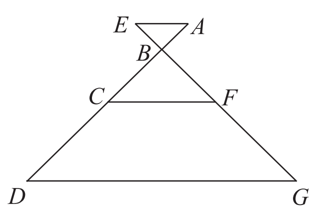


图 27.2.1-8

解：

规律方法

巧记平行线分线段成比例的基本事实中的对应关系

$\frac{上}{下}=\frac{上}{下}$，$\frac{上}{全}=\frac{上}{全}$，$\frac{下}{全}=\frac{下}{全}$（等号的左、右两边各在一条直线上），$\frac{上}{上}=\frac{下}{下}$，$\frac{上}{上}=\frac{全}{全}$，$\frac{下}{下}=\frac{全}{全}$（等号的左、右两边各在两条直线上）.应用时要注意对应关系.

【变式训练】

1.如图 27.2.1-9，已知 $l_1∥l_2∥l_3$，$AB=3$，$BC=5$，$DF=12$.求 DE 和 EF 的长.

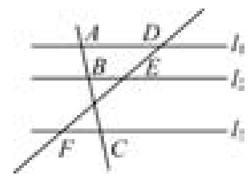


图 27.2.1-9

要点突破 2　利用平行线判定三角形相似

【例 2】如图 27.2.1-10，$DE∥BC$，且 $DB=AE$，若 $AB=5$，$AC=10$.

(1)求 AE 的长；

(2)求 $\frac{DE}{BC}$ 的值.

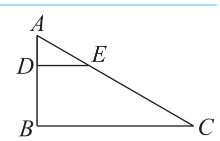


图 27.2.1-10

思考 1：由 $DE∥BC$，得△________∽△________，所以 $\frac{AE}{AC}=$________.设 AE 的长为 x，由 $DB=AE$，得 $DB=$________，从而 $AD=$________，根据比例式即可求出 AE 的长.

思考 2：利用“相似三角形对应边的比________”可求出 $\frac{DE}{BC}$ 的值.

解：

解后反思

当三角形中出现平行线时，可以利用相似三角形建立比例式求线段的长，这个过程体现了数学中由形到数的转化思想.

【变式训练】

2. 如图 27.2.1-11，$DE // BC$，$DF // AC$，$AD=4$ cm，$BD=8$ cm，$DE=5$ cm，求线段 BF 的长.

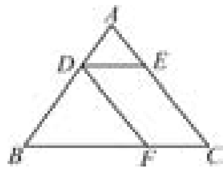


图 27.2.1-11

达标检测

1. 如图 27.2.1-12，已知直线 $a//b//c$，直线 m，n 与 a，b，c 分别交于点 A，C，E，B，D，F，$AC=4$，$CE=6$，$BD=3$，则 $BF=$（　　）

A.7　　B.7.5　　C.8　　D.8.5

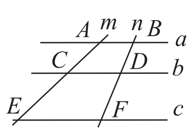


图 27.2.1-12

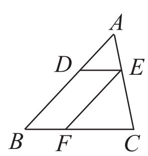


图 27.2.1-13

2. 如图 27.2.1-13，已知在△ABC 中，点 D，E，F 分别是边 AB，AC，BC 上的点，$DE//BC$，$EF//AB$，且 AD∶$DB=3$∶5，那么 CF∶CB 等于（　　）

A.5∶8　　B.3∶8

C.3∶5　　D.2∶5

3. 如图 27.2.1-14，$l_1//l_2//l_3$，则 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{(\quad)}{PH}=\dfrac{DE}{(\quad)}$.

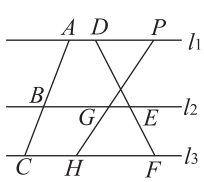


图 27.2.1-14

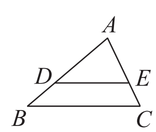


图 27.2.1-15

4. 如图 27.2.1-15，DE 与△ABC 的边 AB，AC 分别相交于点 D，E，且 $DE//BC$. 若 $DE=2$ cm，$BC=3$ cm，$EC=\dfrac{2}{3}$ cm，则 $AC=$________cm.

5. 如图 27.2.1-16，在▱$ABCD$ 中，$EF//AB$，DE∶$EA=2$∶3，$EF=4$，求 CD 的长.

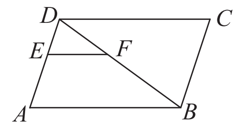


图 27.2.1-16

分层演练·提素能

基础巩固

1. 如图 27.2.1-17，已知 AD 与 BC 相交于点 O，$AB//CD$，则（　　）

A.△AOB∽△COD　　B.△AOB∽△DOC

C.△ABO∽△CDO　　D.△ABO∽△DOC

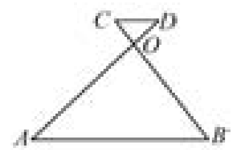


图 27.2.1-17

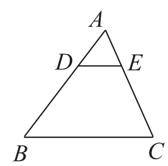


图 27.2.1-18

2.（浙江杭州中考）如图 27.2.1-18，在△ABC 中，点 D，E 分别在边 AB，AC 上，$DE//BC$，若 $BD=2AD$，则（　　）

A.$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{2}$　　B.$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{1}{2}$

C.$\dfrac{AD}{EC}=\dfrac{1}{2}$　　D.$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{2}$

3.（黑龙江哈尔滨中考）如图 27.2.1-19，在△ABC 中，D，E 分别为 AB，AC 边上的点，$DE//BC$，点 F 为 BC 边上一点，连接 AF 交 DE 于点 G，则下列结论中一定正确的是（　　）

A.$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{EC}$　　B.$\dfrac{AG}{GF}=\dfrac{AE}{BD}$

C.$\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{CE}{AE}$　　D.$\dfrac{AG}{AF}=\dfrac{AC}{EC}$

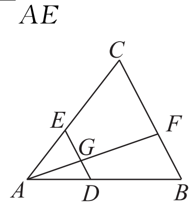


图 27.2.1-19

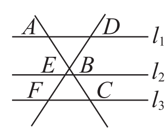


图 27.2.1-20

4. 如图 27.2.1-20，$l_1//l_2//l_3$，两条直线与这三条平行线分别交于点 A，B，C 和 D，E，F，已知 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{2}$，则 $\dfrac{DE}{DF}=$________.

5.如图 27.2.1-21，已知△AOB∽△DOC，$OA=2$，$AD=9$，$OB=5$，$DC=12$，∠$A=58°$，求 AB，OC 的长和∠D 的度数.

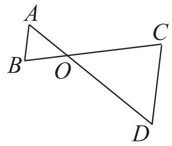


图 27.2.1-21

6.如图 27.2.1-22，如果菱形 $BEFD$ 的顶点 E，F，D 在△ABC 的边上，且 $AB=18$，$AC=BC=12$，求菱形 $BEFD$ 的周长.

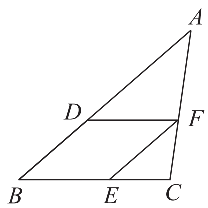


图 27.2.1-22

能力提升

7.如图 27.2.1-23，在△ABC 中，$AC=9$，$AB=6$，点 D 与点 A 在直线 BC 的同侧，且∠ACD=∠ABC，$CD=3$，点 E 是线段 BC 延长线上的动点.当△ABC 和△DCE 相似时，线段 CE 的长为________.

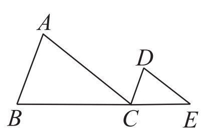


图 27.2.1-23

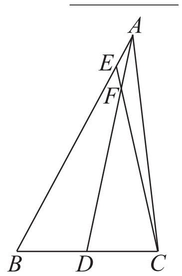


图 27.2.1-24

8.如图 27.2.1-24 所示，AD 是△ABC 的中线，F 是 AD 上一点，CF 的延长线交 AB 于点 E，若 $AF:FD=1:3$，则 $AE:AB=$________.

9.如图 27.2.1-25，延长正方形 $ABCD$ 的一边 CB 至点 E，ED 与 AB 相交于点 F，过点 F 作 FG∥BE 交 AE 于点 G，求证：$GF=FB$.

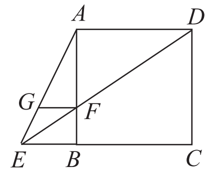


图 27.2.1-25

拓展创新

10.如图 27.2.1-26，在矩形 $ABCD$ 中，已知 AC，BD 相交于点 O，$OE⊥BC$ 于点 E，连接 DE，交 OC 于点 F，过点 F 作 $FG⊥BC$ 于点 G.

(1)求证：点 G 是线段 BC 的一个三等分点；

(2)请你仿照上面的画法，在原图上画出 BC 的一个四等分点.(描述画法，不必写证明过程)

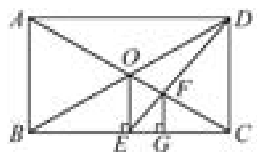


图 27.2.1-26

第 2 课时 相似三角形的判定(2)

学习目标

1.经历两个三角形相似的探索过程,体验用类比、实验操作、分析归纳得出数学结论的过程.

2.掌握“三边成比例的两个三角形相似”和“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”的判定定理.

自主预习·探新知

学习任务一 利用三边判定三角形相似的定理

学习过程

1.如图 27.2.1-27,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,$DE=2AB$,$EF=2BC$,$DF=2AC$.测量两个三角形的三个角,可以发现它们分别______.由此得到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的关系是______.

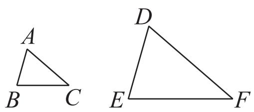


图 27.2.1-27

2.改变 $\triangle DEF$ 三边的长度,使它们分别是 $\triangle ABC$ 三边长的 k 倍,此时两个三角形的角分别________,这两个三角形的关系是________.

3.猜想:三边成比例的两个三角形________.

4.验证猜想:

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中,$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$,在求证 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ 的过程中,在线段 $A'B'$(或它的延长线)上截取 $A'D=AB$,过点 D 作 $DE\parallel B'C'$,交 $A'C'$(或它的延长线)于点 E.根据平行于三角形一边的直线和其他两边相交,所构成的三角形与原三角形相似,可得 $\triangle A'DE\backsim\triangle A'B'C'$.

所以 $\dfrac{A'D}{A'B'}=$________$=$________.

又因为 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$,$A'D=AB$,

所以 $\dfrac{DE}{B'C'}=$________,$\dfrac{A'E}{A'C'}=$________.

所以 $DE=$______,$A'E=$______.

所以 $\triangle A'DE\cong\triangle ABC$.

所以________________.

探究归纳

三边______的两个三角形相似.

学习任务二 利用两边和夹角判定三角形相似的定理

1.定理:两边________且夹角________的两个三角形相似.

2.符号表示:如图 27.2.1-27,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

因为 $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}$,$\angle A=$______,

所以 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

即时小练

1.如果一个三角形的三边长分别为 5,6,7,另外一个三角形的三边长分别为 24,28,20,那么这两个三角形________.(填“相似”或“不相似”)

2.在 $\triangle ABC$ 中,点 D,E,F 分别是 AB,BC,CA 的中点,求证:$\triangle ABC\backsim\triangle EFD$.

3.如图 27.2.1-28,已知 $AB\cdot AE=AD\cdot AC$,且 $\angle 1=\angle 2$,求证:$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

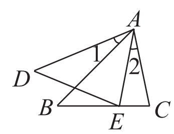


图 27.2.1-28

合作探究·释疑难

要点突破 1 利用三边成比例判定两个三角形相似

【例 1】如图 27.2.1-29,网格图中每个方格都是边长为 1 的正方形.若 A,B,C,D,E,F 都是格点,求证:$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

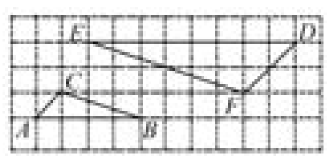


图 27.2.1-29

思考 1:如何在网格中求格点三角形的边长?

思考2:求出三角形的各边长后,如何判定两三角形相似?

证明:

规律方法

利用三边判断两个三角形是否相似的三个步骤

排序 ⇒ 将两个三角形的边分别按大小顺序排列

计算 ⇒ 分别计算边长的比值

判断 ⇒ 通过比值是否相等判断两个三角形是否相似

【变式训练】

1. 如图27.2.1-30,$A(1,0)$,$B(3,0)$,$C(0,3)$,$D(2,-1)$,$P(2,2)$.

(1)$\triangle ABC$与$\triangle ADP$相似吗?请说明理由.

(2)在图中标出点D关于y轴的对称点D',连接AD',CD',判断$\triangle ACD'$的形状,并说明理由.

(3)求$\angle OCA+\angle OCD$的度数.

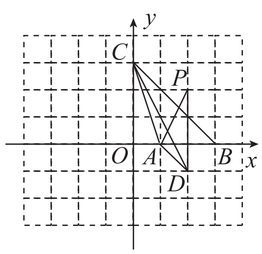


图27.2.1-30

要点突破2 利用两边成比例且夹角相等判定两个三角形相似

【例2】 如图27.2.1-31,在$\triangle ABC$中,点D,E分别是$\triangle ABC$的边AB,AC上的点,且$AD=CE=3$,$AE=6$,$BD=15$,根据以上条件,你认为$\angle B=\angle AED$吗?为什么?

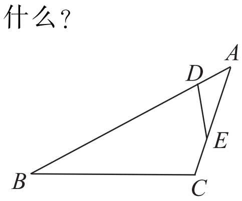


图27.2.1-31

思考1:$\angle B$和$\angle AED$分别在哪两个三角形中?

思考2:我们可以通过证明什么得到$\angle B=\angle AED$?

思考3:要证明思考2中的结论,题目中隐含了什么条件?还缺什么条件?

思考4:怎样能得出缺少的条件?

解:

规律方法

利用两边成比例且夹角相等判定三角形相似的两点注意

(1)角:相等的角必须是两组对应边的夹角.

(2)边:夹角的两边要注意对应,即长边与长边对应,短边与短边对应.

【变式训练】

2. 如图27.2.1-32,P为$\triangle ABC$的中线AD上的一点,且$BD^2=PD\cdot AD$,求证:$\triangle ADC\backsim\triangle CDP$.

