

第十八章 平行四边形

学习导航

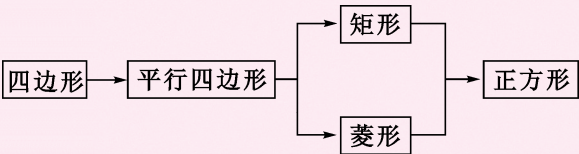
本章纵览

平行四边形是人们日常生活中应用较广的几何图形,尤其是矩形、菱形、正方形这些特殊的平行四边形的用途更多. 平行四边形既是基本几何图形,也是“图形与几何”领域的主要研究对象之一. 本章将在平行线、三角形的基础上进一步研究平行四边形的有关性质和判定方法,并对有关结论进行推理证明,进一步发展逻辑思维能力和推理论证能力. 平行四边形的研究,是对平行线、三角形相关知识的运用与延续,与三角形的研究一脉相承;平行四边形的学习,可进一步巩固推理论证方法,提高推理论证能力,发展逻辑思维能力,为后续“圆”的学习奠定了坚实的基础.

对于平行四边形,按照图形概念的从属关系,分为三个层次:第一个层次是平行四边形,主要研究平行四边形的概念、性质和判定方法;第二个层次是平行四边形的特殊情况:矩形和菱形,它们都是有一个特殊条件的平行四边形,即它们分别是有一个角是直角、有一组邻边相等的特殊的平行四边形;第三个层次是矩形和菱形的特殊情况——正方形,它是同时具有两个特殊条件的平行四边形,既是有一个角是直角的特殊菱形,又是有一组邻边相等的特殊矩形.

本章重点是平行四边形的定义、性质和判定. 它不仅是研究矩形、菱形、正方形这些特殊平行四边形的性质和判定的基础,同时平行四边形的有关性质定理也常常是证明两条线段相等、两角相等、两直线平行的重要依据,所以掌握平行四边形的概念、性质和判定,并能应用这些知识解决问题,是学好本章的关键. 本章所学知识之间联系比较紧密,研究问题的思路和方法也类似,推理论证的难度也不大. 相对来说,平行四边形与各种特殊平行四边形之间的联系与区别是本章的难点,同学们一定要多注意!

知识要点





学习要求

通过“平行四边形”的学习,希望同学们能掌握平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念,了解它们之间的关系;探索并掌握这些特殊平行四边形的有关性质和常用判定方法,并能运用这些知识进行有关的证明和计算;同时一定要经历平行四边形性质的探索过程,丰富从事数学活动的经验和体验,结合相关问题的证明,进一步培养和发展推理论证能力.



学法指导

观察、实验、归纳等合情推理和逻辑推理一样,都是发现数学规律的重要手段.因此,学习“平行四边形”时,要通过多种手段,如观察度量、实验操作、图形变换、逻辑推理等来探索图形的性质,同时还要对发现的性质进行证明,把直观操作和逻辑推理有机地结合,使推理论证成为观察、实验、探究、得出结论的自然延续.另外,同学们还要注意,在本章内容中较多地应用转化的思想处理问题,如研究四边形的问题,经常是通过添加辅助线,把四边形问题转化为三角形问题;在研究三角形的中位线时,又通过构造平行四边形,利用平行四边形的性质得出三角形的中位线定理.同学们要学会添加适当的辅助线,把未知转化为已知,用已经掌握的知识来解决新问题,以提高分析问题和解决问题的能力!

18.1 平行四边形

18.1.1 平行四边形的性质

第一学时



问题导学

同学们,在小学阶段,我们已经对平行四边形有了一定的认识,并且知道平行四边形是生活中最常见的几何图形之一.你能说说什么样的四边形是平行四边形吗?你能举出生活中平行四边形的例子吗?你知道平行四边形有哪些性质吗?本学时,我们将进一步深入地研究平行四边形的性质,帮助同学们深刻地认识平行四边形,同时,请同学们体会研究图形问题的方法和思路.相信每一位同学都会成为研究图形问题的专家!



自主学习



教材导读

1. 阅读教材 p41 第一、二自然段,完成下列问题:
(1)思考:伸缩门、竹篱笆、防护栏等实物为什么要做成平行四边形?

(2)_____的四边形叫做平行四边形.平行四边形的定义可以用来_____平行四边形,又体现了平行四边形的_____.我们知道,三角形用符号“ $\triangle$ ”来表示,类似地,平行四边形用符号“_____”来表示,如平行四边形 $ABCD$ 记作“_____”.

2. 通过教材 p41 的“探究”,可以猜想:平行四边形除了“两组对边分别平行”外,平行四边形的对边_____;平行四边形的对角_____,邻角_____.

3. 完成教材 p42 平行四边形性质的证明过程,并思考下列问题:

(1)证明平行四边形对边相等时,需要添加怎样的辅助线?这条辅助线的作用是什么?你是如何想到这条辅助线的?

(2)不添加辅助线,你能否直接运用平行四边形的定义,证明其对角相等?

(3)在 $\square ABCD$ 中,若 $\angle A = 50^\circ$,则 $\angle B =$ _____,依据是_____;若 $\angle A = 70^\circ$,则 $\angle C =$ _____,依据是_____.

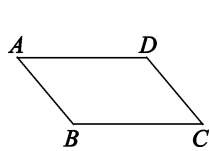
4. 教材 p42 例 1 中涉及哪些知识?解题思路是什么?

自主测评

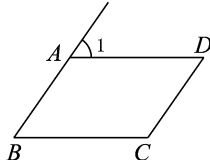
1. 在 $\square ABCD$ 中, $AD = 3\text{ cm}$, $AB = 2\text{ cm}$,则 $\square ABCD$ 的周长等于 ()
- A. 10 cm B. 6 cm
C. 5 cm D. 4 cm

2. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $\angle A + \angle C = 100^\circ$,则 $\angle B$ 等于 ()

- A. 50° B. 100° C. 80° D. 130°



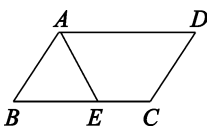
(第2题)



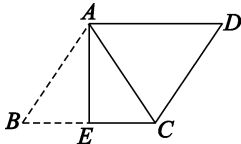
(第3题)

3. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $\angle 1 = 55^\circ$,则 $\angle C$ 等于_____.

4. 如图,在 $\square ABCD$ 中,已知 $AD = 5\text{ cm}$, $AB = 3\text{ cm}$, AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 边于点 E ,则 $EC =$ _____ cm.



(第4题)



(第5题)

5. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $AB = \sqrt{13}$, $AD = 4$,将 $\square ABCD$ 沿 AE 翻折后,点 B 恰好与点 C 重合,则折痕 AE 的长为_____.

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

我们应从哪些方面探究平行四边形的性质? 如何对平行四边形的性质进行分类?

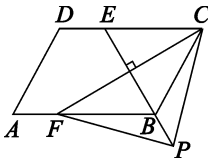


合作学习



难点探究

如图,四边形 $ABCD$ 是平行四边形, E 是边 CD 上的一点,且 $BC = EC$, $CF \perp BE$ 交 AB 于点 F , P 是 EB 延长线上的一点,下列结论:① BE 平分 $\angle CBF$;② CF 平分 $\angle DCB$;③ $BC = FB$;④ $PF = PC$. 其中正确结论的个数为 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



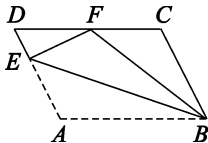
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!



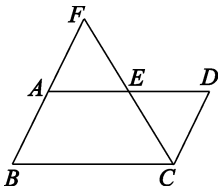
展示交流

1. 如图,在 $\square ABCD$ 中,点 E 在边 AD 上,以 BE 为折痕,将 $\triangle ABE$ 向上翻折,点 A 正好落在 CD 边上的点 F 处.若 $\triangle FDE$ 的周长为8, $\triangle FCB$ 的周长为22,则 FC 的长为_____.



2. 如图,在 $\square ABCD$ 中, E 为 AD 的中点, CE 的延长线交 BA 的延长线于点 F .

- (1) 求证: $CD = FA$;
(2) 若 $\angle AFE = \angle BCF$,则 $\square ABCD$ 的边 AB 与 BC 之间有怎样的数量关系? 并说明理由.





归纳梳理

- 1. 平行四边形是特殊的四边形,因此具备四边形的所有性质,如不稳定性、内角和为 360° 等.
- 2. 平行四边形的对边互相平行且相等,对角相等,邻角互补.
- 3. 通过添加辅助线——对角线,可以将四边形问题转化为三角形问题进行解决.
- 4. 经历图形操作过程,提高多渠道、多方式获取并验证数学命题的意识.

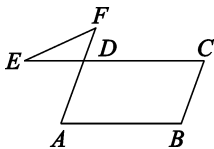


深化拓展

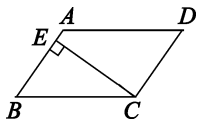
基础巩固

1. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $\angle B = 110^\circ$, 延长 AD 至点 F , 延长 CD 至点 E , 连接 EF , 则 $\angle E + \angle F$ 等于 ()

- A. 110°
- B. 30°
- C. 50°
- D. 70°



(第1题)



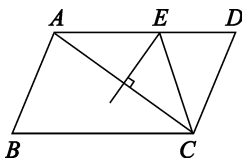
(第2题)

2. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $CE \perp AB$, E 为垂足. 若 $\angle A = 125^\circ$, 则 $\angle BCE$ 等于 ()

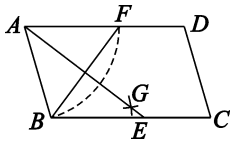
- A. 55°
- B. 35°
- C. 25°
- D. 30°

3. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 6$, AC 的垂直平分线交 AD 于点 E , 则 $\triangle CDE$ 的周长是 ()

- A. 7
- B. 10
- C. 11
- D. 12



(第3题)



(第4题)

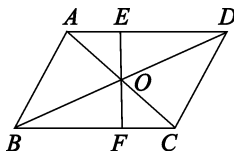
4. 如图,在 $\square ABCD$ 中,用直尺和圆规作 $\angle BAD$ 的平分线 AG 交 BC 于点 E , 若 $BF = 6$, $AB = 5$, 则 AE 的长为 ()

- A. 4
- B. 6
- C. 8
- D. 10

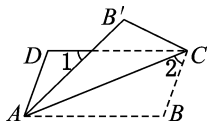
能力提升

5. 如图, EF 过 $\square ABCD$ 对角线的交点 O , 交 AD 于点 E , 交 BC 于点 F , 若 $\square ABCD$ 的周长为 18, $OE = 1.5$, 则四边形 $EFCD$ 的周长为 ()

- A. 14
- B. 13
- C. 12
- D. 10



(第5题)



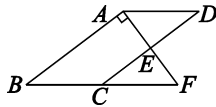
(第6题)

6. 如图,将 $\square ABCD$ 沿对角线 AC 折叠,使点 B 落在点 B' 处. 若 $\angle 1 = \angle 2 = 44^\circ$, 则 $\angle B$ 等于 ()

- A. 66°
- B. 104°
- C. 114°
- D. 124°

7. 如图, E 是 $\square ABCD$ 的边 CD 的中点, 延长 AE 交 BC 的延长线于点 F .

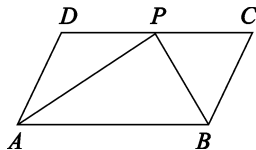
- (1) 求证: $\triangle ADE \cong \triangle FCE$;
- (2) 若 $\angle BAF = 90^\circ$, $BC = 5$, $EF = 3$, 求 CD 的长.



拓展创新

8. 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, P 是 CD 上一点, 且 AP 和 BP 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle CBA$.

- (1) 求 $\angle APB$ 的度数;
- (2) 如果 $AD = 5$ cm, $AP = 8$ cm, 求 $\triangle APB$ 的周长.



第二学时



问题导学

同学们,通过前面的学习,我们知道:点与点之间的距离是指两点所连线段的长度,点到直线的距离是指这点到直线的垂线段的长度.那么,你知道什么是两条平行线之间的距离吗?两条平行线之间的任何两条平行线段都有怎样的关系呢?



自主学习



教材导读

1. 阅读教材 p42、p43 有关“两条平行线之间的距离”的内容,完成下列问题:

(1) 两点之间的距离是指 _____, 点到直线的距离是指 _____, 两条平行线之间的距离是指 _____.

(2) 由平行四边形的定义和性质可知,两条平行线之间的任何两条平行线段都 _____, 因此又说两条平行线间的垂线段 _____, 都等于这两条平行线之间的 _____.

2. 完成教材 p43 的练习.



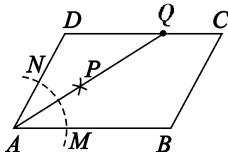
自主测评

1. 已知 $\square ABCD$ 的周长为 32, $AB = 4$, 则 BC 等于 _____ ()

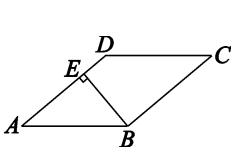
- A. 4
- B. 12
- C. 24
- D. 28

2. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,按以下步骤作图:①以点 A 为圆心,任意长为半径画弧,分别交 AB, AD 于点 M, N ;②分别以点 M, N 为圆心,大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧,两弧相交于点 P ;③作射线 AP ,交边 CD 于点 Q . 若 $DQ = 2QC, BC = 3$, 则平行四

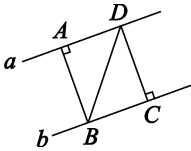
边形 $ABCD$ 的周长为 _____.



3. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $BE \perp AD$ 于点 E . 若 $\angle ABE = 50^\circ$, 则 $\angle C =$ _____.



(第3题)



(第4题)

4. 如图,直线 $a \parallel b, BA \perp$ 直线 a 于点 $A, DC \perp$ 直线 b 于点 C , 则

- (1) 点 B 与点 D 的距离是指线段 _____ 的长;
- (2) 点 D 到直线 b 的距离是指线段 _____ 的长;
- (3) 两平行线 a, b 之间的距离是线段 _____ 或 _____ 的长.

5. 平行线 a, b 之间的距离为 8 cm, 若 P 是直线 a 上一点, Q 是直线 b 上一点, 则 PQ _____ 8 cm (填“ $<$ ”“ $>$ ”“ $\leq$ ”“ $\geq$ ”或“ $=$ ”).

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

教材 p43 练习第 2 题运用了平行线的哪些性质?



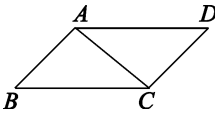
合作学习



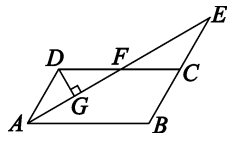
难点探究

1. 如图,在 $\square ABCD$ 中,连接 $AC, \angle ABC = \angle CAD = 45^\circ, AB = 2$, 则 BC 的长是 _____ ()

- A. $\sqrt{2}$
- B. 2
- C. $2\sqrt{2}$
- D. 4



(第1题)



(第2题)

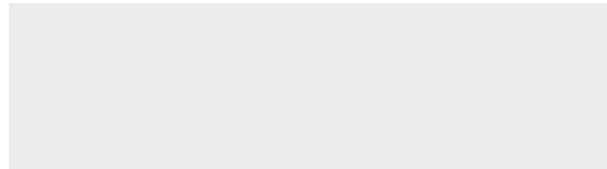
2. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $AB = 4, \angle BAD$ 的平分线与 BC 的延长线交于点 E , 与 DC 交于点 F , 且 F 为



边 DC 的中点, $DG \perp AE$, 垂足为 G . 若 $DG = 1$, 则 AE 的长为 ()

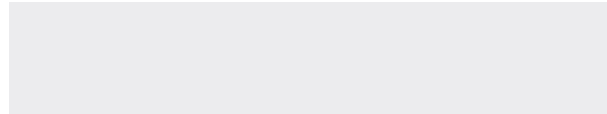
- A. $2\sqrt{3}$
- B. $4\sqrt{3}$
- C. 4
- D. 8

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



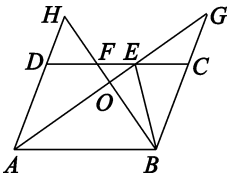
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

1. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle DAB$ 的平分线交 CD 于点 E , 交 BC 的延长线于点 G , $\angle ABC$ 的平分线交 CD 于点 F , 交 AD 的延长线于点 H , AG 与 BH 交于点 O , 连接 BE . 下列结论错误的是 ()



- A. $BO = OH$
- B. $DF = CE$
- C. $DH = CG$
- D. $AB = AE$

2. 在 $\square ABCD$ 中, $AD = 8$, AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E , DF 平分 $\angle ADC$ 交 BC 于点 F , 且 $EF = 2$, 则 AB 的长为 ()

- A. 3
- B. 5
- C. 2 或 3
- D. 3 或 5



归纳梳理

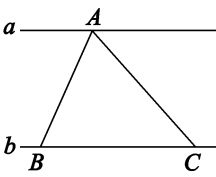
- 1. 两条平行线之间的任何两条平行线段都相等.
- 2. 学会利用“两条平行线之间的垂线段相等”解决“等底等高的三角形面积相等”的问题.
- 3. 会用平行线之间的距离解决现实中简单的数学问题.