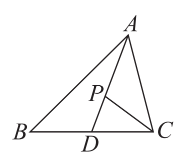


图27.2.1-32

达标检测

1. 如图 27.2.1-33，不等长的两条对角线 AC，BD 相交于点 O，且将四边形 $ABCD$ 分成甲、乙、丙、丁四个三角形.若 $OA:OC=OB:OD=1:2$，则关于这四个三角形的关系，下列叙述正确的是 ( )

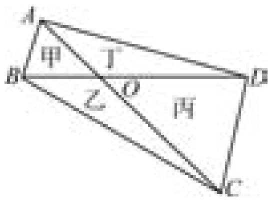


图 27.2.1-33

A.甲、丙相似，乙、丁相似
B.甲、丙相似，乙、丁不相似
C.甲、丙不相似，乙、丁相似
D.甲、丙不相似，乙、丁不相似

2. 已知△ABC 的三边长分别为 6 cm，7.5 cm，9 cm，△DEF 的一边长为 4 cm，当△DEF 的另两边长是下列哪一组时，这两个三角形相似 ( )

A.2 cm，3 cm　　B.4 cm，5 cm
C.5 cm，6 cm　　D.6 cm，7 cm

3. 图 27.2.1-34 中的两个三角形是否相似？为什么？

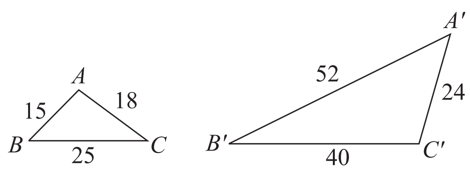


图 27.2.1-34

4. 如图 27.2.1-35，E 是四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点，且 $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$，$\angle BAE=\angle CAD$.

求证：△ABC∽△AED.

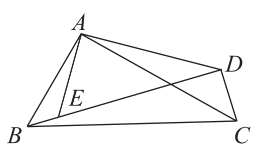


图 27.2.1-35

分层演练·提素能

基础巩固

1. 如图 27.2.1-36 所示，能使△ABC∽△ACD 的条件是 ( )

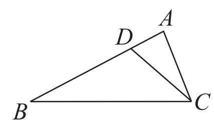


图 27.2.1-36

A.$\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BC}$　　B.$\frac{BC}{AC}=\frac{CD}{AD}$
C.$CD^2=AD\cdot DB$　　D.$AC^2=AD\cdot AB$

2. 如果一个直角三角形的两条边长分别是 6 和 8，另一个与它相似的直角三角形边长分别是 3，4 及 x，那么 x 的值 ( )

A.只有 1 个　　B.可以有 2 个
C.可以有 3 个　　D.有无数个

3. 如图 27.2.1-37，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，如果要使△ABC∽△DCA，那么还要补充的一个条件是__________(只要写出一个条件即可).

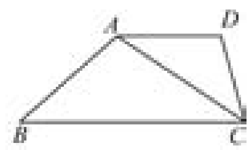


图 27.2.1-37

4. 如图 27.2.1-38，判断每组中的三角形是否相似.

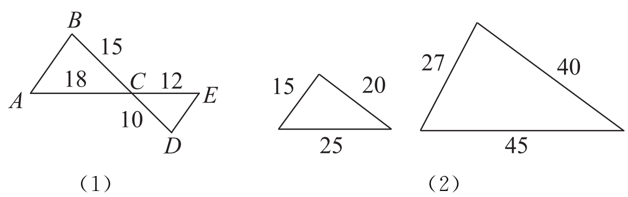


图 27.2.1-38

5. 如图 27.2.1-39 所示，已知 $\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}=\frac{CA}{ED}$.

求证：$\angle ABD=\angle CBE$.

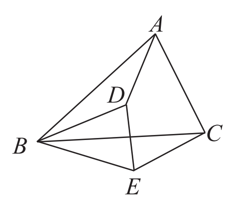


图 27.2.1-39

6. 如图 27.2.1-40，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle ACD$，$AB=6$，$BC=4$，$AC=5$，$CD=7.5$，求 AD 的长.

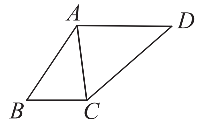


图 27.2.1-40

7. 如图 27.2.1-41 所示，在 4×4 的正方形方格中，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的顶点都在边长为 1 的小正方形的顶点上.

(1) $\angle ABC=$________，$BC=$________；

(2) 判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是否相似，并证明你的结论.

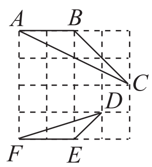


图 27.2.1-41

能力提升

8. 如图 27.2.1-42，在 $\triangle ABC$ 中，$CD\perp AB$ 于点 D. 下列条件：① $BC^2=BD\cdot BA$；② $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$；③ $CD^2=AD\cdot BD$. 其中能证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是________.（填序号）

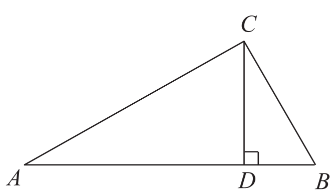


图 27.2.1-42

9. 如图 27.2.1-43，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=16\text{ cm}$，$AC=12\text{ cm}$，点 P 从点 B 出发，沿 BC 以 2 cm/s 的速度向点 C 移动，点 Q 从点 C 出发，以 1 cm/s 的速度向点 A 移动，若点 P，Q 分别从点 B，C 同时出发，设运动时间为 t s，当 t 取何值时，$\triangle CPQ$ 与 $\triangle CBA$ 相似？

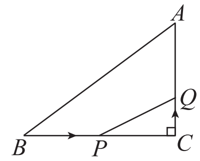


图 27.2.1-43

拓展创新

10. 如图 27.2.1-44，四边形 $ABCD$、四边形 $CDEF$ 和四边形 $EFGH$ 是边长相等的正方形.

(1) $\triangle ACF$ 与 $\triangle GCA$ 相似吗？说说你的理由.

(2) 求 $\angle 1+\angle 2$ 的度数.

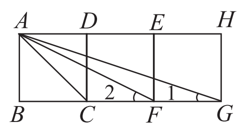


图 27.2.1-44

第3课时 相似三角形的判定(3)

学习目标

1. 回顾已学的三角形相似的判定方法，继续探索其他判定两个三角形相似的方法，发展探究、交流能力.
2. 掌握“两角分别相等的两个三角形相似”和直角三角形相似的特殊判定方法.
3. 能够运用三角形相似的条件解决简单的问题.

自主预习·探新知

学习任务一 利用两角分别相等判定三角形相似的定理

学习过程

1. 我们已经学过的判定两个三角形相似的方法有：

(1)______________________________________；

(2)____；

(3)______________________________________；

(4)______________________________________.

2. 如图27.2.1-45，在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$.

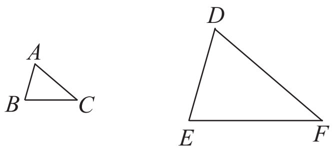


图27.2.1-45

测量计算得$\frac{AB}{DE}$，$\frac{BC}{EF}$，$\frac{AC}{DF}$的值________，由此猜想这两个三角形的关系是________.

3. 验证猜想：如图27.2.1-46，在DE上截取$DM=AB$，过点M作$MN\parallel EF$，交DF于点N.

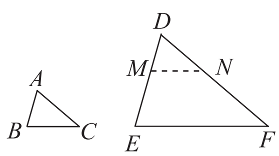


图27.2.1-46

所以$\triangle DMN\backsim\triangle DEF$，$\angle DMN=$________.

又因为$\angle B=\angle E$，所以$\angle B=\angle DMN$.

又因为$\angle A=\angle D$，$AB=DM$，

所以$\triangle ABC\cong$________.

所以$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

探究归纳

两角________的两个三角形相似.

学习任务二 直角三角形相似的判定

由三角形相似的条件，我们可以类比出判定两个直角三角形相似的三种方法：

(1)有________对应相等的两个直角三角形相似.

(2)两组________对应成比例的两个直角三角形相似.

(3)________等于________的两个直角三角形相似.

即时小练

1. 判断对错(正确的画“√”，错误的画“×”).

(1)所有的等腰三角形都相似.　(　　)

(2)所有的等边三角形都相似.　(　　)

(3)所有的等腰直角三角形都相似.　(　　)

(4)所有的直角三角形都相似.　(　　)

2. 如图27.2.1-47，$\angle C=\angle ABD=90°$，$AB^2=AC\cdot AD$，则$\triangle ACB$与$\triangle ABD$________(填“相似”或“不相似”).

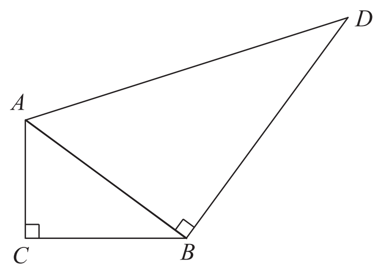


图27.2.1-47

3. 如图27.2.1-48，弦AB和CD相交于$\odot O$内一点P，求证：$PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

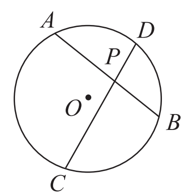


图27.2.1-48

合作探究·释疑难

要点突破1 应用两角分别相等判定三角形相似

【例1】如图27.2.1-49，在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中，$\angle BAD=\angle CAE$，$\angle ABC=\angle ADE$.

(1)写出图中两对相似三角形(不得添加辅助线)；

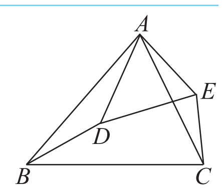


图27.2.1-49

(2)分别证明(1)中两对三角形相似.

思考:由$\angle BAD=\angle CAE$,得$\angle BAC=$________.又因为$\angle ABC=\angle ADE$,所以$\triangle$________$\backsim\triangle$________.由相似三角形的对应边成比例,得$\frac{AB}{AD}=$________,即$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$.又因为$\angle BAD=\angle CAE$,所以$\triangle$________$\backsim\triangle$________.

解:

【一题多变】

此题中如果已知$\triangle ABD\backsim\triangle ACE$,如何证明$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$?

规律方法

由角判定两三角形相似的基本图形

(1)平行线型(如图27.2.1-50①②):若$DE\parallel BC$,则$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

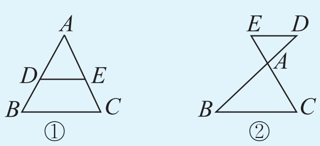


图27.2.1-50

(2)相交线型(如图27.2.1-51①②):若$\angle AED=\angle B$,则$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$.

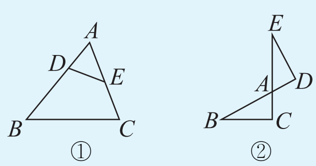


图27.2.1-51

(3)"子母"型(如图27.2.1-52①②):若$\angle ACD=\angle B$,则$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$.

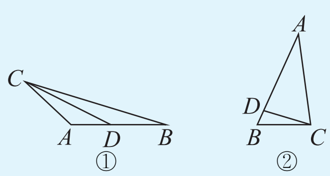


图27.2.1-52

【变式训练】

1.(浙江杭州中考)如图27.2.1-53,在锐角三角形ABC中,点D,E分别在边AC,AB上,$AG\perp BC$于点G,$AF\perp DE$于点F,$\angle EAF=\angle GAC$.

(1)求证:$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$;

(2)若$AD=3$,$AB=5$,求$\frac{AF}{AG}$的值.

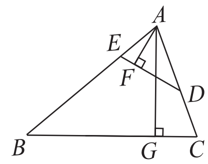


图27.2.1-53

要点突破2 直角三角形相似的判定

【例2】如图27.2.1-54,在$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle A'B'C'$中,$\angle ACB=\angle A'C'B'=90°$,$CD$,$C'D'$分别是两个三角形斜边上的高,且$CD:C'D'=AC:A'C'$.

证明:$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

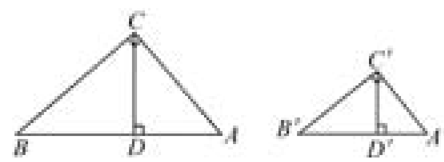


图27.2.1-54

思考1:要证明$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$,需证明什么?

思考2:要证明思考1中的条件,需证明什么?条件是否具备?

证明:

规律方法

判定直角三角形相似的常用思路

(1)找角:找直角三角形的一组锐角对应相等.

(2)找边:①找两组直角边的比对应相等;②找斜边的比和一组直角边的比相等.

【变式训练】

2.(江西中考)如图 27.2.1-55,在正方形 $ABCD$ 中,点 E,F,G 分别在 AB,BC,CD 上,且 $\angle EFG=90°$.求证:$\triangle EBF\backsim\triangle FCG$.

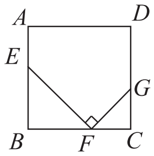


图 27.2.1-55

达标检测

1.如图 27.2.1-56,在 $\triangle ABC$ 中,AE 交 BC 于点 D,$\angle C=\angle E$,$AD=4$,$BC=8$,$BD:DC=5:3$,则 DE 的长等于 ( )

A.$\frac{20}{3}$　　B.$\frac{15}{4}$　　C.$\frac{16}{3}$　　D.$\frac{17}{4}$

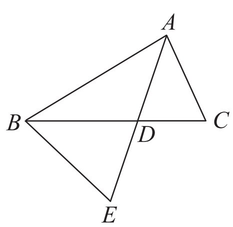


图 27.2.1-56

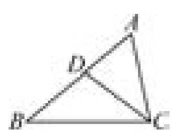


图 27.2.1-57

2.如图 27.2.1-57 所示,给出下列条件:①$\angle B=\angle ACD$;②$\angle ADC=\angle ACB$;③$\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BC}$;④$AC^2=AD\cdot AB$.其中能够单独判定 $\triangle ABC\backsim\triangle ACD$ 的个数为 ( )

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

3.如图 27.2.1-58,BA 与 DC 的延长线交于点 P,AD,BC 相交于点 E,则图中相似三角形共有________对.