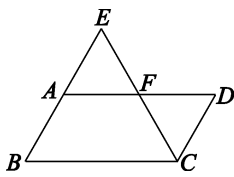
深化拓展

基础巩固

1. 如图, 已知直线 $a \parallel b$, $BC = 4$. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 6, 则 a, b 之间的距离是 _____.



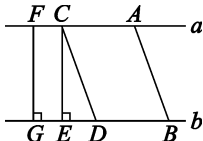
(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 是 BA 延长线上一点, $AB = AE$, 连接 CE 交 AD 于点 F . 若 CF 平分 $\angle BCD$, $AB = 3$, 则 BC 的长为 _____.

3. 如图, $a \parallel b$, $AB \parallel CD$, $CE \perp b$, $FG \perp b$, E, G 为垂足, 则下列说法中错误的是 ()



- A. $AB = CD$
- B. $CE = FG$
- C. A, B 两点之间的距离就是线段 AB 的长
- D. 直线 a, b 之间的距离就是线段 CD 的长

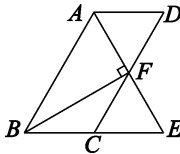
能力提升

4. 已知直线 $a \parallel b \parallel c$, 且 a 与 b 之间的距离为 6 cm, b 与 c 之间的距离为 10 cm, 则 a 与 c 之间的距离为 _____.

拓展创新

5. 如图, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 CD 于点 F , 交 BC 的延长线于点 E .

- (1) 求证: $BE = CD$;
- (2) 连接 BF , 若 $BF \perp AE$, $\angle BEA = 60^\circ$, $AB = 4$, 求平行四边形 $ABCD$ 的面积.



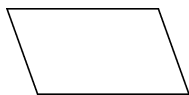
第三学时



问题导学

同学们,第一学时我们从边和角两个方面研究了平行四边形的性质.请大家想一想,平行四边形还有其他性质吗?我们还可以从哪些角度研究平行四边形的性质?

如图是一张平行四边形纸片,你能通过折叠将它分成完全相同的两部分吗?怎样折叠?你有几种折叠的方法?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 p43“探究”,回答下列问题:

(1)教材图 18.1-7 中 OA 与 OC , OB 与 OD 分别有什么关系?同学们任意画一个平行四边形,上述线段 OA 与 OC , OB 与 OD 之间的关系发生改变了吗?你能得到怎样的猜想?

(2)结合教材 p44 图 18.1-8,完成上述猜想的证明过程.

2. 完成教材 p44 例 2,思考下列问题:

(1)求对角线 BD 的长;

(2)分别求 $S_{\triangle BOC}$, $S_{\triangle COD}$, $S_{\triangle AOD}$ 和 $S_{\triangle AOB}$ 的面积;

(3)在平行四边形中,被两条对角线分成的四个三角形之间有怎样的关系?

3. 解决“问题导学”中通过折叠将平行四边形分成完全相同的两部分的问题.

自主测评

1. 平行四边形的对角线一定具有的性质是

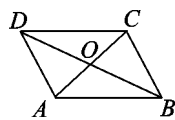
()

- A. 相等
- B. 互相平分
- C. 互相垂直
- D. 互相垂直且相等

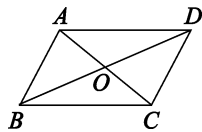
2. 如图,平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O ,则下列结论正确的是

()

- A. $S_{\square ABCD} = 4S_{\triangle AOB}$
- B. $AC = BD$
- C. $AC \perp BD$
- D. $\square ABCD$ 是轴对称图形



(第 2 题)



(第 4 题)

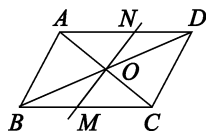
3. 已知平行四边形的对角线长分别为 x , y , 一边长为 12, 则 x , y 的值可能是下列各组数中的

()

- A. 8 与 14
- B. 10 与 14
- C. 18 与 20
- D. 10 与 48

4. 如图,在 $\square ABCD$ 中, AC , BD 相交于点 O . 如果 $AC = 14$ cm, $BD = 18$ cm, $AB = 10$ cm, 那么 $\triangle COD$ 的周长为 _____ cm.

5. 如图,在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 相交于点 O , MN 是过 O 点的直线, 交 BC 于点 M , 交 AD 于点 N . 若 $BM = 2$, $AN = 3$, 则 $AD =$ _____.



收获与问题

请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

平行四边形被对角线分成了哪些三角形? 它们之间各有怎样的关系?



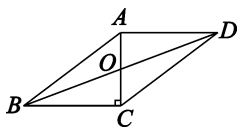


合作学习

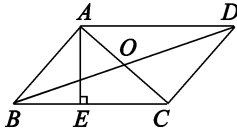


难点探究

1. 如图,在 $\square ABCD$ 中, O 是对角线 AC, BD 的交点, $AC \perp BC$,且 $AB = 10\text{ cm}$, $AD = 8\text{ cm}$,则 $OB =$ cm .



(第1题)



(第2题)

2. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 $O, AE \perp BC$,垂足为 $E, AB = \sqrt{3}, AC = 2, BD = 4$,则 AE 的长为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- B. $\frac{3}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$
- D. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



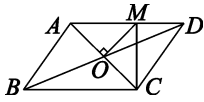
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!



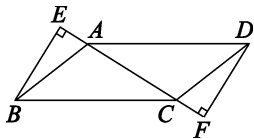
展示交流

1. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O ,且 $AD \neq CD$,过点 O 作 $OM \perp AC$,交 AD 于点 M .如果 $\triangle CDM$ 的周长是 40 cm ,那么 $\square ABCD$ 的周长是 ()



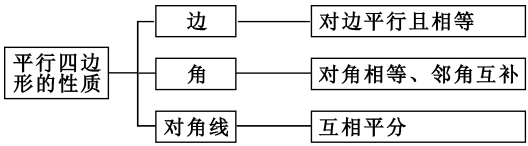
- A. 40 cm
- B. 60 cm
- C. 70 cm
- D. 80 cm

2. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $BE \perp AC$,垂足 E 在 CA 的延长线上, $DF \perp AC$,垂足 F 在 AC 的延长线上.求证: $AE = CF$.



归纳梳理

1. 平行四边形的性质分类图:



2. 解决四边形的问题常用的方法是通过构造对角线,将四边形问题转化为三角形问题;证明线段或角相等的一般思路是证明相关的三角形全等.

3. 经历通过观察、猜想、操作、分析等方式探究数学结论的过程,注重运用“几何画板”探索并验证图形的性质或规律,提高合情推理和演绎推理的能力.

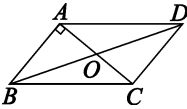


深化拓展



基础巩固

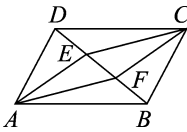
1. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 $O, AB \perp AC$,若 $AB = 4, AC = 6$,则 BD 的长是 ()



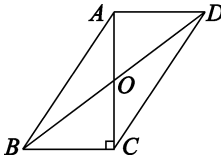
- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 11

2. 如图, $\square ABCD$ 和 $\square AECF$ 的顶点 D, E, F, B 在同一条直线上,则下列等式一定成立的是 ()

- A. $AE = CE$
- B. $CE = CF$
- C. $DE = BF$
- D. $DE = EF = BF$



(第2题)

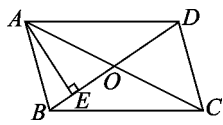


(第3题)

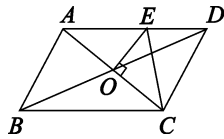
3. 如图,在 $\square ABCD$ 中,对角线交于点 $O, AB = 2\sqrt{13}\text{ cm}, AD = 4\text{ cm}, AC \perp BC$,则 $\triangle DBC$ 的周长比 $\triangle ABC$ 的周长长 cm .

能力提升

4. 如图,在 $\square ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AE \perp BD$ 于点 E , $\angle EAO = 30^\circ$, $OE = 3$,则 $AC =$ _____.



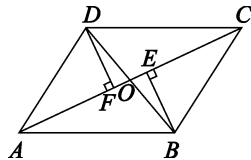
(第4题)



(第5题)

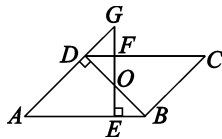
5. 如图, $\square ABCD$ 的周长为16 cm, AC, BD 交于点 O , $OE \perp AC$ 交 AD 于点 E ,则 $\triangle DCE$ 的周长为_____ cm.

6. 如图,在 $\square ABCD$ 中, O 是对角线 AC, BD 的交点, $BE \perp AC, DF \perp AC$,垂足分别为 E, F .那么 OE 与 OF 是否相等?为什么?



7. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $BD \perp AD$, $\angle A = 45^\circ$, E, F 分别是 AB, CD 上的点,且 $BE = DF$,连接 EF 交 BD 于点 O .

- (1) 求证: $BO = DO$;
(2) 若 $EF \perp AB$,延长 EF 交 AD 的延长线于点 G ,当 $FG = 1$ 时,求 AE 的长.

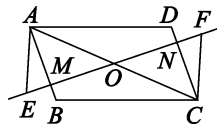


拓展创新

8. 如图,在 $\square ABCD$ 中, O 为对角线 AC 的中点,过点 O 作一条直线分别与 AB, CD 交于点 M, N ,点 E, F 在直线 MN 上,且 $OE = OF$.

(1) 图中共有几对全等三角形,请把它们都写出来;

(2) 求证: $\angle MAE = \angle NCF$.



18.1.2 平行四边形的判定

第一学时



问题导学

同学们,前面三个学时,我们从不同的角度研究了平行四边形的性质.请大家想一想,根据这些性质反过来能判断一个四边形是平行四边形吗?

小明在研究上述问题时做了下面的实验:取四根木条,其中两根木条长度相等,另外两根木条的长度也相等,使等长的木条成为对边,用钉子将它们首尾相接钉在一起,做成一个四边形.小明发现这是一个平行四边形,你同意他的看法吗?你知道为什么吗?根据四边形的不稳定性,小明转动这个四边形得到不同形状的四边形,你认为这些四边形一直都是平行四边形吗?请大家动手做一做,并想办法对你发现的结论进行验证或证明.



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 p45“思考”,想一想,平行四边形的性质是从哪些方面分别进行探究的?

2. 平行四边形的判定定理有:

(1) _____ 的四边形是平行四边形,用符号语言可以表述为:

如图,在四边形 $ABCD$ 中,

$\therefore$ _____,

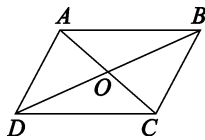
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(2) _____ 的四边形是平行四边形,用符号语言可以表述为:

如图,在四边形 $ABCD$ 中,

$\therefore$ _____,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



(3) _____ 的四边形是平行四边形,用符号语言可以表述为:

如图,在四边形 $ABCD$ 中,

$\therefore$ _____,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

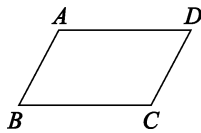
3. 完成对定理“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”的证明过程.

4. 完成对定理“两组对角分别相等的四边形是平行四边形”的证明过程.

5. 教材 p46 例 3 中证明四边形 $BFDE$ 是平行四边形所依据的定理是什么?你还有其他的证明方法吗?

自主测评

1. 如图, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $\angle B = 50^\circ$, 则 $\angle D =$ _____.



2. 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 交于点 O , 且 $OA = OC$, $OB = 4$. 当 $OD =$ _____ 时, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

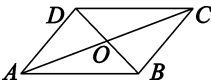
3. 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 50^\circ$, 能使这个四边形是平行四边形的是 ()

- A. $\angle D = 130^\circ$
- B. $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 130^\circ$
- C. $\angle C = 50^\circ$
- D. $\angle C = 50^\circ$, $\angle B = 130^\circ$

4. 把两个全等的不等边三角形(三条边都不相等的三角形)拼成平行四边形,可拼成的不同平行四边形的个数为 ()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

5. 如图,四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC, BD 相交于点 O ,下列条件不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()



- A. $AB \parallel CD, AD \parallel BC$
- B. $AB = DC, AD = BC$
- C. $AO = CO, BO = DO$
- D. $AB \parallel DC, AD = BC$

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

判断一个四边形是平行四边形都有哪些方法?



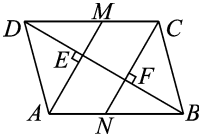
合作学习



难点探究

如图,在 $\square ABCD$ 中, BD 是它的一条对角线,过 A, C 两点分别作 $AE \perp BD, CF \perp BD$,垂足分别为 E, F ,延长 AE, CF 分别交 CD, AB 于点 M, N .

- (1) 求证:四边形 $CMAN$ 是平行四边形;
- (2) 已知 $DE = 4, FN = 3$,求 BN 的长.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

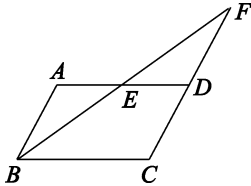
问题共析 要积极发言,及时总结哦!



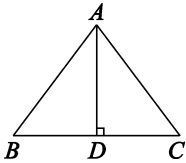
展示交流

1. 如图,在 $\square ABCD$ 中, E 是 AD 的中点, BE 的延长线与 CD 的延长线交于点 F .

- (1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle DFE$;
- (2) 连接 BD, AF ,判断四边形 $ABDF$ 的形状,并说明理由.



2. 如图,在等腰三角形纸片 ABC 中, $AB = AC = 10 \text{ cm}, BC = 12 \text{ cm}$,沿底边 BC 上的高 AD 剪成两个三角形,用这两个三角形拼成平行四边形,则这个平行四边形较长的对角线的长是 _____.



归纳梳理

- 1. 两组对边分别平行的四边形是平行四边形.
- 2. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形.
- 3. 两组对角分别相等的四边形是平行四边形.
- 4. 对角线互相平分的四边形是平行四边形.
- 5. 经历图形操作过程,提高多渠道、多方式获取并验证数学命题的意识.



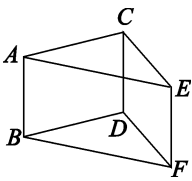


深化拓展

基础巩固

1. 如图, $AB = CD = EF$, 且 $\triangle ACE \cong \triangle BDF$, 则图中平行四边形的个数为 ()

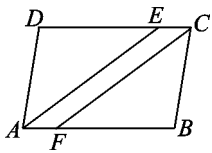
- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4



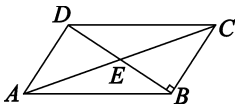
2. 在四边形 $ABCD$ 中, 下列从 $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ 的度数之比能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()

- A. 1 2 3 4
- B. 2 3 2 3
- C. 2 2 3 3
- D. 1 2 2 3

3. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, AE, CF 分别是 $\angle DAB, \angle BCD$ 的平分线, 若 $AB = 10\text{ cm}, DE = 8\text{ cm}$, 则 $EC =$ _____.



(第3题)



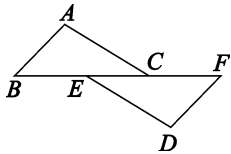
(第4题)

4. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 $E, \angle CBD = 90^\circ, BC = 4, BE = ED = 3, AC = 10$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____.

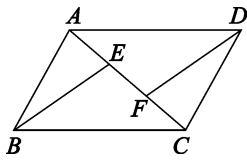
能力提升

5. 如图, 点 B, E, C, F 在同一条直线上, $AB = DF, AC = DE, BE = FC$.

- (1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle DFE$;
- (2) 连接 AF, BD , 求证: 四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

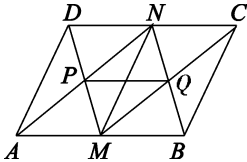


6. 如图, E, F 是 $\square ABCD$ 的对角线 AC 上的点, $CE = AF$. 请你猜想: BE 与 DF 有怎样的位置关系和数量关系? 并对你的猜想加以证明.



拓展创新

7. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, M, N 分别是 AB, CD 的中点, AN 与 DM 相交于点 P, BN 与 CM 相交于点 Q . 试说明: PQ 与 MN 互相平分.

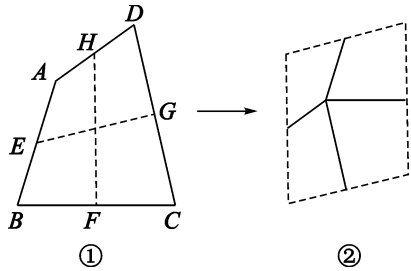


第二学时



问题导学

同学们,取一张四边形硬纸片 $ABCD$, E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 边上的中点,沿线段 EG, FH 将硬纸片剪开,得到四个小四边形纸片(如图①所示),用这四个小纸片可拼出如图②所示的平行四边形.你知道其中的道理吗?动手做一做,动脑想一想,你会有很多发现!



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 p46“思考”及下面的内容,解决下列问题:
(1) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形吗?如何证明?

- (2) 总结平行四边形的判定方法:
- ① _____;
 - ② _____;
 - ③ _____;
 - ④ _____;
 - ⑤ _____.