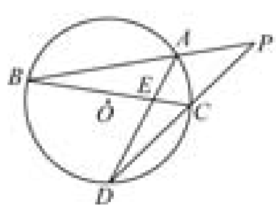


图 27.2.1-58

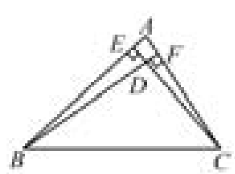


图 27.2.1-59

4.如图 27.2.1-59,锐角三角形 ABC 的边 AB,AC 上的高线 CE 和 BF 相交于点 D,请写出图中的两对相似三角形:________________(用相似符号连接).

5.如图 27.2.1-60,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=80°$,$\angle BAC=40°$,AB 的垂直平分线分别与 AC,AB 交于点 D,E,连接 BD.求证:$\triangle ABC\backsim\triangle BDC$.

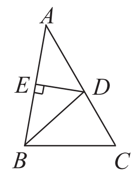


图 27.2.1-60

分层演练·提素能

基础巩固

1.如图 27.2.1-61(示意图),铁道口的栏杆短臂 OB 长 1 m,长臂 OD 长 16 m,当短臂端点下降 0.5 m 时,长臂端点升高 ( )

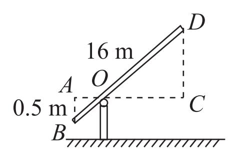


图 27.2.1-61

A.8 m　　B.16 m　　C.4 m　　D.1 m

2.下列四组条件中,能判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似的是 ( )

A.$\angle A=45°$,$\angle B=55°$;$\angle D=45°$,$\angle F=75°$

B.$AB=5$,$BC=4$,$\angle A=45°$;$DE=5$,$EF=4$,$\angle D=45°$

C.$AB=6$,$BC=5$,$\angle B=40°$;$DE=5$,$EF=6$,$\angle E=40°$

D.$AB=BC$,$\angle A=50°$;$DE=EF$,$\angle E=50°$

3.如图 27.2.1-62,$\angle 1=\angle 2=\angle 3$,则图中相似三角形共有 ( )

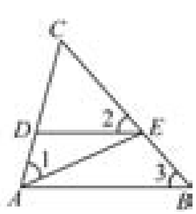


图 27.2.1-62

A.1 对　　B.2 对　　C.3 对　　D.4 对

4. 如图 27.2.1-63，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，若 $CD\perp AB$，则图中的相似三角形共有________对.

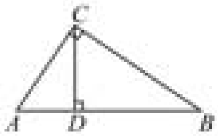


图 27.2.1-63

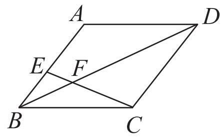


图 27.2.1-64

5. 如图 27.2.1-64，在▱$ABCD$ 中，E 在 AB 上，CE，DB 交于点 F，若 $AE:BE=4:3$，且 $BF=2$，则 $DF=$________.

6. 如图 27.2.1-65，在四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle DAB$，$\angle ADC=\angle ACB=90^\circ$，$E$ 为 AB 的中点.

(1)求证：$AC^2=AB\cdot AD$；

(2)求证：$CE\parallel AD$；

(3)若 $AD=4$，$AB=6$，求$\dfrac{AC}{AF}$的值.

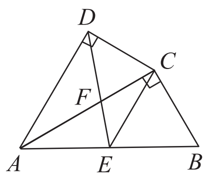


图 27.2.1-65

能力提升

7. 如图 27.2.1-66，在边长为 9 的等边三角形 ABC 中，$BD=3$，$\angle ADE=60^\circ$，则 AE 的长为________.

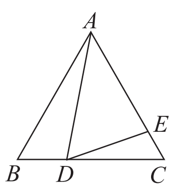


图 27.2.1-66

8. 请设计三种不同的分法，将如图 27.2.1-67 所示的直角三角形分割成与原三角形都相似的四个小三角形(画图工具不限，要求画出分割线段，标出能够说明分法的必要记号，不要求证明，不要求写出画法).

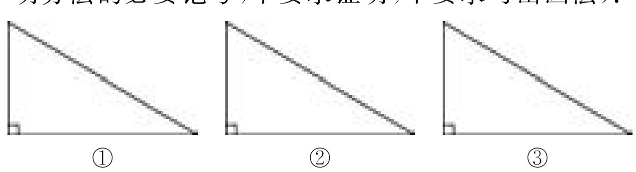


图 27.2.1-67

9. 如图 27.2.1-68，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$DA\perp AB$，$CD=2$，$AB=3$，$AD=7$.在 AD 上能否找到一点 P，使△PAB 和△PCD 相似？若能，共有几个符合条件的点 P？请求出相应 PD 的长；若不能，请说明理由.

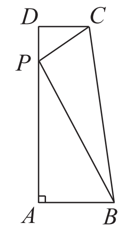


图 27.2.1-68

拓展创新

10. 已知在四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 边上的点，DE 与 CF 交于点 G.

(1)如图 27.2.1-69①，若四边形 $ABCD$ 是矩形，且 $DE\perp CF$，求证：$\dfrac{DE}{CF}=\dfrac{AD}{CD}$.

(2)如图 27.2.1-69②，若四边形 $ABCD$ 是平行四边形，试探究：当$\angle B$ 与$\angle EGC$ 满足什么关系时，$\dfrac{DE}{CF}=\dfrac{AD}{CD}$成立？请证明你的结论.

(3)如图 27.2.1-69③，若 $BA=BC=6$，$DA=DC=8$，$\angle BAD=90^\circ$，$DE\perp CF$，请直接写出$\dfrac{DE}{CF}$的值.

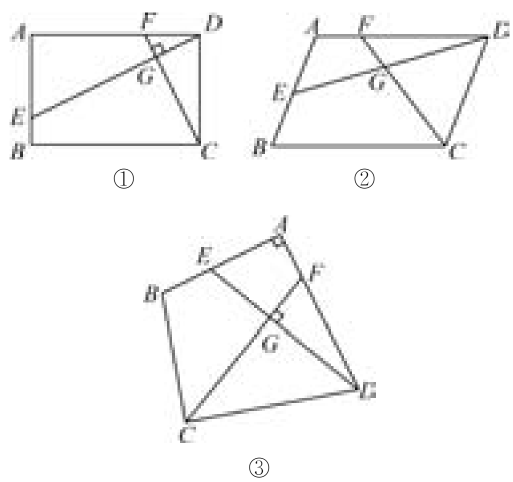


图 27.2.1-69

27.2.2 相似三角形的性质

学习目标

1.经历探索相似三角形性质的过程，了解并掌握相似三角形对应线段的比等于相似比，周长的比等于相似比，面积的比等于相似比的平方.

2.通过把多边形转化成三角形，体会转化思想在几何中的作用，同时感受从特殊到一般的认识问题的方法.

自主预习·探新知

学习任务一 相似三角形对应线段的比

学习过程

如图 27.2.2-1 所示，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为 k，分别作$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$的高 AD 和 $A'D'$.

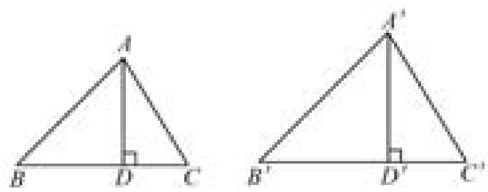


图 27.2.2-1

因为$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，

所以$\angle B=\angle B'$.

又因为$\triangle ABD$ 和$\triangle A'B'D'$都是直角三角形，

所以$\triangle ABD\backsim\triangle$________.

所以$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=$________.

类似地，可以证明相似三角形对应中线的比、对应角平分线的比也等于相似比.

探究归纳

相似三角形对应高的比、对应中线的比与对应角平分线的比都等于________，即相似三角形对应线段的比等于________.

学习任务二 相似图形的周长比和面积比

学习过程

已知：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$的相似比为 k.

(1)$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$周长的比和相似比 k 有何关系？

提示：因为$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，

所以$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}=k$，

所以 $AB=kA'B'$，$BC=$________，$AC=$________，

所以$\dfrac{\triangle ABC\text{的周长}}{\triangle A'B'C'\text{的周长}}=\dfrac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'}=\dfrac{kA'B'+kB'C'+kA'C'}{A'B'+B'C'+A'C'}=\dfrac{k(A'B'+B'C'+A'C')}{A'B'+B'C'+A'C'}=k$.

(2)$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$的面积之比也是 k 吗？如果不是，有什么关系呢？

(3)对于两个相似的多边形，可以转换为相似三角形的问题，得到它们的周长的比与面积的比.

探究归纳

1.相似三角形的周长比等于________，面积比等于________.

2.相似多边形的周长比等于________，面积比等于________.

即时小练

1.等腰三角形 ABC 和等腰三角形 DEF 相似，其相似比为 3∶4，则它们对应边上高的比为 ( )

A.3∶4　　B.4∶3

C.1∶2　　D.2∶1

2.(四川内江中考)已知$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$相似，且相似比为 1∶3，则$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$的面积比为 ( )

A.1∶1　　B.1∶3　　C.1∶6　　D.1∶9

3.若$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，$\triangle ABC$ 的面积为 81 cm^2，$\triangle DEF$ 的面积为 36 cm^2，且 $AB=12$ cm，则 $DE=$________cm.

合作探究·释疑难

要点突破 1 相似三角形中对应线段的比

【例 1】如图 27.2.2-2，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=45°$，$BC=10$，高 $AD=8$，矩形 $EFPQ$ 的一边 QP 在 BC 边上，E，F 两点分别在 AB，AC 上，AD 交 EF 于点 H.

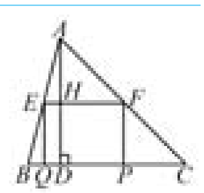


图 27.2.2-2

(1)求证：$\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{EF}{BC}$.

(2)设 $EF=x$，当 x 为何值时，矩形 $EFPQ$ 的面积

最大？请求出最大值.

思考 1：要证 $\frac{AH}{AD}=\frac{EF}{BC}$，可证△________∽△________.由四边形 $EFPQ$ 是矩形，得________∥________，从而可得________∽________.

思考 2：先由 $\frac{AH}{AD}=\frac{EF}{BC}$，$BC=10$，$AD=8$，$EF=x$ 可得，$AH=$________，再根据矩形 $EFPQ$ 的面积 $=EF\cdot EQ=EF\cdot HD=EF\cdot(AD-AH)$ 列出函数关系式，配方求最大值即可.

证明：

规律方法

运用相似三角形对应边上的高时的两点注意

(1)常见图形：相似三角形对应边上高的比常见图形如图 27.2.2-3 所示，即三角形中存在一个矩形.

(2)方法：利用相似三角形对应边上高的比等于相似比列方程求解.

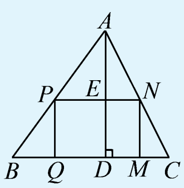


图 27.2.2-3

【变式训练】

1. 如图 27.2.2-4，电灯 P 在横杆 AB 的正上方，AB 在灯光下的影子为 CD，$AB\parallel CD$，$AB=2$ m，$CD=5$ m，点 P 到 CD 的距离是 3 m，则点 P 到 AB 的距离是________m.

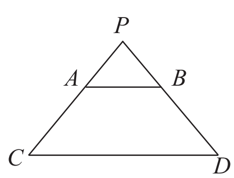


图 27.2.2-4

2. 两个相似三角形的一组对应边的长分别是 6 cm 和 8 cm，如果它们对应的两条角平分线的和为 42 cm，那么这两条角平分线的长分别是多少？

要点突破 2　相似图形的周长和面积

【例 2】 如图 27.2.2-5，在▱$ABCD$ 中，点 E 是 AB 的中点.

(1)求 △EFB 与 △CFD 的周长比；

(2)如果 $S_{\triangle EFB}=9\ \mathrm{cm}^2$，求 $S_{\triangle CFD}$.

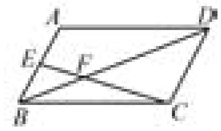


图 27.2.2-5

解：

规律方法

相似图形的周长与面积的求解

(1)常见图形结构："A"型图与"X"型图，应用平行线构造相似三角形，常与平行四边形联系在一起.

(2)解题关键：①准确把握相似三角形的周长的比与面积的比和相似比的关系；②掌握同底等高或等底同高的三角形面积之间的相等关系.

【变式训练】

3. 已知在△ABC 中，$AB=15$ cm，$BC=20$ cm，$AC=25$ cm，与它相似的△$A'B'C'$ 的最长边 $A'C'=50$ cm，求△$A'B'C'$ 的周长和面积.

达标检测

1. (江苏连云港中考)如图 27.2.2-6，已知△ABC∽△DEF，$AB:DE=1:2$，则下列等式一定成立的是　　(　　)

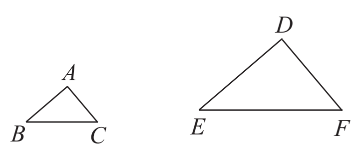


图 27.2.2-6

A. $\frac{BC}{DF}=\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\angle A\text{ 的度数}}{\angle D\text{ 的度数}}=\frac{1}{2}$

C. $\frac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle DEF\text{ 的面积}}=\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\triangle ABC\text{ 的周长}}{\triangle DEF\text{ 的周长}}=\frac{1}{2}$

2. 如图 27.2.2-7，在▱$ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，连接 BE 并延长，交 CD 的延长线于点 F，则△EDF 与△BCF 的周长之比是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

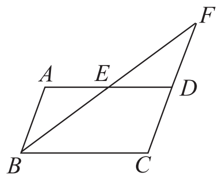


图 27.2.2-7

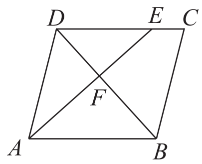


图 27.2.2-8

3. 如图 27.2.2-8，在▱$ABCD$ 中，点 E 在边 DC 上，$DE:EC=3:1$，连接 AE 交 BD 于点 F，则△DEF 的面积与△BAF 的面积的比值为________.

4. 如图 27.2.2-9 所示，$PN\parallel BC$，$AD\perp BC$ 交 PN 于点 E，交 BC 于点 D.

(1)若 $AP:PB=1:2$，$S_{\triangle ABC}=18$，求 $S_{\triangle APN}$；

(2)若 $S_{\triangle APN}:S_{四边形PBCN}=1:2$，求 $\frac{AE}{AD}$ 的值.

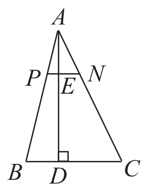


图 27.2.2-9

分层演练·提素能

基础巩固

1. 如图 27.2.2-10，已知△ADE∽△ABC，且 $AD:DB=2:1$，则 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=$（　　）

A. 2∶1　　B. 4∶1

C. 2∶3　　D. 4∶9

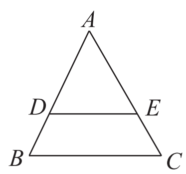


图 27.2.2-10

2. 把一个多边形变换成和它相似的多边形，并且面积缩小为原来的 $\frac{1}{3}$，那么边长变为原来的________.

3. 如果两个相似三角形的最短边长分别是 5 cm 和 3 cm，且它们的周长之差为 12 cm，那么小三角形的周长为________cm.

4. 如图 27.2.2-11，D，E 分别是△ABC 的边 AB，BC 上的点，$DE\parallel AC$，若 $S_{\triangle BDE}:S_{\triangle CDE}=1:3$，则 $S_{\triangle DOE}:S_{\triangle AOC}$ 的值为________.

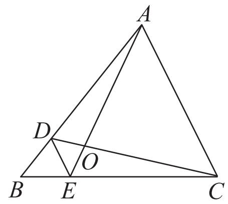


图 27.2.2-11

5. 两个相似三角形的面积比为 S，周长比为 C，且 $S+C=42$，则 $\frac{S}{C}$ 的值是________.

6. 如图 27.2.2-12 所示，在△ABC 中，$AE:EB=1:2$，$EF\parallel BC$，$AD\parallel BC$ 交 CE 的延长线于点 D，求 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BEC}}$ 的值.

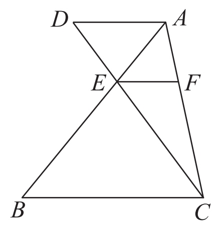


图 27.2.2-12

能力提升

7. 如图 27.2.2-13，在四边形 $ABCD$ 中，$DC\parallel AB$，$CB\perp AB$，$AB=AD$，$CD=\frac{1}{2}AB$，点 E，F 分别为 AB，AD 的中点，则△AEF 与多边形 $BCDFE$ 的面积之比为（　　）

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{4}$

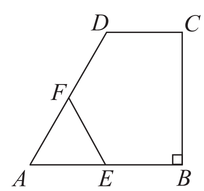


图 27.2.2-13

8.如图 27.2.2-14，在△ABC 中，D，E 是 AB 上的点，且 $AD=DE=EB$，$DF\parallel EG\parallel BC$，则△$ABC$ 被分成的三部分的面积比 $S_{\triangle ADF}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形EBCG}$ 等于________.

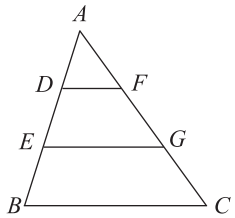


图 27.2.2-14

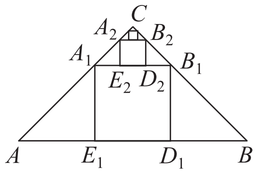


图 27.2.2-15

9.如图 27.2.2-15，△ABC 是斜边 AB 的长为 3 的等腰直角三角形，在△ABC 内作第 1 个内接正方形 $A_1B_1D_1E_1$（D_1，E_1 在 AB 上，A_1，B_1 分别在 AC，BC 上），再在△A_1B_1C 内按同样的方法作第 2 个内接正方形 $A_2B_2D_2E_2$，……，如此下去，操作 n 次，则第 n 个小正方形 $A_nB_nD_nE_n$ 的边长是________.

10.如图 27.2.2-16 所示，在△ABC 中，$BA=BC=20$ cm，$AC=30$ cm，点 P 从点 A 出发，沿着 AB 以 4 cm/s 的速度向 B 点运动；同时点 Q 从点 C 出发，沿 CA 以 3 cm/s 的速度向点 A 运动，设运动时间为 x s.

(1)当 x 为何值时，$PQ\parallel BC$？

(2)当 $\frac{S_{\triangle BCQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{3}$ 时，求 $\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值.

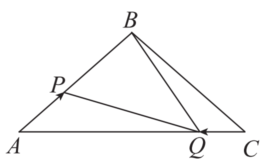


图 27.2.2-16

拓展创新

11.一块直角三角形木板的一条直角边 AB 为 1.5 m，面积为 1.5 m^2，要把它加工成一个面积最大的正方形桌面，小明打算按如图 27.2.2-17①所示的方式进行裁料，小华准备按如图 27.2.2-17②所示的方式进行裁料，他们谁的加工方案符合要求？

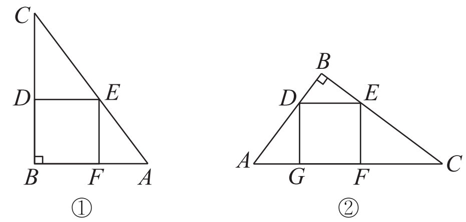


图 27.2.2-17

27.2.3　相似三角形应用举例

学习目标

1. 能够运用相似三角形的知识，解决求不能直接测量的物体的长度和高度等一些实际问题.
2. 通过把实际问题转化成有关相似三角形的数学模型，进一步了解数学建模的思想，培养分析问题、解决问题的能力.

自主预习·探新知

学习任务　利用相似三角形测量物体的高度或宽度

1. 利用影子测量物体的高度

如图 27.2.3-1，因为△ABC∽△________，

所以$\frac{AB}{DC}$=________，所以 AB=________.

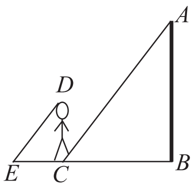


图 27.2.3-1

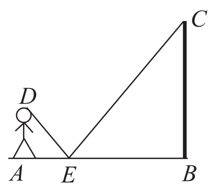


图 27.2.3-2

2. 利用平面镜测量物体的高度

如图 27.2.3-2，因为△BCE∽△________，

所以$\frac{BC}{AD}$=________，所以 BC=________.

3. 利用标杆测量物体高度

如图 27.2.3-3，因为△DHF∽△________，

所以 GC=________，

所以 BC=GC+GB=GC+________.

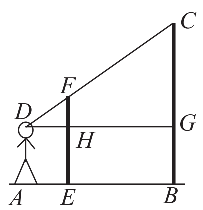


图 27.2.3-3

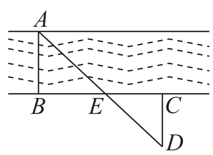


图 27.2.3-4

4. 测量河的宽度

如图 27.2.3-4，因为△ECD∽△________，

所以$\frac{AB}{DC}$=________，所以 AB=________.

即时小练

1. 判断：

(1)利用标杆测量物体高度时，眼睛必须和标杆的顶端、被测物体顶端共线.　(　　)

(2)在阳光下，两个物体的长度与影长成正比.(　　)

(3)利用平面镜测量物体的高度时，不必遵循平面镜的反射定律.　(　　)

2. 小明在测量楼高时，先测出楼房落在地面上的影长 BA 为 15 m(如图 27.2.3-5)，然后在 A 处树立一根高 2 m 的标杆，测得标杆的影长 AC 为 3 m，则楼高 BE 为　(　　)

A.10 m　　B.12 m　　C.15 m　　D.22.5 m

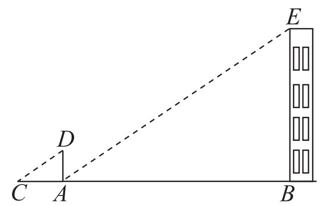


图 27.2.3-5

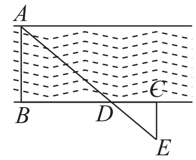


图 27.2.3-6

3. 如图 27.2.3-6，测得 BD=96 m，DC=48 m，EC=40 m，∠ABD=∠ECD=90°，则河宽 AB=________m.

合作探究·释疑难

要点突破 1　应用相似三角形测量物体的高度

【例 1】问题背景

在某次活动课中，甲、乙、丙三个学习小组于同一时刻在阳光下对校园中的一些物体进行了测量，下面是他们通过测量得到的一些信息：

甲组：如图 27.2.3-7，测得一根直立于地面，长为 80 cm 的竹竿的影长为 60 cm.

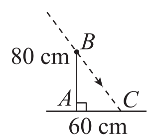


图 27.2.3-7

乙组：如图 27.2.3-8，测得学校旗杆的影长为 900 cm.

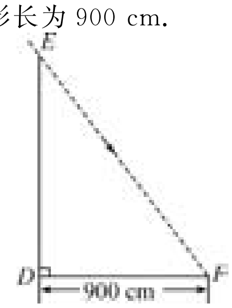


图 27.2.3-8

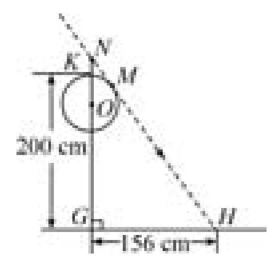


图 27.2.3-9

丙组：如图 27.2.3-9(示意图)，测得校园景灯(灯罩为球体，灯杆为圆柱体，其粗细忽略不计)的高度为 200 cm，影长为 156 cm.

任务要求

(1)请根据甲、乙两组得到的信息计算出学校旗杆的高度.

(2)如图 27.2.3-9，设太阳光线 NH 与⊙O 相切于点 M，请根据甲、丙两组得到的信息，求景灯灯罩的

半径.

思考1:根据同一时刻,在阳光下,竖直的两个物体的高度与影长________,你得到的比例式是________,代入数据解得 DE 的长为________cm.

思考2:(1)根据任务要求(1)中的计算方法,计算出 GN 的值.

(2)如图27.2.3-10,连接 OM,根据切线的性质,可以得到 OM 与 MN 的关系是________.根据勾股定理,得 NH 的长为________cm.

(3)在图27.2.3-10(示意图)中,有哪两个三角形相似?为什么?

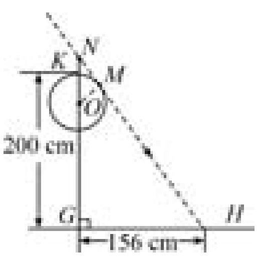


图27.2.3-10

(4)若设⊙O 的半径为 r cm,根据(3)的结论,所得到的比例式为________.所列的方程为________,解得 $r=$________cm.所以景灯灯罩的半径是________cm.

解:

规律方法

利用相似三角形测物高的原理与方法

(1)测量原理:对不能直接测量高度的物体,通常利用相似三角形的性质即相似三角形的对应边的比相等和“在太阳光下,同一时刻物高与影长的比相等”的原理解决.

(2)测量方法:先在同一时刻的太阳光下测量出参照物和被测量物体的影长,再借助参照物的高度计算出被测量物体的高度.

【变式训练】

1.(四川绵阳中考)为测量操场上旗杆的高度,小丽同学想到了物理学中平面镜成像的原理.她拿出随身携带的镜子和卷尺,先将镜子放在脚下的地面上,然后后退,直到她站直身子刚好能从镜子里看到旗杆的顶端 E,标记好脚掌中心位置为 B,测得脚掌中心位置 B 到镜面中心 C 的距离是50 cm,镜面中心 C 距离旗杆底部 D 的距离为4 m,如图27.2.3-11(示意图)所示.已知小丽同学的身高是1.54 m,眼睛位置 A 距离小丽头顶的距离是4 cm,则旗杆 DE 的高度等于 ( )

A.10 m　　B.12 m

C.12.4 m　　D.12.32 m

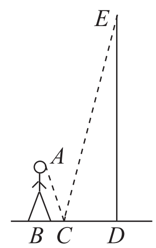


图27.2.3-11

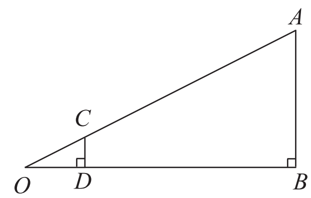


图27.2.3-12

2.(吉林中考)如图27.2.3-12,数学活动小组为了测量学校旗杆 AB 的高度,使用长为2 m的竹竿 CD 作为测量工具.移动竹竿,使竹竿顶端的影子与旗杆顶端的影子在地面 O 处重合,测得 $OD=4$ m,$BD=14$ m,则旗杆 AB 的高为________m.

要点突破2 应用相似三角形测量宽度

【例2】如图27.2.3-13,为了测量河宽,某同学采用的办法是:在河岸处选一点 B,在河的对岸选取一点 A,使 AB 与河岸垂直.在 AB 的延长线上取一点 C,使 $BC=30$ m,再在河岸处取一点 D,使 $BD=20$ m,最后在射线 AD 上取一点 E,使得 $CE\parallel BD$.按照这种做法,她能根据已有的数据求出河宽 AB 吗?若能,请求出河宽 AB;若不能,她还必须测量哪一条线段的长?假设需要测量的这条线段的长是 m m,请你用含 m 的代数式表示河宽 AB.

解:

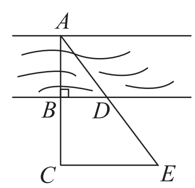


图27.2.3-13

规律方法

利用相似三角形测宽度的原理与方法

(1)测量原理:对不能直接测量的两点间的距离,常常构造“A”型或“X”型相似图形.为了使问题简便,尽量构造直角三角形.

(2)测量方法:通过测量便于测量的线段,利用三角形相似,对应边成比例可求出宽度.