2. 阅读教材 p47 例 4,证明四边形 $EBFD$ 是平行四边形的依据是 _____.

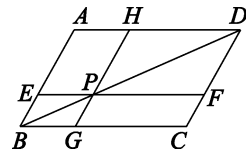
3. 完成教材 p47 的练习.

自主测评

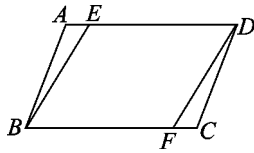
1. 下列条件中不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的是 ()

- A. $AB=CD, AD=BC$
- B. $AB \parallel CD, AB=CD$
- C. $AB=CD, AD \parallel BC$
- D. $AB \parallel CD, AD \parallel BC$

2. 如图,在 $\square ABCD$ 中,过对角线 BD 上一点 P 作 $EF \parallel BC, GH \parallel AB$,且 $CG=2BG, S_{\triangle BPG}=1$,则 $S_{\square AEPH}$ = _____.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图,在 $\square ABCD$ 中, E, F 分别为 AD 和 BC 边上的点,当 AE 与 FC 满足条件 _____ 时,四边形 $EBFD$ 是平行四边形,判断四边形 $EBFD$ 为平行四边形的依据是 _____.

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

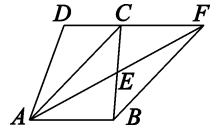
一组对边平行,另一组对边相等的四边形是平行四边形吗?



合作学习

难点探究

如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, E 是 BC 的中点,直线 AE 交 DC 的延长线于点 F . 试判断四边形 $ABFC$ 的形状,并说明理由.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

1. 如图,在 $\square ABCD$ 中,
 $\angle ABC=60^\circ$,点 E,F 分别在 CD
和 BC 的延长线上, $AE\parallel BD$, EF
 $\perp BF$ 于点 F , $CF=1$,则 AB 的长是_____.

2. 如图,已知 $AB\parallel CD$, $BE\perp AD$,垂足为 E ,
 $CF\perp AD$,垂足为 F ,并且 $AE=DF$.
求证:四边形 $BECF$ 是平行四边形.
-
-
-
- 归纳梳理
1. 平行四边形的判定方法:
(1)从边的角度判定:①两组对边分别平行的
四边形是平行四边形;②两组对边分别相等的四边
形是平行四边形;③一组对边平行且相等的四边形
是平行四边形.
(2)从角的角度判定:两组对角分别相等的四
边形是平行四边形.
(3)从对角线的角度判定:对角线互相平分的
四边形是平行四边形.

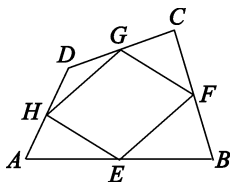
2. 解决四边形问题时,通过添加辅助线——对
角线,可以将四边形问题转化为三角形问题进行解
决,渗透转化的数学思想.
-
- 深化拓展
- 基础巩固
1. 已知直角坐标系内有四个点 $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(1,1)$, $C(x,1)$,若以 O,A,B,C 为顶点的四边
形是平行四边形,则 $x=$ _____.
- 能力提升
2. 如图,在 $\square ABCD$ 中,点 E,F,G,H 分别在
 AB,DC,BC,DA 上,且 $AE=CF$, $BG=DH$,那么 EF 与
 GH 互相平分吗? 为什么?
-
- 拓展创新
3. 如图,分别以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AC 及斜边
 AB 为边向外作等边三角形 ACD 和等边三角形
 ABE . 已知 $\angle BAC=30^\circ$, $EF\perp AB$,垂足为 F ,连接
 DF . 求证:
(1) $AC=EF$;
(2)四边形 $ADFE$ 是平
行四边形.
-
- 73

第三学时



问题导学

如图,在四边形 $ABCD$ 中,
 E, F, G, H 分别是 $AB, BC, CD,$
 DA 边的中点,依次连接各中点
 所得的四边形 $EFGH$ 叫做四边
 形 $ABCD$ 的中点四边形. 不难
 发现,任意四边形 $ABCD$ 的中点四边形 $EFGH$ 都是
 平行四边形. 你知道其中的道理吗? 想一想,你还会
 会有很多发现哦!



自主学习

教材导读

1. _____ 叫做三角形的中位
 线,任何三角形都有 _____ 条中位线. 三角形的中线是
 指三角形中 _____, 任何三角形都有
 _____ 条中线,并且这三条中线必定 _____.

2. 阅读教材 p48“探究”及证明的内容,解决下
 面的问题:

(1)“探究”中,我们应该采用怎样合理的方法
 说明 $\triangle ABC$ 的中位线 DE 与边 BC 的位置关系是平
 行的?

(2)在证明三角形中位线定理时,采用的辅助
 线是:①“延长 DE 到点 F ,使 $EF=DE$ ”,这样的辅助
 线一般在遇到三角形中线的时候采用,叫做
 _____,其目的是 _____;
 ②在辅助线①的基础上,“连接 $FC, DC,$
 AF ”,其作用是 _____.

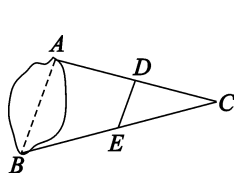
(3)三角形的中位线 _____ 三角形的第三
 边,并且 _____.

(4)教材 p48 证明定理的思路是什么? 你是如
 何想到的?

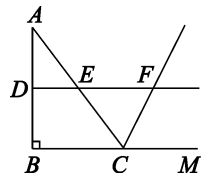
3. 完成教材 p49 的练习.

自主测评

1. 如图, A, B 两点分别位于一个池塘的两端,小
 明想用绳子测量 A, B 间的距离,但绳子不够长,
 一位同学帮他想了一个主意:先在地上确定一点 C ,找
 到 AC, BC 的中点分别为点 D, E ,并且测出 DE 的长
 为 15 m. 由此可得 A, B 两点间的距离为 _____ m.



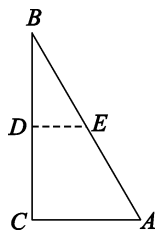
(第 1 题)



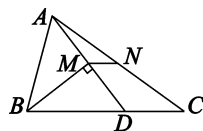
(第 2 题)

2. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ, AB = 8, BC = 6$.
 若 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线,延长 DE 交 $\triangle ABC$ 的外
 角 $\angle ACM$ 的平分线于点 F ,则线段 DF 的长为
 _____.

3. 如图,将一张直角三角形纸片 ABC 沿中位线
 DE 剪开后,在平面上将 $\triangle BDE$ 绕着 CB 的中点 D
 逆时针旋转 180° ,点 E 到了点 E' 的位置,则四边形
 $ACE'E$ 的形状是 _____.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,点 D 在 BC 上, $BD = AB$,
 $BM \perp AD$ 于点 M, N 是 AC 的中点,连接 MN . 若 $AB =$
 $5, BC = 8$,则 $MN =$ _____.

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

三角形有几条中位线? 所有中位线所围成的图形
 与原三角形有哪些关系?

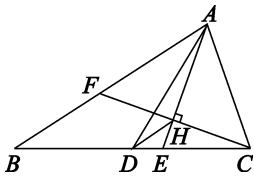


合作学习

难点探究

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5, AC = 3, AD, AE$ 分别
 为 $\triangle ABC$ 的中线和角平分线,过点 C 作 $CH \perp AE$ 于

点 H , 并延长交 AB 于点 F , 连接 DH , 求线段 DH 的长.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



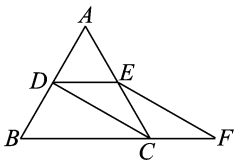
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

1. 如图,等边三角形 ABC 的边长是 2, D, E 分别为 AB, AC 的中点,延长 BC 至点 F ,使 $CF = \frac{1}{2}BC$,连接 CD 和 EF .

- (1) 求证: $DE = CF$;
- (2) 求 EF 的长.



2. 解决“问题导学”中提出的问题.



归纳梳理

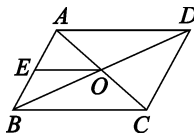
- 1. 三角形的中位线定理: 三角形的中位线平行于三角形的第三边, 且等于第三边的一半.
- 2. 遇到有关中点的问题时, 一般会构造三角形的中位线, 利用三角形的中位线定理使问题得到解决.



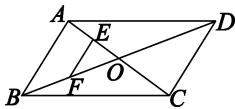
深化拓展

基础巩固

1. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O, E 是 AB 的中点, $OE = 5\text{ cm}$, 则 AD 的长为 cm .



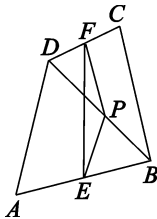
(第 1 题)



(第 2 题)

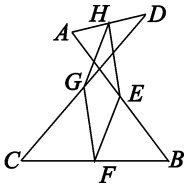
2. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O, E, F 分别是线段 AO, BO 的中点. 若 $AC + BD = 24\text{ cm}$, 则 $EF = \text{ cm}$.

3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, P 是对角线 BD 的中点, E, F 分别是 AB, CD 的中点, $AD = BC, \angle PEF = 18^\circ$, 则 $\angle PFE$ 的度数是 ° .



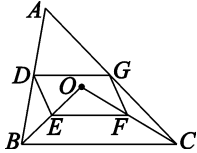
能力提升

4. 如图, E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点. 四边形 $EFGH$ 是平行四边形吗? 为什么?



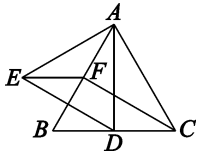
5. 如图, O 是 $\triangle ABC$ 内一点, 连接 OB, OC , 并将 AB, OB, OC, AC 的中点 D, E, F, G 依次连接, 得到四边形 $DEFG$.

求证: 四边形 $DEFG$ 是平行四边形.



6. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 D, F 分别在线段 BC, AB 上, $\angle EFB = 60^\circ, DC = EF$.

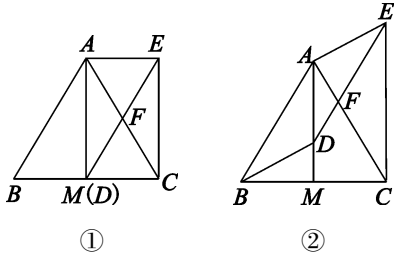
- (1) 求证: 四边形 $EFCD$ 是平行四边形;
- (2) 若 $BF = EF$, 求证: $AE = AD$.



拓展创新

7. 如图, AM 是 $\triangle ABC$ 的中线, D 是线段 AM 上一点 (不与点 A 重合), $DE \parallel AB$ 交 AC 于点 F , $CE \parallel AM$, 连接 AE .

- (1) 如图①, 当点 D 与点 M 重合时, 求证: 四边形 $ABDE$ 是平行四边形;
- (2) 如图②, 当点 D 不与点 M 重合时, (1) 中的结论还成立吗? 请说明理由.



18.2 特殊的平行四边形

18.2.1 矩形

第一学时



问题导学

同学们,矩形即我们通常说的长方形,对于矩形(长方形)我们并不陌生,但要使矩形更好地服务于我们的生活,那我们就必须更深入地研究和认识矩形的性质.

大家都知道矩形是一种特殊的平行四边形,那么矩形具有平行四边形的所有性质吗? 和平行四边形相比较,矩形有哪些特殊之处?

在研究平行四边形的性质时,我们分别从平行四边形的边、角、对角线以及对称性等方面进行研究,使我们更深刻地认识了平行四边形. 设想一下,我们应如何着手研究矩形的性质?



自主学习



教材导读

1. 阅读教材 p52 的内容,解决下面的问题:

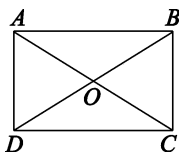
(1) _____ 叫做矩形,也就是 _____ 形.

(2) 矩形是特殊的平行四边形,因此它具有平行四边形的 _____ 性质,同时又具有一般平行四边形不具有的性质,如: _____. 由此可知,矩形与一般平行四边形相比,其特殊性表现在 _____ 和 _____ 两个方面.

(3) 说明矩形的四个角都是直角的理由.

(4) 证明命题“矩形的对角线相等”.

(5) 如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC, BD 相交于点 O , 则线段 OA, OB, OC, OD 有怎样的关系?

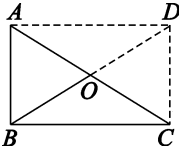


(6) 研究矩形的性质时,我们仍然可以从图形的 _____、_____ 和 _____ 三方面入手: 矩形的对边 _____, 矩形的每个角 _____, 矩形的对角线 _____.

2. 阅读教材 p53“思考”,解决下面的问题:

(1) 直角三角形斜边上的中线 _____.

(2) 如图,在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, O 为斜边 AC 的中点,连接 BO , 则 BO 与 AC 的数量关系是 _____.



我们可以用下面的方法验证上述结论的正确性:

如图,延长 BO 到点 D , 使 $BO = OD$, 连接 AD, DC .

$\because O$ 为 $\text{Rt} \triangle ABC$ 斜边 AC 的中点, 故 _____,

根据“对角线互相平分的四边形是平行四边形”可知, 四边形 $ABCD$ 是 _____.

又 $\because \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是 _____.

根据“矩形对角线互相平分且相等”可知, $OA = OB = OC = OD$, 即 _____.

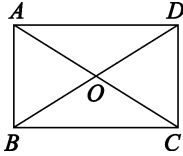
上述作辅助线的方法叫做 _____, 其目的是构造 _____, 通过矩形的性质验证直角三角形斜边上的中线所具有的性质.

3. 完成教材 p53 例 1, 思考: 矩形被对角线分成的四个三角形都是 _____ 三角形且它们的面积 _____, 当矩形对角线相交成 60° 角时, 对角线是矩形短边的 _____ 倍, 矩形长边是短边的 _____ 倍.

4. 完成教材 p53 练习第 2 题和第 3 题, 思考: 一般平行四边形是轴对称图形吗?

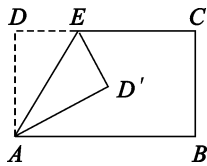
自主测评

1. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB < BC$, AC, BD 相交于点 O , 则图中等腰三角形的个数是 ()
- A. 8 B. 6
- C. 4 D. 2

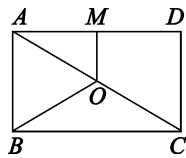


2. 在直角三角形中,两直角边长分别为 12 和 5, 则斜边上的中线长是 ()
- A. 26 B. 13
- C. 8.5 D. 6.5

3. 将矩形 $ABCD$ 沿 AE 折叠,得到如图所示的图形. 若 $\angle CED' = 56^\circ$, 则 $\angle AED$ 的大小是 _____.



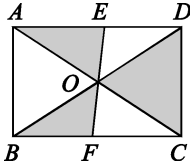
(第3题)



(第4题)

4. 如图, O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点, $OM \parallel AB$ 交 AD 于点 M . 若 $OM = 3, BC = 10$, 则 OB 的长为 _____.

5. 如图,矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 O , 过点 O 的直线分别交 AD 和 BC 于点 E, F , $AB = 2, BC = 3$, 则图中阴影部分的面积为 _____.



收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

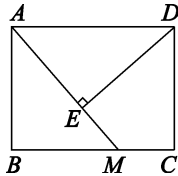
经过矩形对角线交点的任意一条直线把矩形分成两部分,这两部分的面积相等吗?为什么?



合作学习

难点探究

- 如图,在矩形 $ABCD$ 中, M 为 BC 边上一点,连接 AM , 过点 D 作 $DE \perp AM$, 垂足为 E . 若 $DE = DC = 1$, $AE = 2EM$, 则 BM 的长为 _____.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面

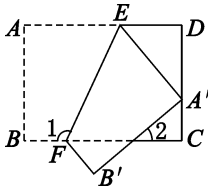


探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

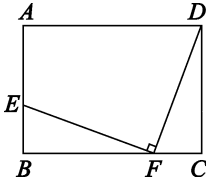
展示交流

1. 如图,把一张矩形纸片 $ABCD$ 沿 EF 折叠后,点 A 落在 CD 边上的点 A' 处,点 B 落在点 B' 处,若 $\angle 2 = 40^\circ$, 则图中 $\angle 1$ 的度数为 ()



- A. 115° B. 120°
- C. 130° D. 140°

2. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,点 E 在边 AB 上,点 F 在边 BC 上,且 $BE = CF, EF \perp DF$. 求证: $AD = BE + CD$.





归纳梳理

- 1. 分类归纳矩形的性质：
 - (1) 边：对边平行且相等；
 - (2) 角：四个角相等且都是直角；
 - (3) 对角线：对角线互相平分且相等；
 - (4) 三角形：被对角线分成的四个三角形都是等腰三角形；
 - (5) 对称性：是轴对称图形。
- 2. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。
- 3. 矩形是特殊的平行四边形，与平行四边形相比，矩形的角和对角线具有特殊性。

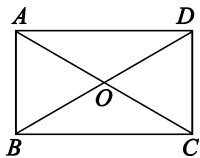


深化拓展

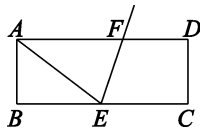
基础巩固

- 1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 相交于点 O ， $\angle AOB = 60^\circ$ ， $AC = 6$ cm，则 AB 的长是 ()

- A. 3 cm B. 6 cm
- C. 10 cm D. 12 cm



(第1题)



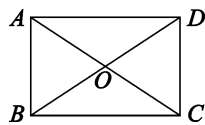
(第2题)

- 2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， E 为 BC 的中点，作 $\angle AEC$ 的平分线交 AD 于点 F 。若 $AB = 6$ ， $AD = 16$ ，则 FD 的长度为 ()

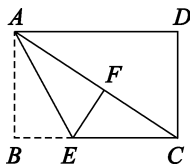
- A. 4 B. 5
- C. 6 D. 8

- 3. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O ，若 $AB = AO$ ，则 $\angle ABD$ 的度数是 ()

- A. 75° B. 60°
- C. 45° D. 30°



(第3题)



(第4题)

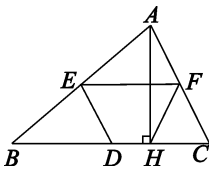
- 4. 如图，在矩形纸片 $ABCD$ 中，已知 $AD = 8$ ，折叠纸片使 AB 边落在对角线 AC 上，点 B 落在点 F

处，折痕为 AE ，且 $EF = 3$ ，则 AB 的长为 ()

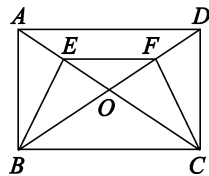
- A. 3 B. 4
- C. 5 D. 6

能力提升

- 5. 如图， D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 各边的中点， AH 是高，如果 $ED = 5$ cm，那么 HF 的长是 _____。



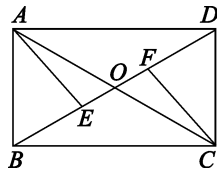
- 6. 如图， E, F 分别是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 上的点，且 $AE = DF$ 。求证： $BE = CF$ 。



拓展创新

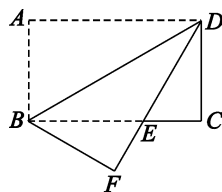
- 7. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O ，点 E, F 在 BD 上， $BE = DF$ 。

- (1) 求证： $AE = CF$ ；
- (2) 若 $AB = 6$ ， $\angle COD = 60^\circ$ ，求矩形 $ABCD$ 的面积。



- 8. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，使点 A 落在平面上的点 F 处， DF 交 BC 于点 E 。

- (1) 求证： $\triangle DCE \cong \triangle BFE$ ；
- (2) 若 $CD = 2$ ， $\angle ADB = 30^\circ$ ，求 BE 的长。

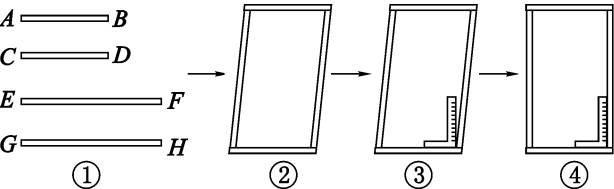


第二学时



问题导学

工人师傅做矩形窗框时分下面几个步骤进行, 如图所示.



首先截出两对符合规格的材料, 如图①, 使 $AB=CD, EF=GH$; 其次摆成如图②所示的四边形; 接着用直角尺紧靠窗框的一个角, 如图③, 调整窗框的边框, 当直角尺的两条直角边与窗框无缝隙时, 如图④, 则说明窗框是合格的. 你知道这样做的道理吗?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 p54 第一个“思考”的相关内容, 完成下列问题:

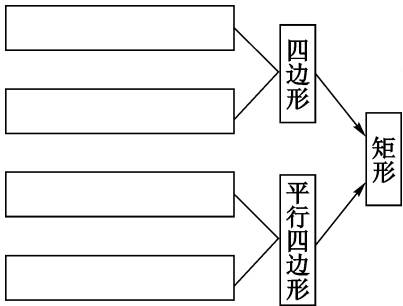
(1) 请证明矩形的判定定理“对角线相等的平行四边形是矩形”.

(2) 对角线互相平分且相等的四边形是矩形吗? 为什么?

2. 阅读教材 p54 第二个“思考”的相关内容, 得到矩形的另一个判定定理: _____.

3. 归纳矩形的判定方法:
- (1) _____;
 - (2) _____;
 - (3) _____;
 - (4) _____.

用图表表示为:



4. 解决“问题导学”中提出的问题, 你还有另外的方法检验图④中得到的四边形一定是矩形吗?

自主测评

1. 在数学活动课上, 老师要求同学们判断一个四边形的门框是否为矩形, 下面是某合作学习小组的四位同学拟订的方案, 其中正确的是 ()

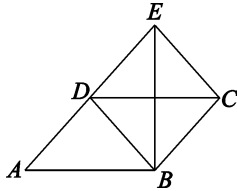
- A. 测量对角线是否互相平分
- B. 测量两组对边是否分别相等
- C. 测量对角线是否垂直
- D. 测量其内角是否有三个直角

2. 在 $\square ABCD$ 中, $AB=3, BC=4$, 当 $\square ABCD$ 的面积最大时, 下列结论: ① $AC=5$; ② $\angle A + \angle C = 180^\circ$; ③ $AC \perp BD$; ④ $AC=BD$. 其中正确的有 ()

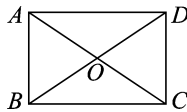
- A. ①②③
- B. ①②④
- C. ②③④
- D. ①③④

3. 如图, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 延长 AD 至点 E , 使 $DE=AD$, 连接 EB, EC, DB . 下列条件, 不能使四边形 $DBCE$ 成为矩形的是 ()

- A. $AB=BE$
- B. $BE \perp DC$
- C. $\angle ADB=90^\circ$
- D. $CE \perp DE$



(第3题)



(第4题)

4. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=DC, AD=BC$, 连接 AC, BD, AC 与 BD 相交于点 O . 若 $AO=BO, AD=3, AB=2$, 则四边形 $ABCD$ 的面积是 _____.

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面





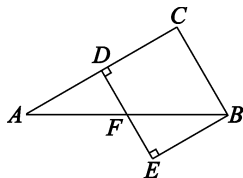
合作学习



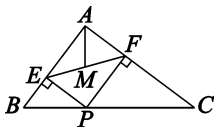
难点探究

1. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, AC 的垂直平分线分别交 AC,AB 于点 D,F , $BE \perp DF$ 于点 E ,已知 $\angle A = 30^\circ$, $BC = 2,AF = BF$,则四边形 $BCDE$ 的面积是 ()

- A. $2\sqrt{3}$
- B. $3\sqrt{3}$
- C. 4
- D. $4\sqrt{3}$



(第1题)



(第2题)

2. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3,AC = 4,BC = 5,P$ 为边 BC 上一动点, $PE \perp AB$ 于点 $E,PF \perp AC$ 于点 F,M 为 EF 的中点,则 AM 的最小值为 _____.

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



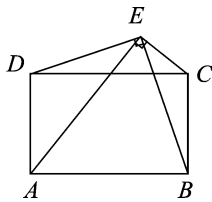
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!



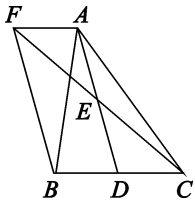
展示交流

1. 如图, E 为 $\square ABCD$ 外一点, $AE \perp CE, BE \perp DE$. 求证: $\square ABCD$ 为矩形.



归纳梳理

- 1. 矩形的判定方法:
 - (1) 有一个角是直角的平行四边形是矩形;
 - (2) 对角线相等的平行四边形是矩形;
 - (3) 三个角都是直角的四边形是矩形;
 - (4) 对角线互相平分且相等的四边形是矩形.
- 2. 矩形的实际应用.

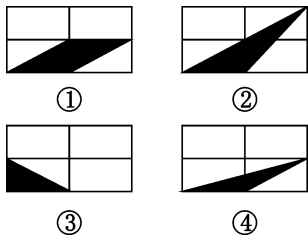




深化拓展

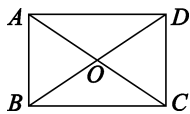
基础巩固

1. 如图,将四个全等的矩形分别等分成四个全等的小矩形,其中阴影部分面积相等的是 ()

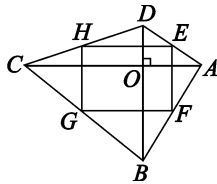


- A. 只有①和②相等
- B. 只有③和④相等
- C. 只有①和④相等
- D. ①和②,③和④分别相等

2. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $OA=3$. 若四边形 $ABCD$ 是矩形,则 OB 的长为 _____.



(第2题)

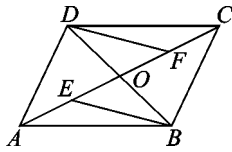


(第3题)

3. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 $AC \perp BD$,垂足为 O ,点 E, F, G, H 分别为边 AD, AB, BC, CD 的中点. 若 $AC=8, BD=6$, 则四边形 $EFGH$ 的面积为 _____.

能力提升

4. 如图,四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 已知 O 是 AC 的中点, 点 E, F 分别在 OA, OC 上, 且 $AE=CF, DF \parallel BE$.

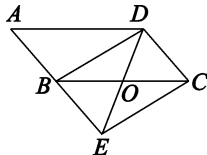


- (1) 求证: $\triangle BOE \cong \triangle DOF$;
- (2) 若 $OD = \frac{1}{2}AC$, 则四边形 $ABCD$ 是什么特殊四边形? 并说明理由.

拓展创新

5. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中, O 是边 BC 的中点, 连接 DO 并延长, 交 AB 的延长线于点 E , 连接 BD, EC .

- (1) 求证: 四边形 $BECD$ 是平行四边形;
- (2) 若 $\angle A=50^\circ$, 则当 $\angle BOD$ 等于多少度时, 四边形 $BECD$ 是矩形? 请说明理由.

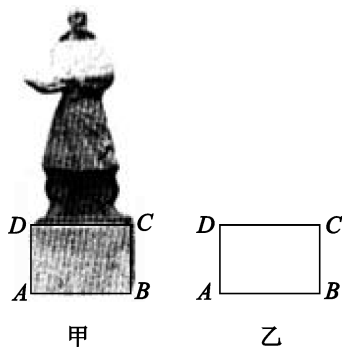


第三学时



问题导学

如图甲,李叔叔想要检测雕塑底座正面四边形 $ABCD$ 是否为矩形,但他只带了有刻度的卷尺.请你设计一种方案,帮助李叔叔检测四边形 $ABCD$ 是否为矩形(图乙供设计用).



自主学习



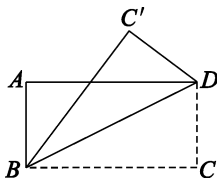
教材导读

- 1. 完成教材 p54 例 2,思考:
(1) 例 2 中四边形 $ABCD$ 是矩形的判断依据是什么?
(2) 例 2 中,条件“ $OA=OD$ ”的作用是什么?
- 2. 完成教材 p55 的练习,思考:第 1 题在一条对角线上布置的花盆数目分别为偶数和奇数时,对另一条对角线用的花盆数目有哪些影响? 第 2 题运用了矩形的哪个判定方法?
- 3. 解决“问题导学”中提出的问题.

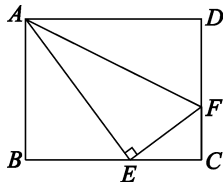
自主测评

1. 如图,将矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠,使点 C 和点 C' 重合.若 $AB=2$,则 $C'D$ 的长为 ()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4



(第 1 题)



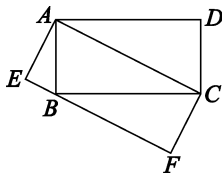
(第 2 题)

2. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4,BC=5,AF$ 平分 $\angle DAE,EF \perp AE$,则 CF 等于 ()

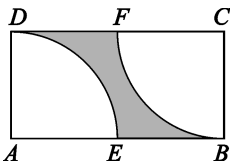
- A. $\frac{2}{3}$
- B. 1
- C. $\frac{3}{2}$
- D. 2

3. 如图,四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFC$ 是两个矩形,点 B 在 EF 边上.若矩形 $ABCD$ 和矩形 $AEFC$ 的面积分别是 S_1,S_2 ,则 S_1,S_2 的大小关系是 ()

- A. $S_1>S_2$
- B. $S_1=S_2$
- C. $S_1<S_2$
- D. $3S_1=2S_2$



(第 3 题)



(第 5 题)

4. 在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O .若 $\angle AOB=60^\circ,AC=10$,则 $AB=$.

5. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4,AD=2$,分别以点 A,C 为圆心, AD,CB 长为半径画弧,交 AB 于点 E ,交 CD 于点 F ,则图中阴影部分的面积是 .

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

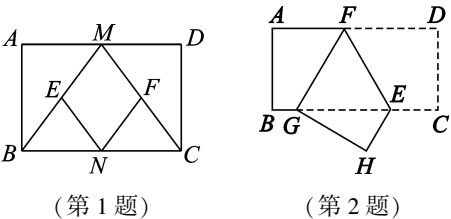


合作学习



难点探究

1. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, M,N 分别是边 AD,BC 的中点, E,F 分别是线段 BM,CM 的中点.若 $AB=8,AD=12$,则四边形 $ENFM$ 的周长为_____.



2. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,点 F 在 AD 上,点 E 在 BC 上,把这个矩形沿 EF 折叠后,使点 D 恰好落在 BC 边上的点 G 处.若矩形 $ABCD$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, $\angle AFG=60^\circ,GE=2BG$,则折痕 EF 的长为 ()

- A. 1
- B. $\sqrt{3}$
- C. 2
- D. $2\sqrt{3}$

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

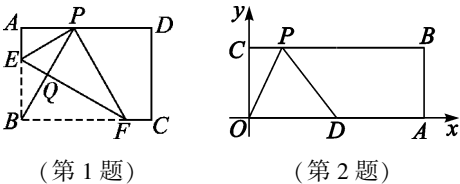
问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

1. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,点 E,F 分别在边 AB,BC 上,且 $AE=\frac{1}{3}AB$,将矩形沿直线 EF 折叠,点 B 恰好落在 AD 边上的点 P 处,连接 BP 交 EF 于点 Q ,对于下列结论:① $EF=2BE$;② $PF=2PE$;③ $FQ=4EQ$;④ $\triangle PBF$ 是等边三角形.其中正确的是 ()

- A. ①②
- B. ②③
- C. ①③
- D. ①④



2. 如图,在平面直角坐标系中,矩形 $OABC$ 的顶点 A,C 的坐标分别为 $(10,0),(0,4)$, D 是 OA 的中点,点 P 在 BC 上运动,当 $\triangle ODP$ 是腰长为 5 的等腰三角形时,点 P 的坐标为_____.



归纳梳理

- 1. 矩形的性质在生活中的应用.
- 2. 增强应用矩形的性质及判定的意识和能力.

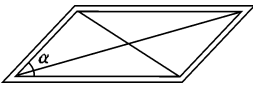


深化拓展



基础巩固

1. 如图,一个平行四边形的活动框架,对角线是两根橡皮筋.若改变框架的形状,则两邻边的夹角 $\angle\alpha$ 也随之变化,两条对角线长度也在发生改变.当两条对角线长度相等时, $\angle\alpha$ 的度数是 ()

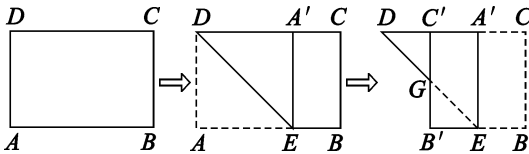


- A. 30°
- B. 45°
- C. 60°
- D. 90°

2. 已知四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O ,以下条件不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形的是 ()

- A. $AB=CD,AD=BC,\angle A=90^\circ$
- B. $OA=OB=OC=OD$
- C. $AB=CD,AB\parallel CD,AC=BD$
- D. $AB=CD,AB\parallel CD,OA=OC,OB=OD$

3. 一张矩形纸片 $ABCD,AB=3,AD=2$,小敏按如图所示的步骤折叠纸片,则线段 DG 的长为 ()

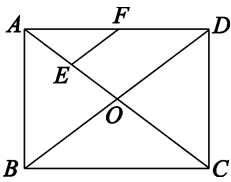


- A. $\sqrt{2}$
- B. $2\sqrt{2}$



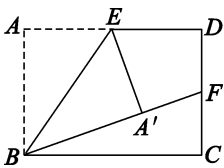
C. 1 D. 2

4. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC, BD 相交于点 O , E, F 分别是 AO, AD 的中点. 若 $AB=6\text{ cm}, BC=8\text{ cm}$, 则 $\triangle AEF$ 的周长 = $\rule{1cm}{0.4pt}$ cm .



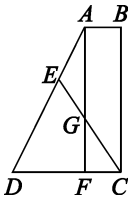
能力提升

5. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1$, E, F 分别为 AD, CD 的中点,沿 BE 将 $\triangle ABE$ 折叠. 若点 A 恰好落在 BF 上的点 A' 处, 则 $AD = \rule{1cm}{0.4pt}$.