【变式训练】

3.如图27.2.3-14,A,B两点分别位于一个池塘的两端,小明想用绳子测量A,B间的距离,但绳子不够长,于是他想了一个办法:在地上取一点C,使它可以直接到达A,B两点,在AC的延长线上取一点D,使$CD=\frac{1}{2}CA$,在BC的延长线上取一点E,使$CE=\frac{1}{2}CB$,测得DE的长为5 m,则A,B两点间的距离为 ( )

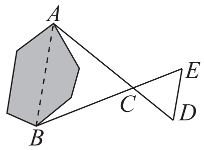


图 27.2.3-14

A.6 m B.8 m C.10 m D.12 m

要点突破 3 借助标杆测高

【例 3】如图27.2.3-15(示意图),小明为了测量一棵树的高度,找来一根竹竿AB,移动AB的位置,使自己的眼睛C、竹竿顶端A和树顶端D恰好在一条直线上,已知小明眼睛距离地面1.5 m,量得竹竿的高度为3 m,$MB=2$ m,$NB=6$ m,你能帮助小明计算出树的高度吗?

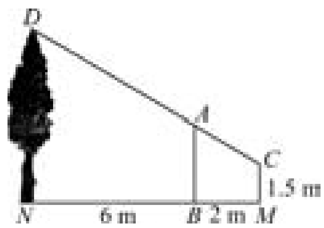


图 27.2.3-15

思考1:能直接计算出树高DN吗?

思考2:可作怎样的辅助线?

思考3:根据思考2,怎样计算DN的长度?

解:

规律方法

借助标杆测高的原理

利用标杆或直尺测量物体的高度就是利用标杆或直尺的高(长)作为三角形的边,构建相似三角形,用相似三角形对应边的比相等的性质求物体的高度.

【变式训练】

4.如图27.2.3-16(示意图),为了测量学校围墙外直立电线杆AB的高度,小亮在操场上点C处直立高3 m的竹竿CD,然后退到点E处,此时恰好看到竹竿顶端D与电线杆顶端B重合;小亮又在点C_1处直立高3 m的竹竿C_1D_1,然后退到点E_1处,恰好看到竹竿顶端D_1与电线杆顶端B重合.小亮的眼睛离地面高度$EF=1.5$ m,量得$CE=2$ m,$EC_1=6$ m,$C_1E_1=3$ m.

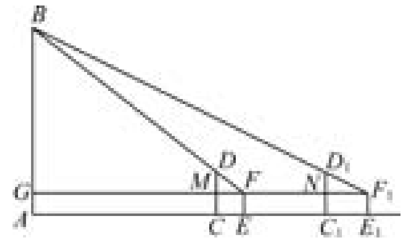


图 27.2.3-16

(1)$\triangle FDM\backsim$________,$\triangle F_1D_1N\backsim$________;

(2)求电线杆AB的高度.

达标检测

1.小明设计用平面镜来测量某古城墙高度的示意图如图27.2.3-17所示.点P处放一水平的平面镜,光线从点A出发经平面镜反射后刚好射到古城墙CD的顶端C处,已知$AB\perp BD$,$CD\perp BD$,测得$AB=1.2$ m,$BP=1.8$ m,$PD=12$ m,那么古城墙的高度是 ( )

A.6 m B.8 m C.18 m D.24 m

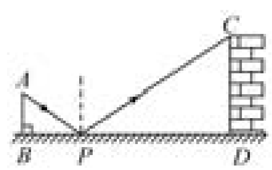


图 27.2.3-17

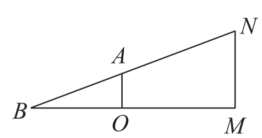


图 27.2.3-18

2.如图27.2.3-18(示意图),在一场羽毛球比赛中,站在场内M处的运动员把球从N点击到了对方场内的B点,已知网高$OA=1.52$ m,$OB=4$ m,$OM=5$ m,则运动员起跳后击球点N离地面的距离$NM=$________m.

3.如图 27.2.3-19,A,B 两点间有一湖泊,无法直接测量 AB 的长.测得 $CA=60$ m,$CD=24$ m,$DE\parallel AB$,$DE=32$ m,则 AB 的长为________m.

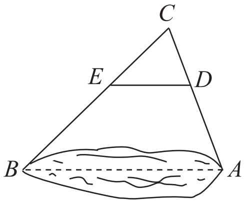


图 27.2.3-19

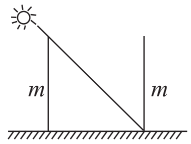


图 27.2.3-20

4.某房地产公司计划建 m m 高的南北排列的数幢"阳光型"住宅楼(如图 27.2.3-20),冬至时竖立一根 a m 长的竹竿,其影长为 b m,若要后楼的采光一年四季不受影响,两楼应至少相距________m.

5.如图 27.2.3-21(示意图),九(1)班课外活动小组利用标杆测量学校旗杆的高度,已知标杆高度 $CD=3$ m,标杆与旗杆的水平距离 $BD=15$ m,人的眼睛与地面的距离 $EF=1.6$ m,人与标杆 CD 的水平距离 $DF=2$ m,求旗杆 AB 的高度.

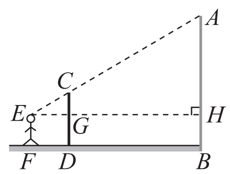


图 27.2.3-21

分层演练·提素能

基础巩固

1.如图 27.2.3-22(示意图),根据测试距离为 5 m 的标准视力表制作一个测试距离为 3 m 的视力表,如果标准视力表中"E"的长 a 是 3.6 cm,那么制作出的视力表中相应"E"的长 b 是 ( )

A.1.44 cm B.2.16 cm C.2.4 cm D.3.6 cm

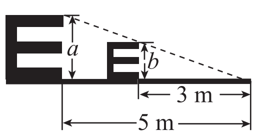


图 27.2.3-22

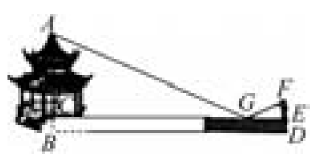


图 27.2.3-23

2.(甘肃兰州中考)如图 27.2.3-23(示意图),小明为了测量一凉亭的高度 AB(顶端 A 到水平地面 BD 的距离),在凉亭的旁边放置一个与凉亭台阶 BC 等高的台阶 DE($DE=BC=0.5$ m,A,B,C 三点共线),把一面镜子水平放置在平台上的点 G 处,测得 $CG=15$ m,然后沿直线 CG 后退到点 E 处,这时恰好在镜子里看到凉亭的顶端 A,测得 $EG=3$ m,小明身高 1.6 m,则凉亭的高度 AB 约为 ( )

A.8.5 m B.9 m C.9.5 m D.10 m

3.如图 27.2.3-24 所示,某超市在一楼至二楼之间安装有电梯,天花板与地面平行.张强扛着箱子(人与箱子的总高度约为 2.2 m)乘电梯刚好安全通过,请你根据图中数据回答,两层楼之间的高约为 ( )

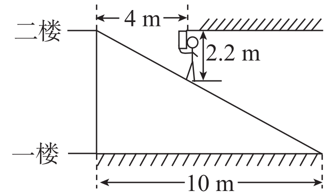


图 27.2.3-24

A.5.5 m B.6.2 m C.11 m D.2.2 m

4.《孙子算经》是我国古代重要的数学著作,成书于约一千五百年前,其中有道歌谣算题:"今有竿不知其长,量得影长一丈五尺,立一标杆,长一尺五寸,影长五寸,问杆长几何?"歌谣的意思是:有一根竹竿不知道有多长,量出它在太阳下的影子长一丈五尺,同时立一根一尺五寸的小标杆,它的影长为五寸(提示:1 丈=10 尺,1 尺=10 寸),可以求出竹竿的长为________尺.

5.如图 27.2.3-25(示意图),一条河的两岸有一段是平行的,在河的南岸边每隔 5 m 有一棵树,在北岸边每隔 50 m 有一根电线杆.小丽站在离南岸 15 m 的 P 点处看北岸,发现北岸相邻的两根电线杆恰好被南岸的两棵树遮住,并且在这两棵树之间还有三棵树,则河宽为________m.

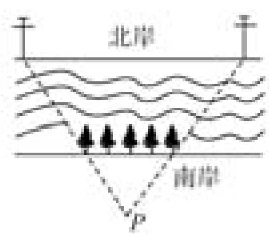
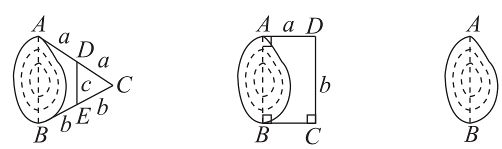


图 27.2.3-25

6.A,B 两点分别位于一个池塘的两端,由于受条件限制无法直接测量 A,B 间的距离,小明利用学过的知识,设计了如下两种测量方法,如图 27.2.3-26①②所示(图中 a,b,c 表示长度).



① ② 备用

图 27.2.3-26

(1)请你写出小明设计的两种测量方法中 AB 的长

度：图 27.2.3-26①中 $AB=$____________，
图 27.2.3-26②中 $AB=$____________.
(2)请你再设计一种不同于以上两种的测量方法，画出示意图(不要求写画法)，用字母标注需测量的边或角，并写出 AB 的长度.

能力提升

7. 如图 27.2.3-27(示意图)，一天早上，小张正向着教学楼 AB 走去，他发现教学楼后面有一水塔 DC，可过了一会儿抬头一看，怎么看不到水塔了？心里很是纳闷.经过了解，教学楼、水塔的高分别是 20 m 和 30 m，它们之间的距离为 30 m，小张的眼睛到地面的距离 EF 为 1.6 m.小张要想看到水塔，他与教学楼之间的距离至少为________m.

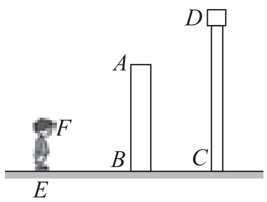


图 27.2.3-27

8. 如图 27.2.3-28(示意图)，小明拿着一把厘米刻度尺，站在距电线杆约 30 m 的地方，把手臂向前伸直，刻度尺竖直，刻度尺上 18 个刻度(即 18 cm)恰好遮住电线杆.已知手臂长约 60 cm，小明能求出电线杆的高度吗？若能，请你替小明写出求解过程.

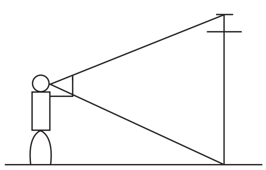


图 27.2.3-28

9. 如图 27.2.3-29 所示，在离某建筑物 4 m 处有一棵树 AB，在某时刻，1.2 m 长的竹竿 $A'B'$ 垂直于地面，且影长 BB' 为 2 m，此时，树的影子有一部分落在地面上，还有一部分落在建筑物的墙上，墙上的影高 CD 为 2 m，那么这棵树高是多少米？

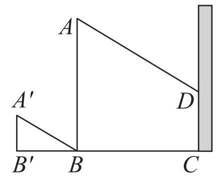


图 27.2.3-29

拓展创新

10. 一天，数学课外活动小组的同学们带着皮尺去测量某河道因挖沙形成的圆锥形坑的深度，以此来评估这些坑对河道的影响.图 27.2.3-30(示意图)是同学们选择的测量对象(确保测量过程中无安全隐患)，测量方案如下：
①先测出沙坑坑沿的圆周长为 34.54 m；
②甲同学直立于沙坑坑沿的圆周所在的平面上.经过适当调整自己所处的位置，当他位于点 B 时，恰好他的视线经过沙坑坑沿圆周上一点 A 看到坑底 S(甲同学的视线起点 C 与点 A，S 共线)，经测量，$AB=1.2$ m，$BC=1.6$ m.
根据以上测量数据，求圆锥形坑的深度(圆锥的高)(π 取 3.14，结果精确到 0.1 m).

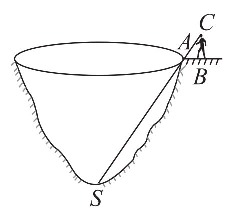


图 27.2.3-30

27.3 位 似

第 1 课时 位似(1)

学习目标

1. 了解位似图形及其有关概念,了解位似与相似的联系和区别,掌握位似图形的性质.
2. 经历位似图形的作图过程,能够利用作位似图形的方法将一个图形放大或缩小.

自主预习 · 探新知

学习任务一 位似图形的相关概念

观察图 27.3-1 中的两个相似图形.

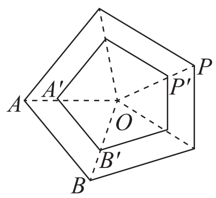


图 27.3-1

(1)位似图形:如果两个相似图形上的点分别________,并且它们的连线都经过______,并且这点与对应点所连线段________,那么这两个图形叫做位似图形,点 O 是________.

(2)位似多边形:对于两个多边形,如果它们的对应顶点的连线_________,并且这点与对应顶点所连线段________,那么这两个多边形就是位似多边形.

学习任务二 位似图形的性质

1. 位似图形是______图形,各对应点(到位似中心的距离为 0 的点除外)到位似中心的距离的比等于________.
2. 每组对应点的连线相交于________.
3. 对应边________或在同一条直线上.

学习任务三 位似作图

用位似变换的方法可以把一个图形放大或缩小,一般步骤是

(1)选取________;

(2)根据相似比确定各顶点的________;

(3)连接各对应点得到________.

即时小练

1. 判断:

(1)两个位似图形一定是相似图形. ( )

(2)两个相似图形一定是位似图形. ( )

2. 如图 27.3-2 所示的两个四边形是位似图形,它们的位似中心是 ( )

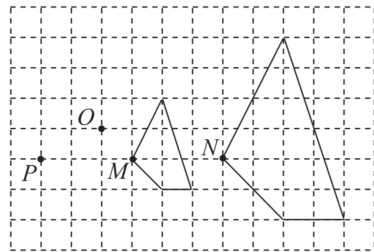


图 27.3-2

A.点 M B.点 N

C.点 O D.点 P

3. 利用位似图形将一个图形放大或缩小时,首先要选取一点作为位似中心,那么位似中心可以在 ( )

A.图形外 B.图形内

C.图形上 D.以上都可以

4. (甘肃兰州中考)如图 27.3-3,四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 位似,位似中心是点 O,$\frac{OE}{OA}=\frac{3}{5}$,则$\frac{FG}{BC}=$________.

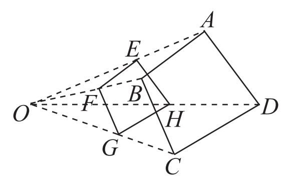


图 27.3-3

合作探究 · 释疑难

要点突破 1 位似图形的识别

【例 1】指出图 27.3-4 中各图的两个图形是不是位似图形,如果是位似图形,请指出其位似中心;如果不是,请说明理由.

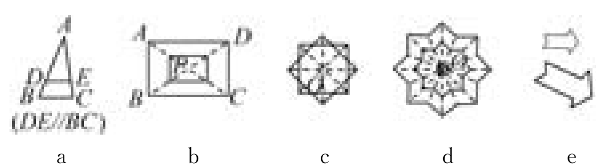


图 27.3-4

思考 1:位似图形要满足:

(1)这两个图形____________;

(2)对应点的连线都经过____________;

(3)对应边互相平行或在同一条直线上.

思考 2:满足条件(1)的有________________;满足条件(2)的有__________;满足条件(3)的有________. 所以位似图形有__________.根据条件(2)可判断它

们的位似中心分别是__________.

解：

规律方法

理解位似概念要注意三点

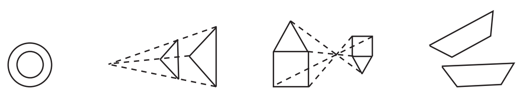
(1)位似是一种具有位置关系的相似，所以两个图形是位似图形，必定是相似图形，而相似图形不一定是位似图形.

(2)两个位似图形的位似中心只有一个.

(3)两个位似图形可能位于位似中心的两侧，也可能位于位似中心的一侧.

【变式训练】

1.下列各组图形不是位似图形的是 ( )



A B C D

要点突破 2 位似图形的性质

【例 2】如图 27.3-5，四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 是位似图形，且 $AC:AF=2:3$，则下列结论不一定正确的是 ( )

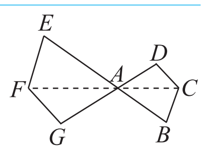


图 27.3-5

A.四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 是相似图形

B.AD 与 AE 的比是 $2:3$

C.四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 的周长比是 $2:3$

D.四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 的面积比是 $4:9$

规律方法

利用相似解决位似问题

位似图形具有相似图形所有的性质，故在解有关位似图形的边长、周长、面积等问题时，可以应用相似图形的性质来解决.

【变式训练】

2.(四川成都中考)如图 27.3-6，四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 是以点 O 为位似中心的位似图形，若 $OA:OA'=2:3$，则四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 的面积比为 ( )

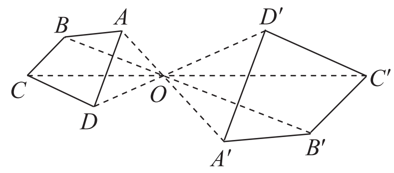


图 27.3-6

A.$4:9$　　B.$2:5$

C.$2:3$　　D.$\sqrt{2}:\sqrt{3}$

要点突破 3 利用位似缩放图形

【例 3】画一个三角形，使它与已知$\triangle ABC$(如图 27.3-7)位似，且原三角形与所画三角形的相似比为 $2:1$.

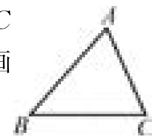


图 27.3-7

思考 1：怎样确定位似中心?

思考 2：原图形的关键点有哪几个?

思考 3：所画的图形与原图形相比是放大了还是缩小了?

解：

规律方法

位似作图三确定

(1)确定位似中心.

(2)确定原图形的关键点：如四边形有四个关键点，即它的四个顶点.

(3)确定相似比：根据相似比的取值，判断是将一个图形放大还是缩小.

【变式训练】

3.任画一个五边形 $ABCDE$，试把它缩小$\frac{1}{2}$.你有几种方法？尝试用不同方法画图.

达标检测

1.如图 27.3-8,已知$\triangle ABC$,任取一点 O,连接 AO,BO,CO,并取它们的中点 D,E,F,得$\triangle DEF$,则下列说法正确的个数是 ( )

①$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 是位似图形;

②$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 是相似图形;

③$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 的周长比为 $1:2$;

④$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 的面积比为 $4:1$.

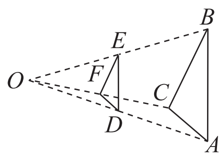


图 27.3-8

A.1 B.2 C.3 D.4

2.在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle A=36°$.以点 A 为位似中心,把$\triangle ABC$ 放大 2 倍后得$\triangle AB'C'$,则$\angle B'$的度数为________.

3.如图 27.3-9,在 8×6 网格图中,每个小正方形边长均为 1,点 O 和$\triangle ABC$ 的顶点均在小正方形的顶点上.

(1)以 O 为位似中心,在网格图中作$\triangle A'B'C'$和$\triangle ABC$ 位似,且相似比为 $1:2$;

(2)连接(1)中的 AA',求四边形 $AA'C'C$ 的周长(结果保留根号).

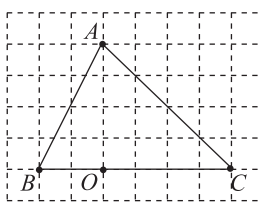


图 27.3-9

分层演练·提素能

基础巩固

1.下列说法中一定是位似图形的个数是 ( )

①放电影时,胶片和屏幕上的画面;

②小孔成像实验中的物体与物体的像;

③随意放置的大小两张由同一底版冲洗的八达岭长城照片.

A.0 B.1 C.2 D.3

2.(黑龙江绥化中考)如图 27.3-10,$\triangle A'B'C'$是$\triangle ABC$ 以点 O 为位似中心经过位似变换得到的,若$\triangle A'B'C'$的面积与$\triangle ABC$ 的面积比是 $4:9$,则 $OB':OB$ 为 ( )

A.$2:3$ B.$3:2$

C.$4:5$ D.$4:9$

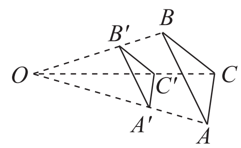


图 27.3-10

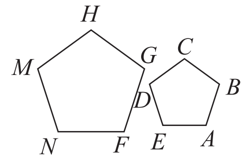


图 27.3-11

3.如图 27.3-11,正五边形 $FGHMN$ 是由正五边形 $ABCDE$ 经过位似变换得到的,若 $AB:FG=2:3$,则下列结论正确的是 ( )

A.$2DE=3MN$ B.$3DE=2MN$

C.$3\angle A=2\angle F$ D.$2\angle A=3\angle F$

4.如图 27.3-12,三个正六边形全等,其中成位似关系的有 ( )

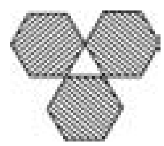


图 27.3-12

A.0 对 B.1 对 C.2 对 D.3 对

5.已知$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$是位似图形,且$\triangle A'B'C'$的面积为 6 cm^2,周长是$\triangle ABC$ 的一半.$AB=8$ cm,则 AB 边上的高等于________cm.

6.如图 27.3-13,在▱$ABCD$ 中,点 E 是 BC 的中点,AE,BD 相交于点 O.

(1)写出图中的位似三角形,并指出其位似中心和相似比;

(2)如果 $S_{\triangle BOE}=6$,求 $S_{\triangle ABD}$ 的值.

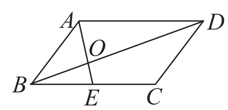


图 27.3-13

能力提升

7.如图 27.3-14 所示,已知在$\triangle ABC$中,$AB=12$,$BC=8$,$AC=6$,点D,E分别在AB,AC所在的直线上,且以A,D,E为顶点的三角形和以A,B,C为顶点的三角形位似,相似比为$\frac{1}{3}$.

(1)根据题意确定D,E的位置,画出简图;

(2)求AD,AE和DE的长.

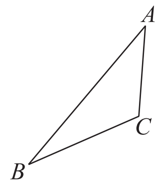


图 27.3-14

8.如图 27.3-15,已知矩形$ABCD$和矩形$AB'C'D'$是位似图形,A为位似中心,已知矩形$ABCD$的周长为 24,$BB'=4$,$DD'=2$,求AB与AD的长.

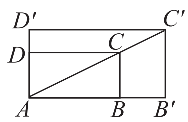


图 27.3-15

拓展创新

9.如图 27.3-16,在矩形$ABCD$的对角线AC上任取一点A',作$A'B'\parallel AB$交BD于点B',作$B'C'\parallel BC$交AC于点C',作$C'D'\parallel CD$交BD于点D',连接$A'D'$.则四边形$A'B'C'D'$与四边形$ABCD$是位似图形吗?

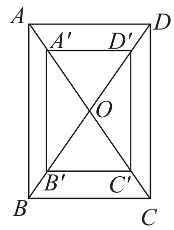


图 27.3-16

第 2 课时　位似(2)

学习目标

1. 经历探索用图形的坐标的变化来表示图形的位似变换的过程，进一步提升探究、交流能力.
2. 了解四种变换(平移、轴对称、旋转和位似)的异同，并能在复杂图形中找出这些变换.

自主预习·探新知

学习任务一　位似图形对应点的坐标表示

学习过程

如图 27.3-17，在平面直角坐标系中，有两点 $A(-6,3)$，$B(-6,0)$. 以原点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{3}$，把线段 AB 缩小，得到 A'________，B'________，A''________，B''________.

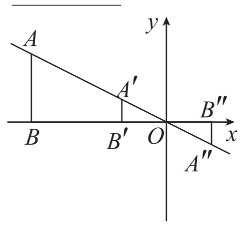


图 27.3-17

探究归纳

一般地，在平面直角坐标系中，如果以原点为位似中心，新图形与原图形的相似比为 k，那么与原图形上的点 (x,y) 对应的位似图形上的点的坐标为________或________.

学习任务二　图形变换

平移、旋转、轴对称和位似是图形变化的基本形式，其中前三种为全等变换，而后一种为________变换.

即时小练

1. 在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为 k，那么位似图形对应点的横、纵坐标的比等于________.
2. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别是 $A(0,-2)$，$B(3,0)$，$C(0,1)$，将这三个点的横、纵坐标都乘 3 得到 $\triangle A'B'C'$，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是以点________为位似中心的位似图形，相似比是________，$S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=$________.
3. 如图 27.3-18，在 13×13 的网格图中，已知 $\triangle ABC$ 和点 $M(1,2)$.

(1)以点 M 为位似中心，相似比为 2，画出 $\triangle ABC$ 的位似图形 $\triangle A'B'C'$；

(2)写出 $\triangle A'B'C'$ 的各顶点坐标.

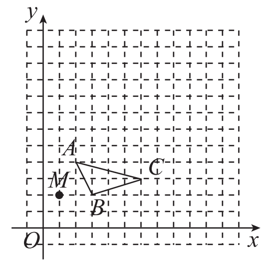


图 27.3-18

合作探究·释疑难

要点突破　位似变化的坐标特征

【例】如图 27.3-19，在 14×11 的网格图中建立平面直角坐标系 xOy，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的顶点坐标分别为 $A(1,0)$，$B(3,0)$，$C(2,1)$，$D(4,3)$，$E(6,5)$，$F(4,7)$.

按下列要求画图：以点 O 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 在 y 轴左侧按比例尺 $2:1$ 放大得 $\triangle ABC$ 的位似图形 $\triangle A_1B_1C_1$，并解决下列问题：

(1)点 A_1 的坐标为________，B_1 的坐标为________，C_1 的坐标为________.

(2)请你利用旋转、平移两种变换，使 $\triangle A_1B_1C_1$ 通过变换后得到 $\triangle A_2B_2C_2$，且 $\triangle A_2B_2C_2$ 恰与 $\triangle DEF$ 拼成一个平行四边形(非正方形). 写出符合要求的变换过程.

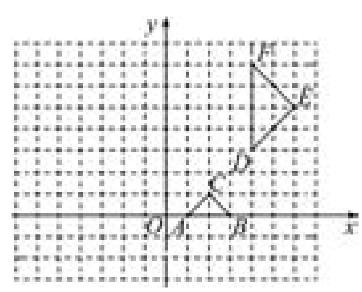


图 27.3-19

思考：因为要以点 O 为位似中心，在 y 轴左侧作 $\triangle A_1B_1C_1$，所以点 A_1 的坐标为________，依此规律即可求出点 B_1 和 C_1 的坐标.

解：

规律方法

画以原点为位似中心的位似图形的方法

将原多边形各顶点的横坐标与纵坐标都乘$\pm k$，可得新多边形各顶点的坐标，描出这些点并顺次连接这些点即可，也可以利用位似的性质直接画图.

【变式训练】

如图 27.3-20，点 A 的坐标为(3，4)，点 O 的坐标为(0，0)，点 B 的坐标为(4，0).

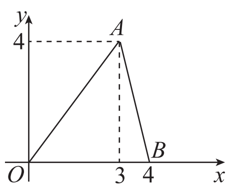


图 27.3-20

(1)将$\triangle AOB$ 沿 x 轴向左平移 1 个单位长度后得$\triangle A_1O_1B_1$，则点 A_1的坐标为________，$\triangle A_1O_1B_1$的面积为________；

(2)将$\triangle AOB$ 绕原点旋转 180°后得$\triangle A_2O_2B_2$，则点 A_2的坐标为________；

(3)将$\triangle AOB$ 沿 x 轴翻折后得$\triangle A_3O_3B_3$，则点 A_3的坐标为________；

(4)以点 O 为位似中心，相似比为 2，将$\triangle AOB$ 放大后得$\triangle A_4O_4B_4$，若点 B_4在 x 轴的负半轴上，则点 A_4的坐标为________，$\triangle A_4O_4B_4$的面积为________.

达标检测

1.如图 27.3-21，线段 AB 两个端点的坐标分别为 $A(6,6)$，$B(8,2)$，以原点 O 为位似中心，在第一象限内将线段 AB 缩小为原来的$\frac{1}{2}$后得到线段 CD，则端点 C 的坐标为 ( )

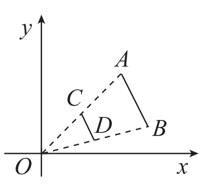


图 27.3-21

A.(3，3) B.(4，3)

C.(3，1) D.(4，1)

2.在平面直角坐标系中，已知点 $E(-4,2)$，$F(-2,-2)$，以原点 O 为位似中心，相似比为$\frac{1}{2}$，把$\triangle EFO$ 缩小，则点 E 的对应点 E'的坐标是 ( )

A.(−2，1) B.(−8，4)

C.(−8，4)或(8，−4) D.(−2，1)或(2，−1)

3.如图 27.3-22，原点 O 是$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$的位似中心，点 $A(1,0)$与点 $A'(-2,0)$是对应点，$\triangle ABC$ 的面积是$\frac{3}{2}$，则$\triangle A'B'C'$的面积是________.