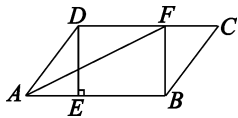
6. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC, \angle B=90^\circ$, F 为 DC 上一点,且 $FC=AB$, E 为 AD 上一点, EC 交 AF 于点 G .

- (1) 求证: 四边形 $ABCF$ 是矩形;
- (2) 若 $ED=EC$, 求证: $EA=EG$.



7. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 点 F 在边 CD 上, $DF=BE$, 连接 AF, BF .

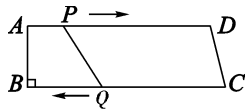
- (1) 求证: 四边形 $BFDE$ 是矩形;
- (2) 若 $CF=3, BF=4, DF=5$, 求证: AF 平分 $\angle DAB$.



拓展创新

8. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, \angle B=90^\circ$, $AB=8\text{ cm}, AD=24\text{ cm}, BC=26\text{ cm}$, 点 P 从点 A 出发,以 1 cm/s 的速度向点 D 运动;同时点 Q 从点 C 出发,以 3 cm/s 的速度向点 B 运动.

- (1) 从运动开始,经过多长时间以点 P, Q, C, D 为顶点的四边形是平行四边形?
- (2) 从运动开始,经过多长时间以点 A, B, Q, P 为顶点的四边形是矩形?



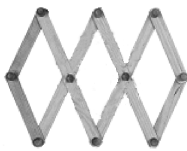
18.2.2 菱形

第一学时



问题导学

同学们,请欣赏下面美丽的图片,这些图片中都有菱形.如中央电视台大楼外墙的菱形钢网结构,伸缩门的菱形连接结构,活动衣帽架,美丽的中国结等.



你知道什么样的图形是菱形吗?你知道菱形和平行四边形的关系吗?你知道菱形都具有哪些性质吗?



自主学习

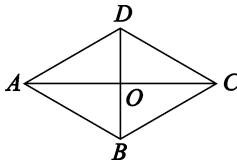
教材导读

1. _____ 的平行四边形是菱形,由此可知,菱形是 _____ 的平行四边形.
2. 阅读教材 p55“思考”至 p56 例 3 上面的内容,完成下列问题:
- (1)从菱形的 _____、_____ 和 _____ 三方面研究发现,菱形除具有一般平行四边形的 _____ 性质外,还具有下列性质:① _____; ② _____.
- (2)说明“菱形的四条边都相等”的原因.

(3)证明“菱形的两条对角线互相垂直,并且每一条对角线平分一组对角”.

3. 由“菱形的对角线互相平分、互相垂直”可知,菱形被对角线分成了 _____ 个 _____ 的 _____ 三角形,菱形的面积等于 _____,菱形还是轴对称图形,它有 _____ 条对称轴,分别是 _____.

4. 如图,在菱形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 DB 相交于点 O , $\angle DAB = 60^\circ$, $AB = 30$ cm, 则 $DB =$ _____ cm, $AC =$ _____ cm,菱形的面积为 _____ cm^2 .

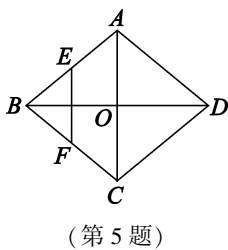
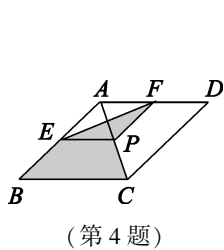


5. 完成教材 p57 的练习.

自主测评

1. 菱形具有而矩形不一定具有的性质是 ()
- A. 对角线互相垂直
B. 对角线相等
C. 对角线互相平分
D. 对角互补
2. 菱形的周长为 100 cm, 一条对角线长为 14 cm, 则它的面积是 ()
- A. 168 cm^2 B. 336 cm^2
C. 672 cm^2 D. 84 cm^2
3. 已知菱形的边长为 6, 一个内角为 60° , 则菱形较短的对角线长是 ()
- A. $3\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{3}$
C. 3 D. 6
4. 如图,菱形 $ABCD$ 的对角线的长分别为 2 和 5, P 是对角线 AC 上任意一点 (点 P 不与点 A, C 重合), 且 $PE \parallel BC$ 交 AB 于点 E , $PF \parallel CD$ 交 AD 于点 F , 则阴影部分的面积是 _____.





5. 如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , E, F 分别是 AB, BC 边上的中点, 连接 EF , 若 $EF = \sqrt{3}, BD = 4$, 则菱形 $ABCD$ 的周长为 _____.

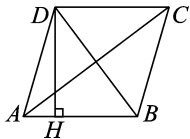
收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

顺次连接菱形四边中点得到的四边形是什么四边形? 为什么?

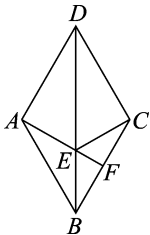
合作学习

难点探究

1. 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC = 8, DB = 6, DH \perp AB$ 于点 H , 则 DH 等于 ()
- A. $\frac{24}{5}$ B. $\frac{12}{5}$
C. 5 D. 4



2. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, F 是 BC 上任意一点, 连接 AF 交对角线 BD 于点 E , 连接 EC .
- (1) 求证: $AE = EC$;
- (2) 当 $\angle ABC = 60^\circ, \angle CEF = 60^\circ$ 时, 点 F 在线段 BC 上的什么位置? 并说明理由.



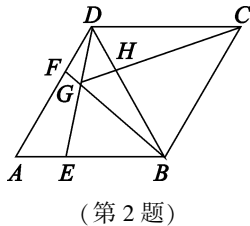
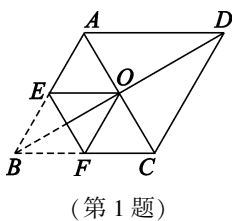
组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面

探究展示

问题共析 要积极发言, 及时总结哦!

展示交流

1. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 $O, AC = 2, BD = 2\sqrt{3}$, 将菱形 $ABCD$ 按如图所示的方式折叠, 使点 B 与点 O 重合, 折痕为 EF , 则五边形 $AEFCD$ 的周长为 _____.



2. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = BD$, 点 E, F 分别在 AB, AD 上, 且 $AE = DF$. 连接 BF, DE , BF 与 DE 相交于点 G , 连接 CG , 与 BD 相交于点 H . 下列结论: ① $\triangle AED \cong \triangle DFB$; ② $\angle EGB = 60^\circ$; ③ $\angle EDB = \angle ABF$; ④ $CG = DB$. 其中正确结论的序号是 _____.

归纳梳理

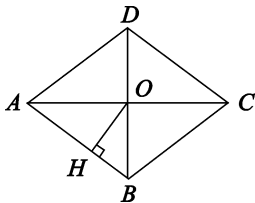
1. 菱形的性质:
- (1) 菱形的两组对边分别平行, 四条边都相等;
 - (2) 菱形的两组对角分别相等;
 - (3) 菱形的两条对角线互相垂直平分, 并且每一条对角线平分一组对角;
 - (4) 菱形是轴对称图形, 它有两对称轴, 对角线所在直线即是对称轴;
 - (5) 菱形的对角线将菱形分成四个全等的直角三角形.
2. 菱形的面积等于对角线长乘积的一半.
3. 菱形、矩形、一般平行四边形的联系与区别.



深化拓展

基础巩固

1. 如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 且 $AC=8, BD=6$. 过点 O 作 $OH \perp AB$, 垂足为 H , 则点 O 到边 AB 的距离 $OH=$ _____.



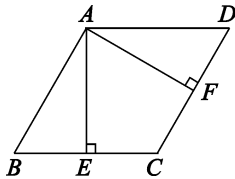
2. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, $AE \perp BC$ 于点 $E, AF \perp CD$ 于点 F , 且 E, F 分别为 BC, CD 的中点, 则 $\angle EAF$ 等于 _____ ()

A. 75°

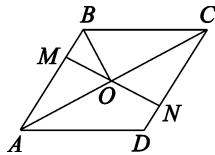
B. 60°

C. 45°

D. 30°



(第2题)



(第3题)

3. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, M, N 分别在 AB, CD 上, 且 $AM=CN$, MN 与 AC 交于点 O , 连接 BO . 若 $\angle DAC=28^\circ$, 则 $\angle OBC$ 的度数为 _____ ()

A. 28°

B. 52°

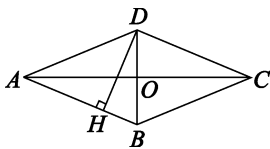
C. 62°

D. 72°

4. 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD=60^\circ, AB=6$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 点 E 在 AC 上, 若 $OE=\sqrt{3}$, 则 CE 的长为 _____.

能力提升

5. 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC=24, BD=10$, $DH \perp AB$ 于点 H , 则线段 BH 的长为 _____.

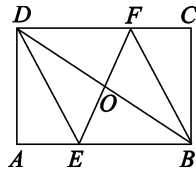


拓展创新

6. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6, BC=4$, 过对角线 BD 的中点 O 的直线分别交 AB, CD 边于点 E, F .

(1) 求证: 四边形 $BEDF$ 是平行四边形;

(2) 当四边形 $BEDF$ 是菱形时, 求 EF 的长.



第二学时

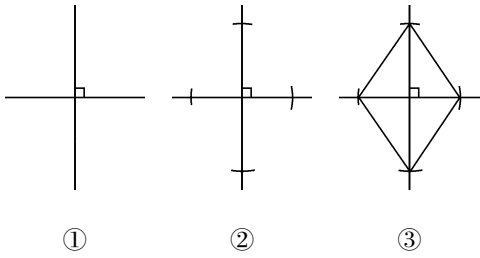


问题导学

同学们,我们知道菱形是特殊的平行四边形,你知道经过怎样的操作可以将一个平行四边形框架变成菱形框架吗?

小亮是一个善动脑、爱钻研的学生,在学习了菱形的性质后,他又开始了他的奇思异想. 首先他画了两条互相垂直的直线(如图①),然后以这两条直线的交点为端点,分别在每一条直线上截取两条等长的线段(如图②),依次连接各截点得到一个四边形(如图③). 小亮认为这个四边形一定是菱形. 你认为小亮的观点正确吗? 为什么?

你知道菱形的判定方法有哪些吗?



自主学习

教材导读

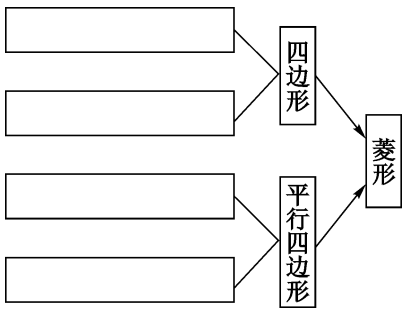
1. 阅读教材 p57 例 4 上面的有关内容,请证明菱形的判定定理“对角线互相垂直的平行四边形是菱形”.

2. 完成例 4. 例 4 中,证明 $\square ABCD$ 是菱形的依据是_____.

3. 阅读教材 p57 “思考”,总结菱形的判定方法有:

- (1) _____;
- (2) _____;
- (3) _____;
- (4) _____.

用图表表示为:

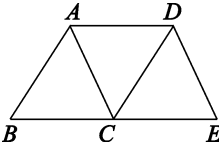


4. 完成教材 p58 的练习.

自主测评

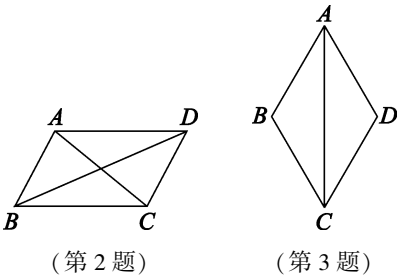
1. 如图,将 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移得到 $\triangle DCE$, 连接 AD , 下列条件中能够判定四边形 $ACED$ 为菱形的是 ()

- A. $AB = BC$
- B. $AC = BC$
- C. $\angle B = 60^\circ$
- D. $\angle ACB = 60^\circ$



2. 如图,下列条件之一能使平行四边形 $ABCD$ 是菱形的是 ()

- ① $AC \perp BD$; ② $\angle BAD = 90^\circ$;
- ③ $AB = BC$; ④ $AC = BD$.
- A. ①或③
- B. ②或③
- C. ③或④
- D. ①或②或③

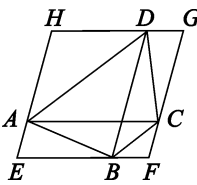


3. 如图,四边形 $ABCD$ 的四边相等,且面积为 120 cm^2 , 对角线 $AC = 24 \text{ cm}$, 则四边形 $ABCD$ 的周长为 ()

- A. 52 cm
- B. 40 cm
- C. 39 cm
- D. 26 cm

4. 如图,过四边形 $ABCD$ 的各顶点作对角线 BD, AC 的平行线,围成四边形 $EFGH$. 若四边形 $EFGH$ 是菱形,则原四边形一定是 ()

- A. 菱形
- B. 平行四边形
- C. 矩形
- D. 对角线相等的四边形



收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

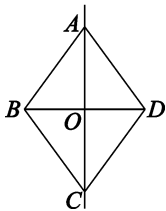
对角线平分对角的平行四边形是菱形吗?



合作学习

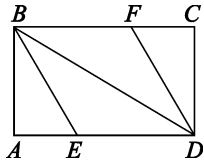
难点探究

1. 如图, 四边形 $ABCD$ 是轴对称图形, 且直线 AC 是对称轴, $AB \parallel CD$, 则下列结论: ① $AC \perp BD$; ② $AD \parallel BC$; ③ 四边形 $ABCD$ 是菱形; ④ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. 其中正确的是 (只填写序号).



2. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle ABD, \angle CDB$ 的平分线 BE, DF 分别交边 AD, BC 于点 E, F .

- (1) 求证: 四边形 $BEDF$ 是平行四边形;
- (2) 当 $\angle ABE$ 为多少度时, 四边形 $BEDF$ 是菱形? 请说明理由.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



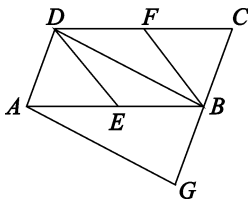
探究展示

问题共析 要积极发言, 及时总结哦!

展示交流

如图, 在 $\square ABCD$ 中, E, F 分别为边 AB, CD 的中点, BD 是对角线, 过点 A 作 $AG \parallel DB$ 交 CB 的延长线于点 G .

- (1) 求证: $DE \parallel BF$;
- (2) 若 $\angle G = 90^\circ$, 则四边形 $DEBF$ 是菱形吗? 为什么?



归纳梳理

- 1. 菱形的判定方法:
 - (1) 一组邻边相等的平行四边形是菱形;
 - (2) 对角线互相垂直的平行四边形是菱形;
 - (3) 四条边相等的四边形是菱形.
- 2. 证明菱形的一般思路: 先证明四边形是平行四边形, 再证明一组邻边相等或对角线互相垂直; 或直接证明四条边相等; 或直接证明四边形的对角线互相平分且垂直.



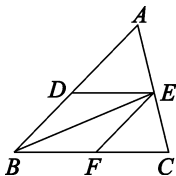


深化拓展

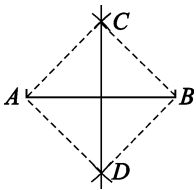
基础巩固

1. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$, 要判定四边形 $DBFE$ 是菱形, 还需要添加的条件是 ()

- A. $AB = AC$
- B. $AD = BD$
- C. $BE \perp AC$
- D. BE 平分 $\angle ABC$



(第1题)



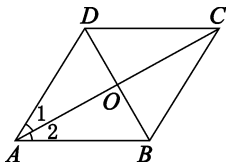
(第2题)

2. 如图,小聪在作线段 AB 的垂直平分线时,他是这样操作的:分别以点 A 和点 B 为圆心,大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧,两弧相交于点 C, D , 则直线 CD 即为所求. 根据他的作图方法可知四边形 $ADBC$ 一定是 ()

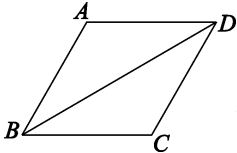
- A. 矩形
- B. 菱形
- C. 一般的四边形
- D. 平行四边形

3. 如图,在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 添加下列条件不能判定 $\square ABCD$ 是菱形的是 ()

- A. $AC \perp BD$
- B. $AB = BC$
- C. $AC = BD$
- D. $\angle 1 = \angle 2$



(第3题)



(第4题)

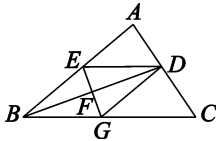
4. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $\angle ABD = 30^\circ$, 则菱形 $ABCD$ 的面积是 ()

- A. 18
- B. $18\sqrt{3}$
- C. 36
- D. $36\sqrt{3}$

5. 已知 $\square ABCD$ 的对角线相交于点 O , 分别添加下列条件: ① $\angle ABC = 90^\circ$; ② $AC \perp BD$; ③ $AB = BC$; ④ AC 平分 $\angle BAD$; ⑤ $AO = OD$. 其中能使 $\square ABCD$ 是菱形的条件的序号是 _____.

能力提升

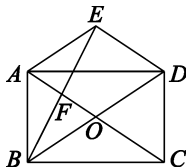
6. 如图, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 它的垂直平分线分别交 AB, BD, BC 于点 E, F, G , 连接 ED, DG . 请判断四边形 $EBGD$ 的形状, 并说明理由.



拓展创新

7. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 过点 A 作 $AE \parallel BD$, 过点 D 作 $ED \parallel AC$, 两线相交于点 E .

- (1) 求证: 四边形 $AODE$ 是菱形;
- (2) 连接 BE , 交 AC 于点 F , 若 $BE \perp ED$ 于点 E , 求 $\angle AOD$ 的度数.



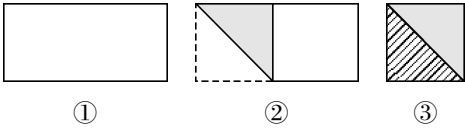
18.2.3 正方形

第一学时



问题导学

同学们,如图①是一张矩形纸片,你能用这张矩形纸片裁剪出一个面积最大的正方形吗?



小敏同学是这样做的:首先以经过矩形一个顶点的直线为折痕折叠矩形,将矩形的短边叠在长边上,如图②;将重叠部分裁剪下来并展开,就得到一个正方形,如图③. 小敏的做法正确吗? 你知道小敏这样操作的依据是什么吗?

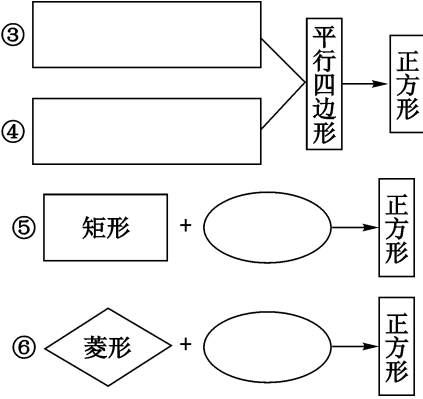
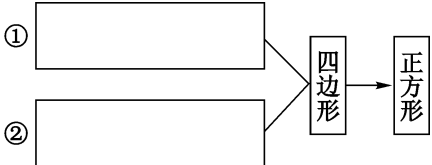


自主学习

教材导读

阅读教材 p58 例 5 上面的内容,尝试解决下面的问题:

- 1. 正方形的四条边_____,四个角_____.
- 因此,正方形既是矩形,又是菱形. 它同时具有_____和_____的性质.
- 2. 正方形的对角线_____.
- 3. 正方形是轴对称图形,它有_____条对称轴,分别是_____.
- 4. 教材 p58 图 18.2-11 表达了怎样的信息?
- 5. 填写下面图表,归纳正方形的判定方法:



自主测评

- 1. 下列说法不正确的是 ()
 - A. 有一个角是直角的菱形是正方形
 - B. 两条对角线相等的菱形是正方形
 - C. 对角线互相垂直的矩形是正方形
 - D. 四条边都相等的四边形是正方形
- 2. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 4$,则以 AC 为边长的正方形 $ACEF$ 的周长为 ()
 - A. 14
 - B. 15
 - C. 16
 - D. 17
- 3. 如图,在正方形 $ABCD$ 中, $\angle DAF = 25^\circ$, AF 交对角线 BD 于点 E ,那么 $\angle BEC$ 等于 ()
 - A. 45°
 - B. 60°
 - C. 70°
 - D. 75°
- 4. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 E, F 分别在 CD, BC 上,且 $BF = CE$,连接 BE, AF , BE, AF 相交于点 G ,则下列结论不正确的是 ()
 - A. $BE = AF$
 - B. $\angle DAF = \angle BEC$
 - C. $\angle AFB + \angle BEC = 90^\circ$
 - D. $AG \perp BE$
- 5. 如图,将正方形纸片 $ABCD$ 按如图所示的方式折叠, AM 为折痕,点 B 落在对角线 AC 上的点 E 处,则 $\angle CME =$ _____.

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

顺次连接四边形各边中点得到正方形,则原四边形一定会满足哪些条件?



合作学习

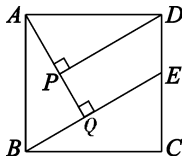


难点探究

如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 E 在边 CD 上, $AQ \perp BE$ 于点 Q , $DP \perp AQ$ 于点 P .

(1) 求证: $AP=BQ$;

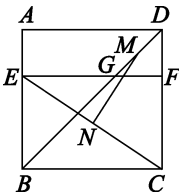
(2) 在不添加任何辅助线的情况下,请直接写出图中四对线段,使每对线段中较长线段与较短线段长度的差等于 PQ 的长.



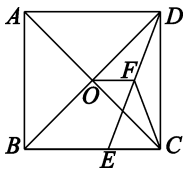
展示交流

1. 如图,四边形 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形,点 E 在边 AB 上, $BE=4$,过点 E 作 $EF \parallel BC$,分别交 BD,CD 于点 G,F ,若 M,N 分别是 DG,CE 的中点,则 MN 的长为 ()

- A. 3
- B. $2\sqrt{3}$
- C. $\sqrt{13}$
- D. 4



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O , E 为 BC 上一点, $CE=5$, F 为 DE 的中点. 若 $\triangle CEF$ 的周长为 18,则 OF 的长为 _____.



归纳梳理

1. 本学时知识框架:



2. 证明正方形的一般思路:

- (1) 矩形+一组邻边相等=正方形;
矩形+对角线互相垂直=正方形.
- (2) 菱形+一个角是直角=正方形;
菱形+对角线相等=正方形.
- (3) (四边形) 对角线互相平分+互相垂直+相等=正方形.
- (4) (四边形) 四条边都相等+四个角都是直角=正方形.

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

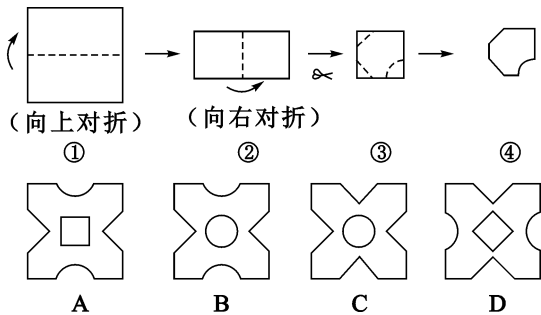
问题共析 要积极发言,及时总结哦!



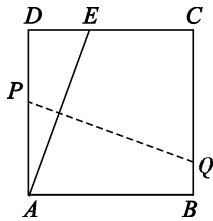
深化拓展

基础巩固

1. 菱形、矩形、正方形都具有的性质是 ()
- A. 对角线相等且互相平分
B. 对角线相等且互相垂直平分
C. 对角线互相平分
D. 四条边相等, 四个角相等
2. 将一个正方形纸片依次按图①、图②方式对折, 然后沿图③中的虚线裁剪, 最后将图④的纸片展开铺平, 所看到的图案是 ()

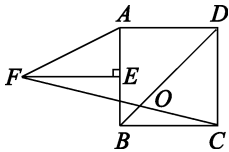


3. 如图, 将一块边长为 12 的正方形纸片 $ABCD$ 的顶点 A 折叠至 DC 边上的点 E 处, 使 $DE=5$, 折痕为 PQ , 则 PQ 的长为 ()

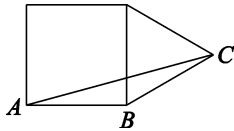


- A. 12 B. 13 C. 14 D. 15

4. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 为 AB 的中点, $FE \perp AB$, $AF=2AE$, FC 交 BD 于点 O , 则 $\angle DOC$ 的度数为 _____.



(第 4 题)

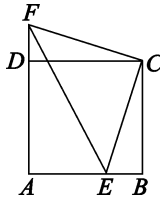


(第 5 题)

5. 将边长为 1 的一个正方形和一个等边三角形如图摆放, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

能力提升

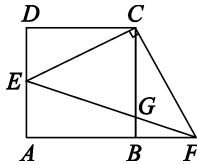
6. 如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形, E, F 分别是 AB 和 AD 延长线上的点, 且 $BE=DF$.
- (1) 求证: $CE=CF$;
(2) 求 $\angle CEF$ 的度数.



拓展创新

7. 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 点 E 在 AD 边上运动, 且不与点 A 和点 D 重合, 连接 CE , 过点 C 作 $CF \perp CE$ 交 AB 的延长线于点 F , 连接 EF 交 BC 于点 G .

- (1) 求证: $\triangle CDE \cong \triangle CBF$;
(2) 连接 AG , 在点 E 运动的过程中, 四边形 $CEAG$ 能否成为平行四边形? 若能, 求出此时 DE 的长; 若不能, 请说明理由.

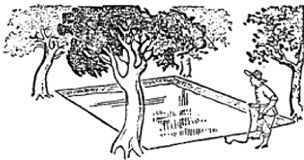


第二学时



问题导学

如图,有一正方形池塘,在它的四角上各有一棵大树,现在为了扩大池塘养鱼植藕,要把原有池塘扩大一倍,但是,这四棵树不便搬动,也不能使它们淹在水里,而且扩大后的池塘还是正方形,这该怎么办呢?



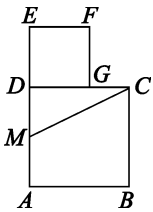
自主学习

教材导读

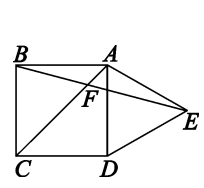
- 1. 完成教材 p58 例 5,并思考下列问题:
(1) 证明数学命题的一般步骤有哪些?
(2) 教材 p59 图 18. 2-12 中有几个等腰直角三角形?
- 2. 完成教材 p59“思考”.
- 3. 完成教材 p59 的练习.

自主测评

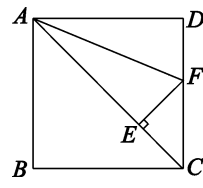
- 1. 下列命题中,假命题是 ()
A. 一组邻边相等的平行四边形是菱形
B. 一组邻边相等的矩形是正方形
C. 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形
D. 一组对边相等且有一个角是直角的四边形是矩形
- 2. 如图,在边长为 2 的正方形 ABCD 中,M 为边 AD 的中点,延长 MD 至点 E,使 ME=MC,以 DE 为边作正方形 DEFG,点 G 在边 CD 上,则 DG 的长为 ()
A. $\sqrt{3}-1$ B. $3-\sqrt{5}$
C. $\sqrt{5}+1$ D. $\sqrt{5}-1$



- 3. 如图,在正方形 ABCD 的外侧,作等边三角形 ADE. AC, BE 相交于点 F,则 $\angle BFC$ 为 ()
A. 45° B. 55°
C. 60° D. 75°



(第 3 题)



(第 4 题)

- 4. 如图,E 是正方形 ABCD 的对角线 AC 上一点,AE=AD,过点 E 作 AC 的垂线,交边 CD 于点 F,那么 $\angle FAD=$ _____ 度.

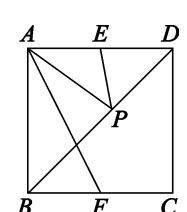
收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



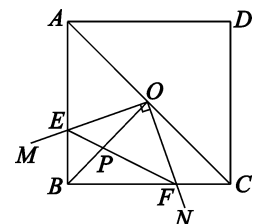
合作学习

难点探究

- 1. 如图,在正方形 ABCD 中,E, F 分别为 AD, BC 的中点,P 为对角线 BD 上的一个动点,则下列线段的长等于 AP+EP 最小值的是 ()
A. AB B. DE
C. BD D. AF



(第 1 题)



(第 2 题)

- 2. 如图,在正方形 ABCD 中,O 为对角线 AC 的中点,过点 O 作射线 OM, ON 分别交 AB, BC 于点 E, F,且 $\angle EOF=90^\circ$, BO, EF 交于点 P,则下列结论中:
① 图形中全等的三角形只有两对;② 正方形 ABCD 的面积等于四边形 OEBF 面积的 4 倍;③ $BE+BF=\sqrt{2}OA$;④ $AE^2+CF^2=EF^2$. 正确的结论有 ()
A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

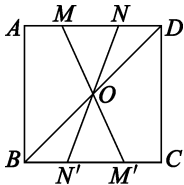
如图,在正方形 $ABCD$ 中,连接 BD , O 是 BD 的中点,若 M, N 是边 AD 上的两点,连接 MO, NO , 并分别延长交边 BC 于点 M', N' , 则图中的全等三角形共有 ()

- A. 2 对

B. 3 对

C. 4 对

D. 5 对



归纳梳理

1. 证明数学命题的一般步骤.

2. 正方形的性质和判定的实际应用.



深化拓展



基础巩固

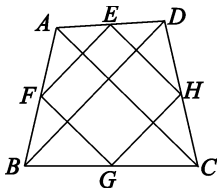
1. 如图,若顺次连接四边形 $ABCD$ 各边的中点 E, F, G, H 所得的四边形 $EFGH$ 是正方形, 则四边形 $ABCD$ 一定是 ()

- A. 正方形

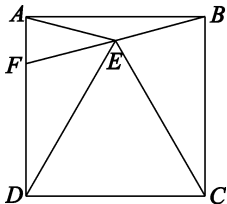
B. 对角线互相垂直的四边形

C. 对角线相等的四边形

D. 对角线互相垂直且相等的四边形



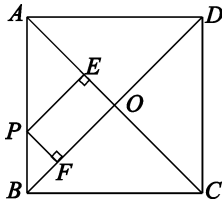
(第 1 题)



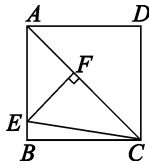
(第 2 题)

2. 如图, E 是正方形 $ABCD$ 内一点, $\triangle CDE$ 是等边三角形, 连接 EB, EA , 延长 BE 交边 AD 于点 F , 则 $\angle AFB$ 的度数是_____.

3. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 两条对角线 AC, BD 相交于点 O , P 是线段 AB 上任意一点, 过点 P 分别作线段 AC, BD 的垂线 PE, PF , 垂足分别为 E, F , 则 $PE+PF$ 的值为_____.



(第 3 题)



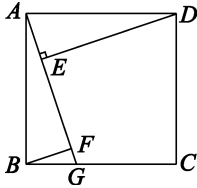
(第 4 题)

4. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, AC 为对角线, 点 E 在 AB 边上, $EF \perp AC$ 于点 F , 连接 EC , $AF = 3$, $\triangle EFC$ 的周长为 12, 则 EC 的长为_____.



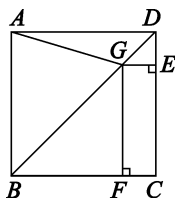
能力提升

5. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, G 是 BC 边上任意一点, 连接 $AG, DE \perp AG$ 于点 $E, BF \parallel DE$ 交 AG 于点 F , 探究线段 AF, BF, EF 三者之间的数量关系, 并说明理由.



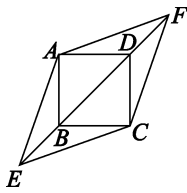
6. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 G 在对角线 BD 上(不与点 B, D 重合), $GE \perp DC$ 于点 E , $GF \perp BC$ 于点 F ,连接 AG .

- (1) 写出线段 AG, GE, GF 长度之间的数量关系,并说明理由;
(2) 若正方形 $ABCD$ 的边长为 1, $\angle AGF = 105^\circ$, 求线段 BG 的长.



7. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,对角线 BD 所在的直线上有两点 E, F ,且满足 $BE = DF$,连接 AE, AF, CE, CF .

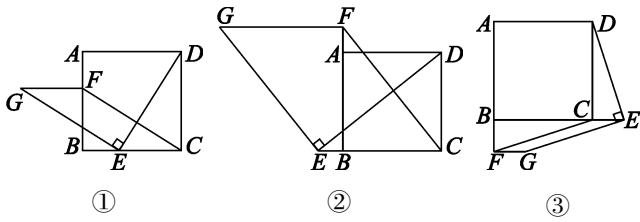
- (1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle ADF$;
(2) 试判断四边形 $AECF$ 的形状,并说明理由.



拓展创新

8. 如图①,在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是边 BC, AB 上的点,且 $CE = BF$. 连接 DE ,过点 E 作 $EG \perp DE$,使 $EG = DE$,连接 FG, FC .

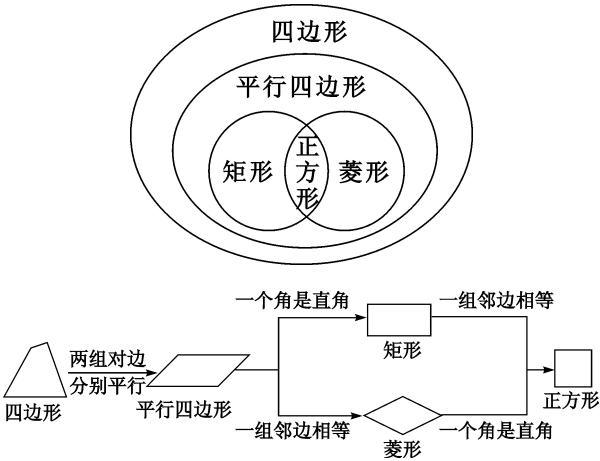
- (1) FG 与 CE 的数量关系是 _____, 位置关系是 _____;
(2) 如图②,若 E, F 分别是边 CB, BA 延长线上的点,其他条件不变,(1)中的结论是否仍然成立? 请作出判断并说明理由;
(3) 如图③,若 E, F 分别是边 BC, AB 延长线上的点,其他条件不变,(1)中的结论是否仍然成立? 请直接写出你的判断.