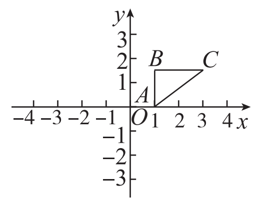


图 27.3-22

4.如图 27.3-23，已知$\triangle ABC$ 在平面直角坐标系中的坐标分别为 $A(0,0)$，$B(5,2)$，$C(0,4)$，点 G 的坐标为(−2，0).将$\triangle ABC$ 以点 G 为位似中心，缩小为原来的$\frac{1}{2}$，写出缩小后的三角形各顶点的坐标，并画出图形.

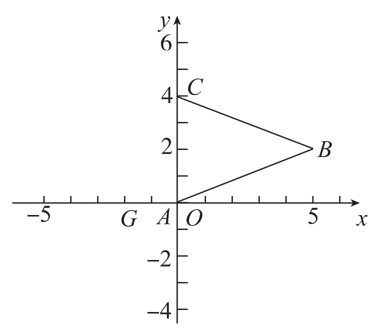


图 27.3-23

分层演练·提素能

基础巩固

1. 如图 27.3-24 所示，将$\triangle ABC$的三边长分别扩大一倍得到$\triangle A_1B_1C_1$（顶点均在格点上），它们是以点 P 为位似中心的位似图形，则点 P 的坐标是（　　）

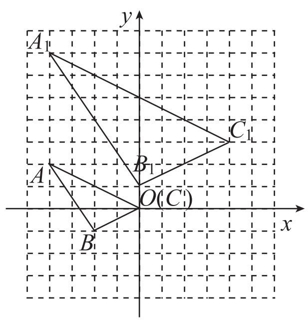


图 27.3-24

A.$(-4,-3)$　　B.$(-3,-3)$

C.$(-4,-4)$　　D.$(-3,-4)$

2. 如图 27.3-25 所示，在$\triangle ABC$中，A，B两个顶点在 x 轴的上方，点 C 的坐标是$(-1,0)$．以点 C 为位似中心，在 x 轴的下方作$\triangle ABC$的位似图形，并把$\triangle ABC$的各边长放大到原来的 2 倍，记所得的图形为$\triangle A'B'C$．设点 B 的对应点 B'的横坐标是 a，则点 B 的横坐标是（　　）

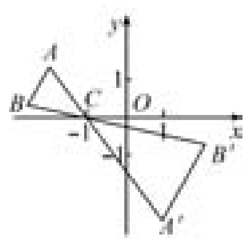


图 27.3-25

A.$-\frac{1}{2}a$　　B.$-\frac{1}{2}(a+1)$

C.$-\frac{1}{2}(a-1)$　　D.$-\frac{1}{2}(a+3)$

3. 视力表对我们来说并不陌生，视力表的一部分如图 27.3-26 所示，其中开口向上的两个“E”之间的变换属于________变换．（填“平移”“轴对称”“旋转”或“位似”）

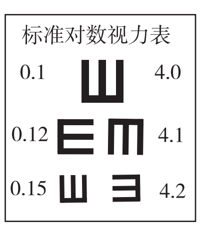


图 27.3-26

4. 如图 27.3-27 所示，判断①②③④的图形变换属于哪种图形的变换，把它们的序号填入相应的位置．

平移：________；轴对称：________；旋转：________；位似：________．

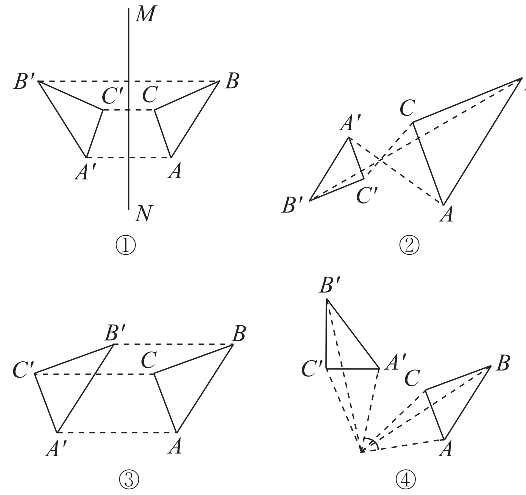


图 27.3-27

5.（山东烟台中考）如图 27.3-28，在平面直角坐标系中，每个小方格的边长均为 1，$\triangle AOB$与$\triangle A'OB'$是以原点 O 为位似中心的位似图形，且相似比为$\frac{3}{2}$，点 A，B 都在格点上，则点 B'的坐标是________．

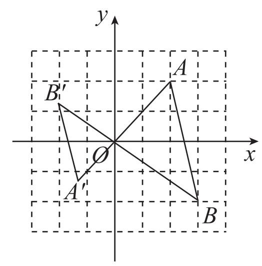


图 27.3-28

6. 如图 27.3-29，已知正方形 $ABCD$，以点 A 为位似中心，把正方形 $ABCD$ 的各边缩小为原来的一半，得正方形 $AB'C'D'$，画出正方形 $AB'C'D'$，并写出点 C 的对应点的坐标．

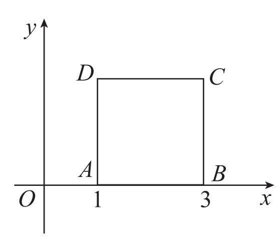


图 27.3-29

能力提升

7. 如图 27.3-30，正方形 $ABCD$ 的两边 BC，AB 分别在平面直角坐标系的 x 轴、y 轴的正半轴上，正方形 $A'B'C'D'$ 与正方形 $ABCD$ 是以 AC 的中点 O' 为位似中心的位似图形，已知 $AC=3\sqrt{2}$，若点 A' 的坐标为(1，2)，则正方形 $A'B'C'D'$ 与正方形 $ABCD$ 的相似比是 （　　）

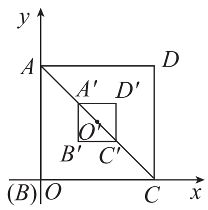


图 27.3-30

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

8. 如图 27.3-31，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A，B 的坐标分别为(3，0)，(2，−3)，$\triangle AB'O'$ 是 $\triangle ABO$ 关于点 A 的位似图形，且 O' 的坐标为(−1，0)，求点 B' 的坐标.

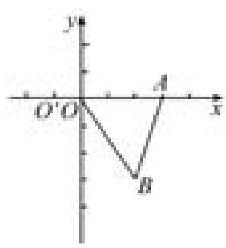


图 27.3-31

拓展创新

9. 在平面直角坐标系中，把一个图形先绕着原点顺时针旋转，旋转角度为 θ，再以原点为位似中心，相似比为 k 画一个新的图形，我们把这个过程记为【θ，k】变换.例如，把图 27.3-32 中的 $\triangle ABC$ 先绕着原点 O 顺时针旋转 90°得 $\triangle A'B'C'$，再以原点为位似中心，相似比为 $\frac{1}{2}$ 画一个新的图形 $\triangle A_1B_1C_1$，可以把这个过程记为【90°，$\frac{1}{2}$】变换.

(1) 在图 27.3-32 中画出所有符合要求的 $\triangle A_1B_1C_1$；

(2) 若 $\triangle OMN$ 的顶点坐标分别为 $O(0,0)$，$M(2,4)$，$N(6,2)$，把 $\triangle OMN$ 经过【θ，k】变换后得到 $\triangle O'M'N'$，若点 M 的对应点 M' 的坐标为(−1，−2)，求 θ 和 k 的值.

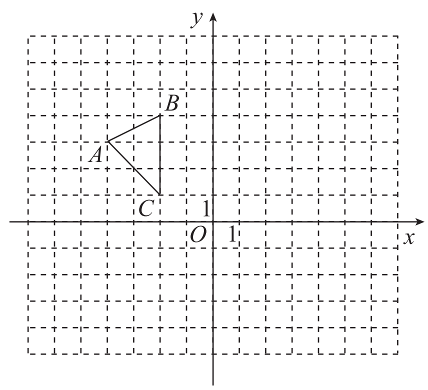


图 27.3-32

章末归纳整合

知识体系·全构建

回顾本章知识，将下面的知识体系图补充完整.

相似
- 相似图形
  - 定义：①________相同的图形
  - 性质：对应角②________，对应边③________
- 成比例线段：对于四条线段 a,b,c,d，如果其中两条线段的比(即它们长度的比)与另两条线段的比④________，如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$(即 $ad=bc$)，我们就说这四条线段成比例
- 相似多边形
  - 定义：两个边数⑤________的多边形，如果它们的角分别⑥________，边⑦________，那么这两个多边形叫做相似多边形.这也是相似多边形的判定方法
  - 相似比：相似多边形⑧________的比叫做相似比
- 平行线分线段成比例
  - 基本事实：两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段⑨________
  - 结论：⑩________于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线)，所得的对应线段成比例
  - 判定三角形相似的定理：平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形⑪________
- 相似三角形
  - 判定
    - (1)三边⑫________的两个三角形相似
    - (2)两边成比例且⑬________相等的两个三角形相似
    - (3)⑭________分别相等的两个三角形相似
  - 性质
    - (1)对应角⑮________，对应边⑯________
    - (2)相似三角形的对应高的比，对应中线的比与对应角平分线的比，周长的比都等于⑰________
    - (3)相似三角形面积的比等于⑱________
  - 应用
    - 利用影子、平面镜及标杆测高(宽)度
    - 利用相似求不能直接测量的物体的长度或距离
- 位似
  - 定义：如果两个相似图形上的点分别⑲________，并且它们的连线都经过⑳________，且对应点所连线段㉑________，那么这两个图形叫做位似图形
  - 作用：将一个图形放大或缩小
  - 性质：对应点到位似中心的距离之比等于㉒________
  - 位似与坐标：在平面直角坐标系中，以原点为位似中心，新图形与原图形的相似比为 k，那么与原图形上的点 (x,y) 对应的位似图形上的点的坐标为㉓________或㉔________

答案：①形状 ②相等 ③成比例 ④相等 ⑤相同 ⑥相等 ⑦成比例 ⑧对应边 ⑨成比例 ⑩平行 ⑪相似 ⑫成比例 ⑬夹角 ⑭两角 ⑮相等 ⑯成比例 ⑰相似比 ⑱相似比的平方 ⑲对应 ⑳同一点 ㉑成比例 ㉒相似比 ㉓(kx,ky) ㉔$(-kx,-ky)$

核心考点·精突破

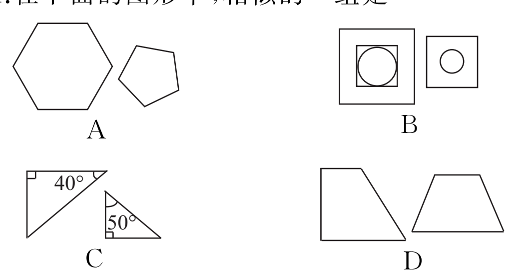
考点一 相似多边形

方法技巧

相似图形在现实生活中应用非常广泛，对于相似图形应注意：
(1)相似图形的形状必须完全相同；
(2)相似图形的大小不一定相同；
(3)两个图形形状相同、大小相同时它们是全等的，全等是相似的一种特殊情况.

题组集训

1.在下面的图形中，相似的一组是 ( )



2.如图 27-1,六边形 $ABCDEF\backsim$六边形 $GHIJKL$,相似比为 2∶1,则下列结论正确的是 ( )

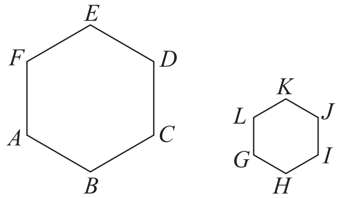


图 27-1

A.$\angle B=2\angle K$

B.六边形 $ABCDEF$ 的周长=六边形 $GHIJKL$ 的周长

C.$BC=2HI$

D.$S_{六边形ABCDEF}=2S_{六边形GHIJKL}$

考点二 平行线分线段成比例

方法技巧

平行线分线段成比例的基本事实是推导三角形相似的基础,写比例式时一定要注意对应线段放在对应位置.

题组集训

3.(甘肃兰州中考)如图 27-2,在△ABC 中,$DE\parallel BC$,若$\frac{AD}{DB}=\frac{2}{3}$,则$\frac{AE}{EC}=$ ( )

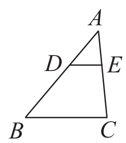


图 27-2

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{2}{5}$

C.$\frac{2}{3}$　　D.$\frac{3}{5}$

4.(吉林长春中考)如图 27-3,直线 $a\parallel b\parallel c$,直线 l_1,l_2 与这三条平行线分别交于点 A,B,C 和点 D,E,F.若 AB∶BC=1∶2,DE=3,则 EF 的长为________.

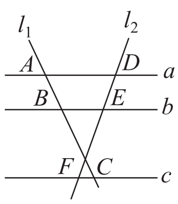


图 27-3

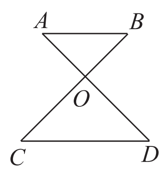


图 27-4

5.(山东临沂中考)如图 27-4,已知 $AB\parallel CD$,AD 与 BC 相交于点 O.若$\frac{BO}{OC}=\frac{2}{3}$,$AD=10$,则 $AO=$________.