第十八章小结

第一学时

本章知识结构网络：



自主学习



教材导读

请同学们阅读教材 p66 的有关内容,并思考下列问题:

1. 说说本章所研究的所有特殊四边形的从属关系.

2. 平行四边形、矩形、菱形、正方形分别具有哪些性质? 如何分类?

从边、角、对角线、轴对称性四个方面归纳性质如下:

	边	角	对角线	轴对称性
平行四边形				
矩形				
菱形				
正方形				

3. 平行四边形、矩形、菱形和正方形有哪些判定方法? 如何分类研究?

从边、角和对角线三个方面进行判定:

	边	角	对角线
平行四边形			
矩形			
菱形			
正方形			

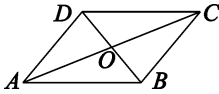
4. 各种特殊的四边形的面积如何计算?

自主测评

1. 下列命题中,真命题是 ()

- A. 对角线相等的四边形是矩形
- B. 对角线互相垂直的四边形是菱形
- C. 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形
- D. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

2. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 且 $AC+BD=16, CD=6$, 则 $\triangle ABO$ 的周长是 ()

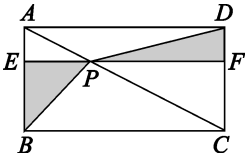


- A. 10
- B. 14
- C. 20
- D. 22

3. 已知 $\square ABCD$ 的周长为 36 cm, $AB = \frac{5}{7}BC$, 则较长边的长为 ()

- A. 15 cm
- B. 7.5 cm
- C. 21 cm
- D. 10.5 cm

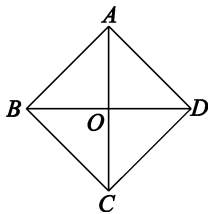
4. 如图, P 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点, 过点 P 作 $EF \parallel BC$, 分别交 AB, CD 于点 E, F , 连接 PB, PD . 若 $AE=2, PF=8$, 则图中阴影部分的面积为 ()



- A. 10
- B. 12
- C. 16
- D. 18



5. 如图所示,在四边形 $ABCD$ 中, $AB=BC=CD=DA$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O . 若不增加任何字母与辅助线,要使得四边形 $ABCD$ 是正方形,则还需增加的一个条件是_____.



收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

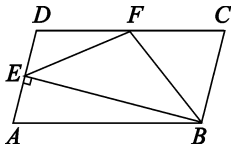
各种特殊四边形的对角线把四边形分成四个三角形,这些三角形之间分别有怎样的关系?



合作学习

难点探究

如图,在 $\square ABCD$ 中, $CD=2AD$, $BE \perp AD$ 于点 E , F 为 DC 的中点,连接 EF , BF , 下列结论: ① $\angle ABC=2\angle ABF$; ② $EF=BF$; ③ $S_{\text{四边形} DEBC}=2S_{\triangle EFB}$; ④ $\angle CFE=3\angle DEF$. 其中正确结论的个数是 ()



- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



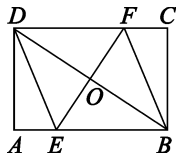
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $BC=4$, 过对角线 BD 的中点 O 的直线分别交 AB , CD 边于点 E , F .

- (1) 求证: 四边形 $BEDF$ 是平行四边形;
- (2) 当四边形 $BEDF$ 是菱形时, 求 EF 的长.



归纳梳理

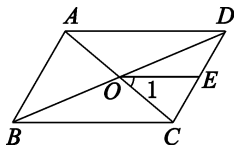
- 1. 了解平行四边形及特殊平行四边形的定义.
- 2. 理解平行四边形及特殊平行四边形的性质, 清楚它们之间的从属关系.
- 3. 掌握平行四边形及特殊平行四边形的判定方法.



深化拓展

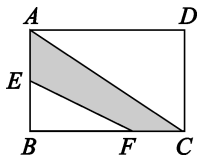
基础巩固

1. 如图,在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , E 是边 CD 的中点, 连接 OE . 若 $\angle ABC=60^\circ$, $\angle BAC=80^\circ$, 则 $\angle 1$ 的度数为 ()



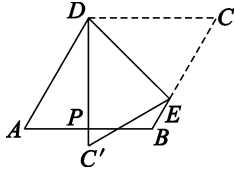
- A. 50°
- B. 40°
- C. 30°
- D. 20°

2. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, E 是 AB 的中点, F 是 BC 上一点, 且 $CF=\frac{1}{3}BC$, 则矩形 $ABCD$ 的面积是阴影部分面积的 ()



- A. 2 倍
- B. 3 倍
- C. 4 倍
- D. 5 倍

3. 如图,在菱形纸片 $ABCD$ 中, $\angle A=60^\circ$, 折叠菱形纸片 $ABCD$, 使点 C 落在 DP (P 为 AB 的中点) 所在的直线上, 得到经过点 D 的折痕 DE , 则 $\angle DEC$ 的大小为 ()



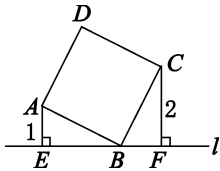
- A. 78°
- B. 75°
- C. 60°
- D. 45°

4. 在 $\square ABCD$ 中, $AB=3, BC=4$, 当 $\square ABCD$ 的面积最大时, 下列结论正确的有 ()

- ① $AC=5$; ② $\angle A + \angle C = 180^\circ$; ③ $AC \perp BD$; ④ $AC=BD$.

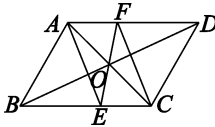
- A. ①②③ B. ①②④
C. ②③④ D. ①③④

5. 如图, 直线 l 过正方形 $ABCD$ 的顶点 B , 点 A, C 到直线 l 的距离分别是 1 和 2, 则正方形的边长是 _____.



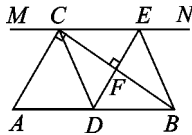
能力提升

6. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O , EF 过点 O 且与 BC, AD 分别交于点 E, F . 试猜想线段 AE, CF 的关系, 并说明理由.



7. 如图, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 过点 C 的直线 $MN \parallel AB$, D 为 AB 边上一点, 过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为 F , 且交直线 MN 于点 E , 连接 CD, BE .

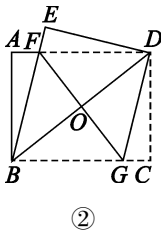
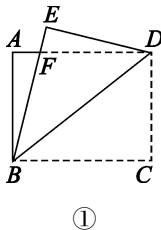
- (1) 求证: $CE=AD$;
(2) 当 D 为 AB 的中点时, 四边形 $BECD$ 是什么特殊四边形? 请说明你的理由;
(3) 若 D 为 AB 的中点, 则当 $\angle A$ 的大小满足什么条件时, 四边形 $BECD$ 是正方形? 请说明你的理由.



拓展创新

8. 如图①, 将一张矩形纸片 $ABCD$ 沿着对角线 BD 向上折叠, 顶点 C 落到点 E 处, BE 交 AD 于点 F .

- (1) 求证: $\triangle BDF$ 是等腰三角形;
(2) 如图②, 过点 D 作 $DG \parallel BE$, 交 BC 于点 G , 连接 FG 交 BD 于点 O . 判断四边形 $BFDG$ 的形状, 并说明理由.



第二学时



自主学习



教材导读

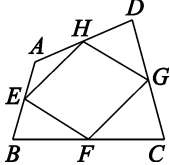
请同学们阅读教材 p66 的有关内容,并思考下列问题:

1. 与平行四边形的性质相比,矩形、菱形、正方形分别在哪些方面具有特殊性质?

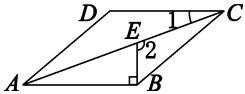
2. 三角形的中位线有哪些性质? 如何运用三角形的中位线性质定理解决实际问题?

自主测评

1. 下列命题是真命题的是 ()
- A. 四边都相等的四边形是矩形
- B. 菱形的对角线相等
- C. 对角线互相垂直的平行四边形是正方形
- D. 对角线相等的平行四边形是矩形
2. 如图,点 E, F, G, H 分别为四边形 $ABCD$ 的四边 AB, BC, CD, DA 的中点,则关于四边形 $EFGH$,下列说法正确的是 ()
- A. 一定不是平行四边形
- B. 一定不是中心对称图形
- C. 可能是轴对称图形
- D. 当 $AC=BD$ 时,它是矩形



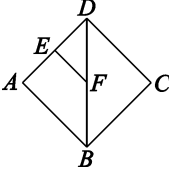
(第2题)



(第3题)

3. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $BE \perp AC$ 交对角线 AC 于点 E ,若 $\angle 1 = 20^\circ$,则 $\angle 2$ 的度数是 _____.

4. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AD, BD 的中点,若 $EF = 2$,则菱形 $ABCD$ 的周长是 _____.



5. 以正方形 $ABCD$ 的边 AD 为边作等边三角形 ADE ,则 $\angle BEC$ 的度数是 _____.

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



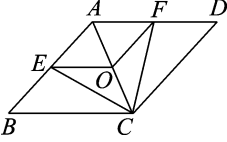
合作学习



难点探究

如图,在菱形 $ABCD$ 中, E, O, F 分别是 AB, AC, AD 的中点,连接 CE, CF, OF, OE .

- (1) 求证: $\triangle BCE \cong \triangle DCF$;
- (2) 当 AB 与 BC 满足什么条件时,四边形 $AEOF$ 为正方形? 请说明理由.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面

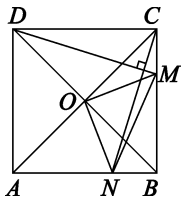


探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

如图,在正方形 $ABCD$ 中, O 是对角线 AC 与 BD 的交点, M 是 BC 边上的动点(点 M 不与点 B, C 重合), $CN \perp DM$, CN 与 AB 交于点 N , 连接 OM, ON, MN . 下列五个结论: ① $\triangle CNB \cong \triangle DMC$; ② $\triangle CON \cong \triangle DOM$; ③ $\triangle MON$ 是等腰直角三角形; ④ $AN^2 + CM^2 = MN^2$; ⑤ 四边形 $BMON$ 的面积是定值. 其中正确结论的个数是 ()



- A. 2 B. 3
C. 4 D. 5



归纳梳理

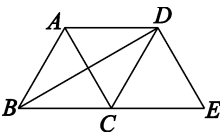
1. 体会研究图形问题的一般思路和方法,感悟分类讨论、转化的数学思想.
2. 提高对图形的理解能力和研究能力,培养空间观念,发展推理能力.



深化拓展

基础巩固

1. 如图,将等边三角形 ABC 沿射线 BC 向右平移到 $\triangle DCE$ 的位置,连接 AD, BD , 则下列结论: ① $AD = BC$; ② BD, AC 互相平分; ③ 四边形 $ACED$ 是菱形. 其中正确结论的个数是 ()

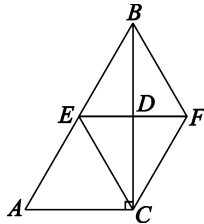


- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

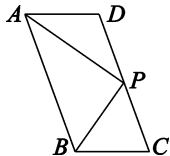
2. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, BC 的垂直平分线 EF 交 BC 于点 D , 交 AB 于点 E , 且 $BE = BF$,

添加一个条件, 仍不能证明四边形 $BECF$ 为正方形的是 ()

- A. $BC = AC$ B. $CF \perp BF$
C. $BD = DF$ D. $AC = BF$



(第2题)

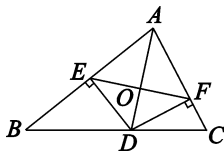


(第3题)

3. 如图,在 $\square ABCD$ 中, P 是 CD 边上一点, 且 AP 和 BP 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle CBA$, 若 $AD = 5, AP = 8$, 则 $\triangle APB$ 的周长是 _____.

能力提升

4. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, DE, DF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的高, 得到下面四个结论:



- ① $OA = OD$;
② $AD \perp EF$;
③ 当 $\angle A = 90^\circ$ 时, 四边形 $AEDF$ 是正方形;
④ $AE^2 + DF^2 = AF^2 + DE^2$.

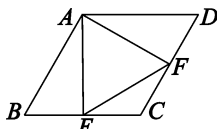
其中正确结论的序号是 _____.

拓展创新

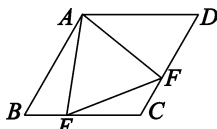
5. 已知四边形 $ABCD$ 是菱形, $AB = 4, \angle ABC = 60^\circ$, $\angle EAF$ 的两边分别与边 CB, DC 相交于点 E, F , 且 $\angle EAF = 60^\circ$.

(1) 如图①, 当 E 是线段 CB 的中点时, 直接写出线段 AE, EF, AF 之间的数量关系;

(2) 如图②, 当 E 是线段 CB 上任意一点时(点 E 不与点 B, C 重合), 请猜想线段 DF 和 EC 有怎样的数量关系, 并证明你的猜想.



①



②



第十八章 数学能力提升与评价

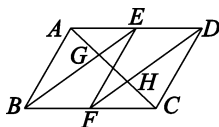
本章体现的数学能力主要有推理能力和模型思想.

一、推理能力

推理是指在对题目中的已知条件和图形深入理解和充分分析的基础上,依据所学定理、定义或性质,经过严密的推理与论证,得出正确的数学结论的过程.推理能力是发展数学思维能力的重要组成部分,包括合情推理能力和演绎推理能力.

[能力提升]

例 1 如图,在 $\square ABCD$ 中, E, F 分别为边 AD, BC 的中点, 对角线 AC 分别交 BE, DF 于点 G, H . 求证: $AG = CH$.



证明: $\because E, F$ 分别是 AD, BC 的中点,

$$\therefore AE = DE = \frac{1}{2}AD, CF = BF = \frac{1}{2}BC.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC, AD = BC.$

$\therefore DE \parallel BF, DE = BF, AE = CF.$

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

$\therefore \angle BED = \angle DFB.$

$\because \angle BED + \angle AEG = 180^\circ,$

$\angle DFC + \angle DFB = 180^\circ,$

$\therefore \angle AEG = \angle DFC.$

又 $\because AD \parallel BC, \therefore \angle EAG = \angle FCH.$

在 $\triangle AGE$ 和 $\triangle CHF$ 中,

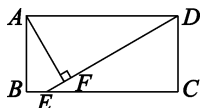
$$\begin{cases} \angle AEG = \angle CFH, \\ AE = CF, \\ \angle EAG = \angle FCH, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AGE \cong \triangle CHF (ASA).$

$\therefore AG = CH.$

[自我评价]

1. 如图,在矩形 $ABCD$ 中 ($AD > AB$), E 是 BC 上一点,且 $DE = DA, AF \perp DE$,垂足为 F ,在下列结论中,不一定正确的是 ()



A. $\triangle AFD \cong \triangle DCE$ B. $AF = \frac{1}{2}AD$

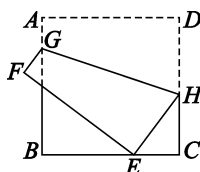
C. $AB = AF$ D. $BE = AD - DF$

二、模型思想

模型思想在本章主要体现在勾股定理及最短路径问题的实际应用.

[能力提升]

例 2 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 9 cm,将正方形折叠,使点 D 落在 BC 边上的点 E 处,折痕为 GH . 若 $BE : EC = 2 : 1$,则线段 CH 的长是 ()



A. 3 cm

B. 4 cm

C. 5 cm

D. 6 cm

分析: 本题考查正方形的性质以及翻折变换 (折叠问题). 根据折叠的性质可得 $DH = EH$. 在直角三角形 CEH 中, $CE = 3$ cm,若设 $CH = x$ cm,则 $DH = EH = (9 - x)$ cm,根据勾股定理列出方程,从而解出 CH 的长.

解: 由折叠,知 $DH = EH$. 设 $CH = x$ cm, 则 $DH = EH = (9 - x)$ cm.

$$\because BE : EC = 2 : 1, \therefore CE = \frac{1}{3}BC = 3 \text{ cm}.$$

在 $\text{Rt} \triangle ECH$ 中, $EH^2 = EC^2 + CH^2$,

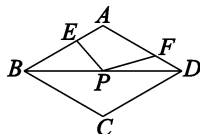
$$\text{即 } (9 - x)^2 = 3^2 + x^2.$$

解得 $x = 4$, 即 $CH = 4$ cm.

故选 B.