考点三 相似三角形的判定

方法技巧

判定三角形相似的方法思路

- 三角形相似的判定
  - 一角对应相等
    - 找另一对等角
    - 找夹这对等角的两边的比相等
  - 两边对应的比相等
    - 找夹角相等
    - 找与第三边的比相等
    - 判断为直角三角形

题组集训

6.(山东枣庄中考)如图 27-5,在△ABC 中,$\angle A=78°$,$AB=4$,$AC=6$,将△ABC 沿图示中的虚线剪开,剪下的阴影三角形与原三角形不相似的是 ( )

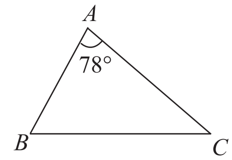
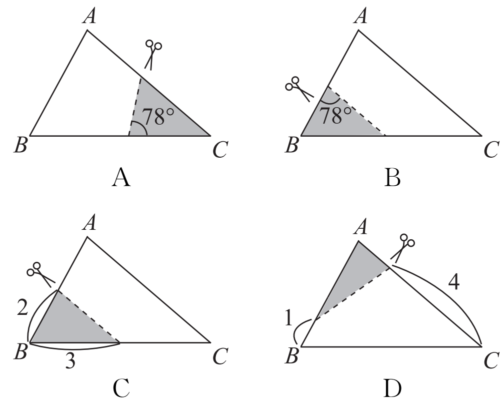


图 27-5



7.(湖北随州中考)在△ABC 中,$AB=6$,$AC=5$,点 D 在边 AB 上,且 $AD=2$,点 E 在边 AC 上,当 $AE=$________时,以 A,D,E 为顶点的三角形与△ABC 相似.

8.(贵州铜仁中考)如图 27-6,已知$\angle BAC=\angle EAD$,$AB=20.4$,$AC=48$,$AE=17$,$AD=40$.

求证:△$ABC\backsim$△AED.

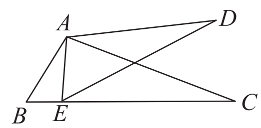


图 27-6

考点四 相似三角形的性质

方法技巧

相似三角形的对应角相等,对应边成比例,对应线段的比等于相似比,周长的比等于相似比,面积比等于相似比的平方.利用这些性质,可以求有关三角形的角度、线段长、周长和面积.

题组集训

9.（四川自贡中考）如图 27-7，在$\triangle ABC$中，点D，E分别是AB，AC的中点，若$\triangle ADE$的面积为 4，则$\triangle ABC$的面积为（　　）

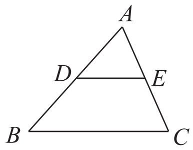


图 27-7

A.8　　B.12　　C.14　　D.16

10.“今有井径五尺，不知其深，立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四寸，问井深几何?”这是我国古代数学《九章算术》中的“井深几何”问题，它的题意可以由图 27-8(示意图)获得，则井深为（　　）

A.1.25 尺　　B.57.5 尺　　C.6.25 尺　　D.56.5 尺

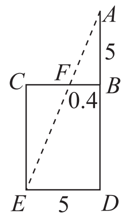


图 27-8

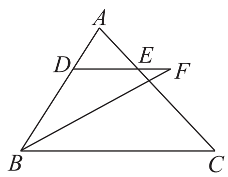


图 27-9

11.（四川南充中考）如图 27-9，在$\triangle ABC$中，$DE \parallel BC$，BF平分$\angle ABC$，交DE的延长线于点F．若$AD=1$，$BD=2$，$BC=4$，则$EF=$________．

考点五　相似三角形的应用

方法技巧

利用相似三角形解决实际问题的一般思路

利用相似三角形解决实际问题，一般是先构造相似三角形，利用相似三角形的性质列出比例式，从而把问题转化为方程的问题进行求解．

题组集训

12.如图 27-10(示意图)，身高为 1.8 m 的某学生想测量学校旗杆的高度，当他站在B处时，他头顶端的影子正好与旗杆顶端的影子重合，并测得$AB=2$ m，$BC=18$ m，则旗杆CD的高度是________m．

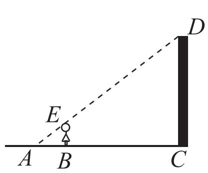


图 27-10

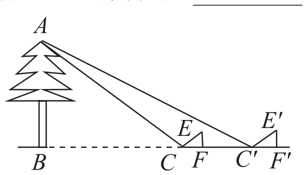


图 27-11

13.如图 27-11(示意图)，小明想用镜子测量一棵古松树AB的高，但因树旁有一条小河，不能测量镜子与树之间的距离，于是他两次利用镜子，第一次他把镜子放在点C处，人在点F处正好看到树尖A；第二次他把镜子放在点C'处，人在点F'处正好看到树尖A，已知小明眼睛距地面 1.6 m，量得$CC'=10$ m，$CF=2$ m，$C'F'=3$ m，则这棵古松树的高$AB=$________m．

考点六　位似

方法技巧

位似问题的两种命题角度

(1)位似作图：抓住位似中心，根据相似比找准关键点，即可准确作图．要注意位似图形既可能在位似中心的同侧，也可能在位似中心的异侧．

(2)位似的相关计算：因为位似图形一定是相似图形，所以位似问题往往借助相似图形的性质进行求解．

题组集训

14.（四川阿坝州中考）如图 27-12，在平面直角坐标系中，已知$A(1,0)$，$D(3,0)$，$\triangle ABC$与$\triangle DEF$位似，原点O是位似中心．若$AB=1.5$，则$DE=$________．

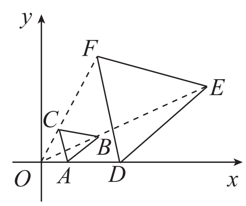


图 27-12

15.（四川凉山州中考）如图 27-13，在边长为 1 的正方形网格中建立平面直角坐标系，已知$\triangle ABC$三个顶点分别为$A(-1,2)$，$B(2,1)$，$C(4,5)$．

(1)画出$\triangle ABC$关于x轴对称的$\triangle A_1B_1C_1$；

(2)以原点O为位似中心，在x轴的上方画出$\triangle A_2B_2C_2$，使$\triangle A_2B_2C_2$与$\triangle ABC$位似，且相似比为 2，并求出$\triangle A_2B_2C_2$的面积．

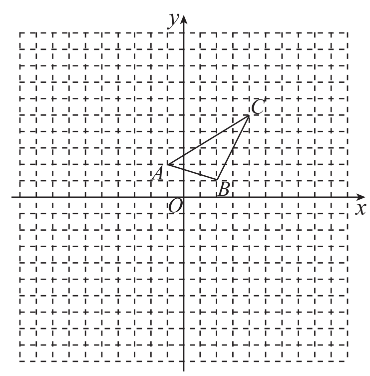


图 27-13

学科素养·速提升

专题一 数学建模

在利用相似三角形解决实际问题时,往往需要根据具体情境建立相似三角形的模型,从而利用其性质解决问题,这培养了数学建模的核心素养.

【例 1】如图 27-14(示意图),小明在打网球时,为使球恰好能过网(网高 0.8 m),且落在对方区域离网 5 m 的位置上,已知他的击球高度是 2.4 m,则他应站在离网________m 处.

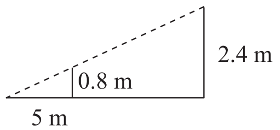


图 27-14

解析:如图 27-15(示意图)所示.

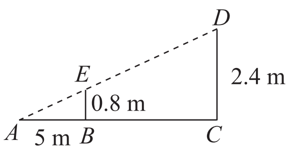


图 27-15

已知网高 $BE=0.8$ m,击球高度 $CD=2.4$ m,$AB=5$ m,

由题意可得,$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$,

所以$\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$.

所以 $AC=\dfrac{AB\cdot CD}{BE}=\dfrac{5\times2.4}{0.8}=15$(m).

所以 $BC=AC-AB=10$ m.

所以他应站在离网 10 m 处.

答案:10

> **规律方法**
>
> 解决此类问题的关键是找出相似的三角形,然后根据对应边成比例列出方程,从而使问题得以解决.

提能训练

1.如图 27-16,阳光通过窗口 AB 照射到室内,在地面上留下 4 m 宽的光照区 DE,已知光照区 DE 到窗口下的墙角距离 $CE=5$ m,窗口高 $AB=2$ m,那么窗口底边离地面的高 $BC=$________m.

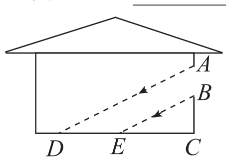


图 27-16

专题二 分类讨论思想

利用相似三角形的知识解题经常会遇到多解问题,若在没有指明对应关系的情况下求解,必须考虑多种不同的情况,并加以讨论,以防漏解.

【例 2】在 Rt$\triangle ABC$ 中,已知$\angle C=90°$,$AB=10$,$AC:BC=3:4$,D 是 AB 上的一点,$AD=6$,过点 D 能否作一条直线截原三角形所得的小三角形和原三角形相似?若能,请求出 DE 的长;若不能,请说明理由.(注:点 E 是过点 D 的直线与$\triangle ABC$ 另一边的交点)

解:能.有三种情况:如图 27-17.

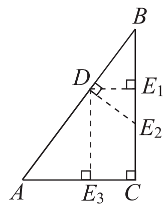


图 27-17

设 $AC=3x(x>0)$,则 $BC=4x$.

由勾股定理,得$(3x)^2+(4x)^2=10^2$.

解得 $x=2$,所以 $AC=6$,$BC=8$,

$BD=AB-AD=10-6=4$.

①过点 D 作 $DE_1\perp BC$,交 BC 于点 E_1,则$\angle DE_1B=\angle C=90°$.

因为$\angle DBE_1=\angle ABC$,所以$\triangle BDE_1\backsim\triangle BAC$.

所以$\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{DE_1}{AC}$,即$\dfrac{4}{10}=\dfrac{DE_1}{6}$.

所以 $DE_1=2.4$.

②过点 D 作 $DE_2\perp AB$,交 BC 于点 E_2,

则$\angle BDE_2=\angle C=90°$.

因为$\angle DBE_2=\angle CBA$,

所以$\triangle BDE_2\backsim\triangle BCA$.

所以$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{DE_2}{CA}$,即$\dfrac{4}{8}=\dfrac{DE_2}{6}$.

所以 $DE_2=3$.

③过点 D 作 $DE_3\perp AC$,交 AC 于点 E_3,

则$\angle AE_3D=\angle C=90°$.

因为$\angle DAE_3=\angle BAC$,

所以$\triangle ADE_3\backsim\triangle ABC$.

所以$\dfrac{DE_3}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$,即$\dfrac{DE_3}{8}=\dfrac{6}{10}$.

所以 $DE_3=4.8$.

综上所述,DE 的长为 2.4 或 3 或 4.8.

> **解后反思**
>
> 在解决此类问题时,分类讨论的关键是要找准分类依据,若考虑不到所有的对应关系就会产生漏解.比如此题,点 D 可以作为截得的小三角形的直角顶点,也可以作为截得的小三角形的锐角顶点.

提能训练

2. 如图 27-18 所示，在$\triangle ABC$中，$AB=6$，$AC=4$，P是AC的中点，过P点的直线交AB于点Q，若以A，P，Q为顶点的三角形和以A，B，C为顶点的三角形相似，则AQ的长为________.

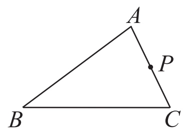


图 27-18

专题三　方程思想

方程思想是指在求解数学问题时，根据题中的已知量和未知量之间的关系，列出方程，解方程，使问题得到解决.本章在求线段的长或某图形的周长和面积时，经常要根据相似三角形的对应边成比例列方程求解.

【例 3】 如图 27-19，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，AD为$Rt\triangle ABC$的角平分线，以AB上一点O为圆心的半圆经过A，D两点，交AB于点E，连接OC交AD于点F.

(1)判断BC与$\odot O$的位置关系，并说明理由；

(2)若$OF:FC=2:3$，$CD=3$，求BE的长.

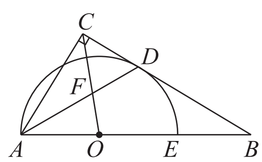


图 27-19

解：(1)BC是$\odot O$的切线.理由如下：

如图 27-20，连接OD.

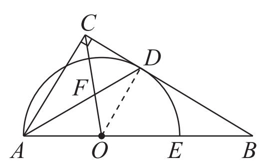


图 27-20

因为AD为$Rt\triangle ABC$的角平分线，

所以$\angle CAD=\angle OAD$.

又因为$OA=OD$，

所以$\angle ODA=\angle OAD$，

所以$\angle CAD=\angle ODA$，

所以$OD/\!/AC$.

所以$\angle ODB=\angle ACB=90°$，

所以$OD\perp BC$，

所以BC是$\odot O$的切线.

(2)设$BE=x$，$OD=r$，则$OA=OE=OD=r$.

因为$OD/\!/AC$，

所以$\frac{OB}{AB}=\frac{BD}{BC}=\frac{OD}{AC}=\frac{OF}{FC}=\frac{2}{3}$.

又因为$CD=3$，$OA=OE=OD=r$，

所以$\frac{x+r}{x+2r}=\frac{BD}{BD+3}=\frac{r}{AC}=\frac{2}{3}$，

所以$BD=6$，$AC=\frac{3}{2}r$，$x=r$，

所以$BC=9$，$AB=3r$.

因为$\angle ACB=90°$，

所以$AC^2+BC^2=AB^2$，

所以$\left(\frac{3}{2}r\right)^2+9^2=(3r)^2$，

所以$r=2\sqrt{3}$.

所以$BE=x=r=2\sqrt{3}$.

规律方法

先根据条件寻找未知量之间的关系，再利用已有的结论、定理等作为等量关系建立方程，这是利用方程思想解决问题的常用思路.

提能训练

3. 如图 27-21，在$\triangle ABC$中，$AC=4$，$BC=2$，点D是边AB上一点，CD将$\triangle ABC$分成$\triangle ACD$和$\triangle BCD$，若$\triangle ACD$是以AC为底的等腰三角形，且$\triangle BCD$与$\triangle BAC$相似，则CD的长为（　　）

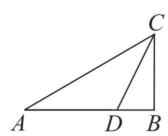


图 27-21

A.$\frac{\sqrt{17}-1}{2}$　　　　B.2

C.$4\sqrt{2}-4$　　　　D.$\frac{4\sqrt{3}}{3}$