[自我评价]

2. 如图,在周长为 12 的菱形 $ABCD$ 中, $AE = 1$, $AF = 2$,若 P 为对角线 BD 上一动点,则 $EP + FP$ 的最小值为 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

第十八章测评

(测评时间:60 分钟 满分:100 分)

一、选择题(本大题共 10 个小题,每小题 2 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的)

1. 下列命题中,正确的是 ()

- A. 菱形的对角线相等
- B. 平行四边形的对角线一定互相垂直平分
- C. 矩形的对角线互相垂直
- D. 矩形的对角线互相平分且相等

2. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,用直尺和圆规作 $\angle BAD$ 的平分线 AG . 若 $AD=5$, $DE=6$,则 AG 的长是 ()

- A. 6
- B. 8
- C. 10
- D. 12

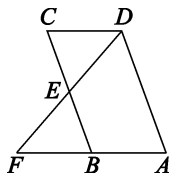
3. 如图, E 是矩形 $ABCD$ 中 BC 边的中点,将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠,得到 $\triangle AFE$,点 F 在矩形 $ABCD$ 内部,延长 AF 交 DC 于点 G . 若 $\angle AEB=55^\circ$,则 $\angle DAF$ 等于 ()

- A. 40°
- B. 35°
- C. 20°
- D. 15°

4. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle B=80^\circ$, AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E , $CF \parallel AE$ 交 AD 于点 F ,则 $\angle 1$ 等于 ()

- A. 40°
- B. 50°
- C. 60°
- D. 80°

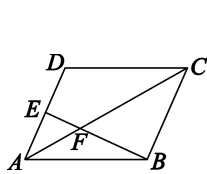
5. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, E 是边 BC 的中点,连接 DE 并延长,交 AB 的延长线于点 F , $AB=BF$. 添加一个条件使四边形 $ABCD$ 是平行四边形,你认为下面四个条件中可选择的是 ()



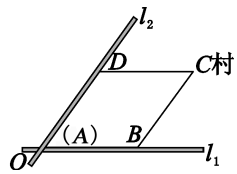
- A. $AD=BC$
- B. $CD=BF$
- C. $\angle A=\angle C$
- D. $\angle F=\angle CDF$

6. 如图,在 $\square ABCD$ 中, E 为 AD 的中点,连接 BE 交 AC 于点 F . 已知 $\triangle ABE$ 的面积为 4,则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. 4
- B. 8
- C. 12
- D. 16



(第 6 题)

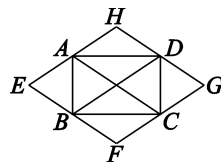


(第 7 题)

7. 如图,两条笔直的公路 l_1, l_2 相交于点 O ,村庄 C 的村民在公路的旁边建三个加工厂 A, B, D (加工厂 A 建在交点 O 处). 已知 $AB=BC=CD=DA=5$ km,村庄 C 到公路 l_1 的距离为 4 km,则村庄 C 到公路 l_2 的距离是 ()

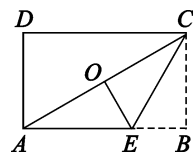
- A. 3 km
- B. 4 km
- C. 5 km
- D. 6 km

8. 如图,过矩形 $ABCD$ 的四个顶点作对角线 AC, BD 的平行线,分别相交于点 E, F, G, H ,则四边形 $EFGH$ 为 ()



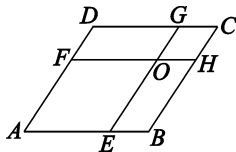
- A. 平行四边形
- B. 矩形
- C. 菱形
- D. 正方形

9. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, O 是对角线 AC 的中点, E 是 AB 上的点,沿 CE 折叠后,点 B 恰好与点 O 重合. 若 $BC=3$,则折痕 CE 的长为 ()



- A. $2\sqrt{3}$
- B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- C. $\sqrt{3}$
- D. 6

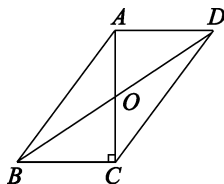
10. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, $AB=8$,点 E,F 分别在 AB,AD 上,且 $AE=AF$,过点 E 作 $EG\parallel AD$ 交 CD 于点 G ,过点 F 作 $FH\parallel AB$ 交 BC 于点 H , EG 与 FH 交于点 O ,当四边形 $AEOF$ 与四边形 $CGOH$ 的周长之差为 12 时, AE 的长为 ()



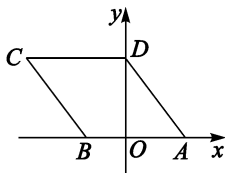
- A. 6.5
- B. 6
- C. 5.5
- D. 5

二、填空题(本大题共 8 个小题,每小题 3 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上)

11. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $AB=10,AD=6,AC\perp BC$,则 $BD=$ _____.



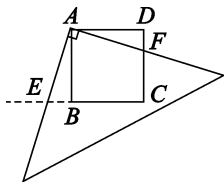
(第 11 题)



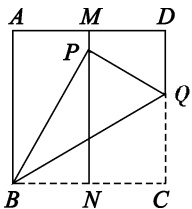
(第 12 题)

12. 如图,若菱形 $ABCD$ 的顶点 A,B 的坐标分别为 $(3,0),(-2,0)$,点 D 在 y 轴上,则点 C 的坐标是 _____.

13. 如图,有一块边长为 4 的正方形塑料模板 $ABCD$,将一块足够大的直角三角尺的直角顶点落在 A 点,两条直角边分别与 CD 交于点 F ,与 CB 的延长线交于点 E ,则四边形 $AECF$ 的面积是 _____.



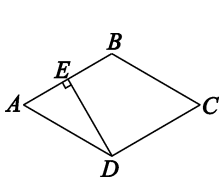
(第 13 题)



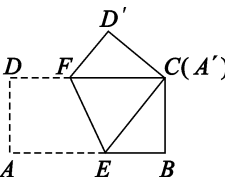
(第 14 题)

14. 如图,有一张面积为 3 的正方形纸片 $ABCD$, M,N 分别是 AD,BC 边的中点,将 C 点折叠至 MN 上,落在 P 点的位置,折痕为 BQ ,则 $PQ=$ _____.

15. 如图,已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD=60^\circ$.若 $DE\perp AB$,垂足为 E ,则 DE 的长为 _____.



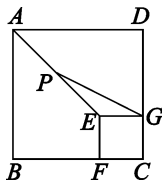
(第 15 题)



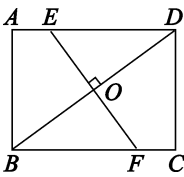
(第 16 题)

16. 如图,将长 8 cm,宽 4 cm 的矩形纸片 $ABCD$ 折叠,使点 A 与点 C 重合,则折痕 EF 的长为 _____ cm.

17. 如图,正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFCG$ 的边长分别为 3 和 1,点 F,G 分别在边 BC,CD 上, P 为 AE 的中点,连接 PG ,则 PG 的长为 _____.



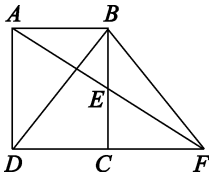
18. 如图,已知矩形 $ABCD$, $AB=3\text{ cm},AD=4\text{ cm}$,过对角线 BD 的中点 O 作 BD 的垂直平分线 EF ,分别交 AD,BC 于点 E,F ,则 AE 的长为 _____.



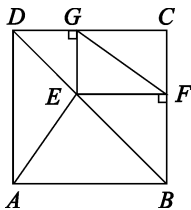
三、解答题(本大题共 6 个小题,共 56 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (本小题满分 8 分)
如图,在平行四边形 $ABCD$ 中, E 是 BC 边的中点,连接 AE 并延长交 DC 的延长线于点 F .

- (1) 求证: $CF=AB$;
- (2) 连接 BD,BF ,当 $\angle BCD=90^\circ$ 时,求证: $BD=BF$.



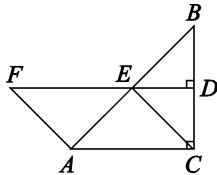
20. (本小题满分 8 分)
如图, E 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点, $EF\perp BC,EG\perp CD$,垂足分别是 F,G . 求证: $AE=FG$.



21. (本小题满分 10 分)

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, BC 的垂直平分线 DE 交 BC 于点 D ,交 AB 于点 E , F 在 DE 的延长线上,且 $AF = CE = AE$.

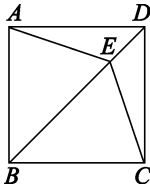
- (1) 求证: 四边形 $ACEF$ 是平行四边形;
- (2) 当 $\angle B$ 满足什么条件时, 四边形 $ACEF$ 是菱形? 并说明理由.



22. (本小题满分 10 分)

如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = CD$, E 是对角线 BD 上一点,且 $EA = EC$.

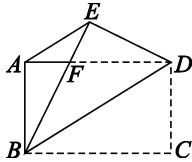
- (1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形;
- (2) 如果 $BE = BC$, 且 $\angle CBE : \angle BCE = 2 : 3$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是正方形.



23. (本小题满分 10 分)

如图,将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠,点 C 落在点 E 处, BE 交 AD 于点 F , 连接 AE .

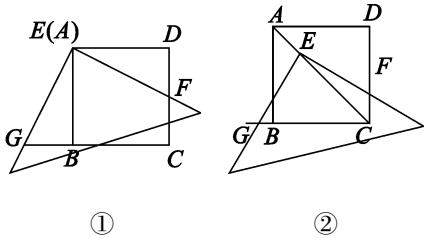
- (1) 求证: $BF = DF$;
- (2) 求证: $AE \parallel BD$;
- (3) 若 $AB = 6$, $AD = 8$, 求 BF 的长.



24. (本小题满分 10 分)

如图①,将三角尺放在正方形 $ABCD$ 上,使三角尺的直角顶点 E 与正方形 $ABCD$ 的顶点 A 重合,三角尺的一边交 CD 于点 F , 另一边交 CB 的延长线于点 G .

- (1) 求证: $EF = EG$;
- (2) 如图②, 移动三角尺, 使顶点 E 始终在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上, 其他条件不变. (1) 中的结论是否仍然成立? 若成立, 请给予证明; 若不成立, 请说明理由.



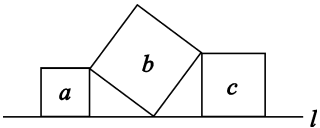
综合测评一

(测评时间:60 分钟 满分:100 分)

一、选择题(本大题共 10 个小题,每小题 2 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的)

1. 计算 $\sqrt{(-2)^2}$ 的结果是 ()
A. -2 B. 2
C. ± 2 D. 4
2. 下列根式中属于最简二次根式的是 ()
A. $\sqrt{a^2+1}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$
C. $\sqrt{8}$ D. $\sqrt{a^3} (a>0)$
3. 下列计算正确的是 ()
A. $2\sqrt{3}+4\sqrt{2}=6\sqrt{5}$
B. $\sqrt{5}-\sqrt{2}=\sqrt{3}$
C. $\sqrt{27}\div\sqrt{3}=3$
D. $\sqrt{(-3)^2}=-3$
4. 已知 $a<\frac{1}{9}$, 则化简 $\sqrt{9a^2-2a+\frac{1}{9}}$ 的结果为 ()
A. $-3a-\frac{1}{3}$ B. $3a+\frac{1}{3}$
C. $3a-\frac{1}{3}$ D. $-3a+\frac{1}{3}$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c , 则下列条件中, $\triangle ABC$ 不是直角三角形的是 ()
A. $a=1.5, b=2, c=3$
B. $a=7, b=24, c=25$
C. $\angle B=32^\circ, \angle C=58^\circ$
D. $a:b:c=1:1:\sqrt{2}$

6. 如图, 直线 l 上有三个正方形 a, b, c , 若 a, c 的面积分别为 5 和 11, 则 b 的面积为 ()

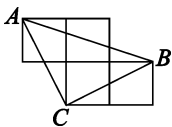


- A. 4 B. 6
- C. 16 D. 55

7. 已知菱形的两条对角线长分别是 4 cm 和 8 cm, 则与此菱形同面积的正方形的边长是 ()

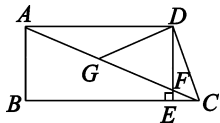
- A. 8 cm B. $4\sqrt{2}$ cm
- C. $2\sqrt{2}$ cm D. 4 cm

8. 如图, 每个小正方形的边长均为 1, A, B, C 是小正方形的顶点, 则 $\angle ACB$ 的度数为 ()



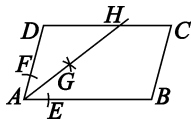
- A. 90° B. 60°
- C. 45° D. 30°

9. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC, DE\perp BC$, 垂足为 E , 连接 AC 交 DE 于点 F, G 为 AF 的中点, $\angle ACD=2\angle ACB$. 若 $DG=3, EC=1$, 则 DE 的长为 ()



- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{10}$
- C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{6}$

10. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB>AD$, 按以下步骤作图: 以点 A 为圆心, 小于 AD 的长为半径画弧, 分别交 AB, AD 于点 E, F , 再分别以点 E, F 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧, 两弧交于点 G ; 作射线 AG 交 CD 于点 H , 则下列结论中不能由条件推理得出的是 ()



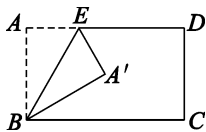
- A. AG 平分 $\angle DAB$ B. $AD=DH$
- C. $DH=BC$ D. $CH=DH$

二、填空题(本大题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上)

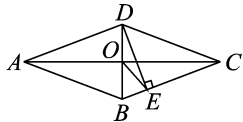
11. 使式子 $\sqrt{x-3}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

12. 延长正方形 $ABCD$ 的边 AB 到点 E , 使 $BE=AC$, 连接 DE , 则 $\angle E=$ _____.

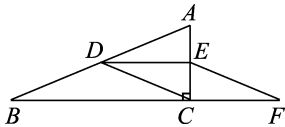
13. 如图,将矩形 $ABCD$ 沿 BE 折叠,使点 A 落到点 A' 的位置.若 $\angle A'EB = 60^\circ$,则 $\angle CBA' =$ _____.



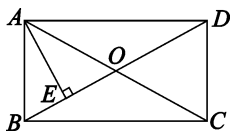
14. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, AC 交 BD 于点 O , $DE \perp BC$ 于点 E ,连接 OE ,若 $\angle ABC = 140^\circ$,则 $\angle OED =$ _____.



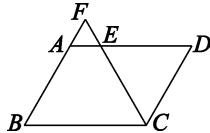
15. 如图,在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D, E 分别是 AB, AC 的中点,连接 CD ,过点 E 作 $EF \parallel DC$ 交 BC 的延长线于点 F .若四边形 $CDEF$ 的周长是 25 cm , AC 的长为 5 cm ,则线段 AB 的长度为 _____.



16. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, O 是两对角线的交点, $AE \perp BD$ 于点 E .若 $OE : OD = 1 : 2$, $AE = 3 \text{ cm}$,则 $DE =$ _____.



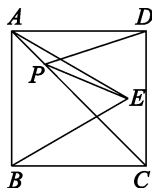
(第 16 题)



(第 17 题)

17. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $AB = 6, BC = 8, \angle BCD$ 的平分线交 AD 于点 E ,交 BA 的延长线于点 F ,则 $AE + AF$ 的值等于 _____.

18. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 6 , $\triangle ABE$ 是等边三角形,点 E 在正方形 $ABCD$ 内,在对角线 AC 上有一点 P ,使 $PD + PE$ 的值最小,则这个最小值为 _____.



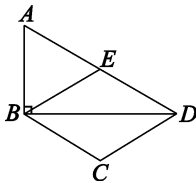
三、解答题(本大题共 6 个小题,共 56 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (本小题满分 8 分)
计算:(结果保留最简根式)
(1) $\sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{6})$;

(2) $\sqrt{54} - \sqrt{32} - \sqrt{24} + \sqrt{18}$.

20. (本小题满分 8 分)

如图,在四边形 $ABCD$ 中, BD 为一条对角线, $AD \parallel BC, AD = 2BC, \angle ABD = 90^\circ$, E 为 AD 的中点,连接 BE .请判断四边形 $BCDE$ 的形状,并说明理由.



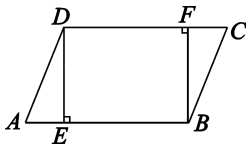
21. (本小题满分 8 分)

已知 $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$,求 $x^2 - y^2$ 的值.

22. (本小题满分 10 分)

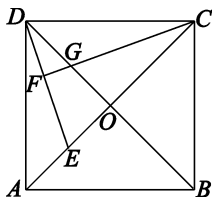
如图,在 $\square ABCD$ 中, $DE \perp AB, BF \perp CD$,垂足分别为 E, F .求证:

- (1) $\triangle ADE \cong \triangle CBF$;
- (2) 四边形 $BFDE$ 为矩形.



23. (本小题满分 10 分)

如图,在正方形 $ABCD$ 中, AC, BD 相交于点 O , E 是 OA 上一点, CF 分别交 BD, ED 于点 G, F , 且 $OG = OE$. CG 与 DE 有怎样的关系? 试证明你的结论. (提示:关系包括位置关系与数量关系)



24. (本小题满分 12 分)

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle DAC$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角.

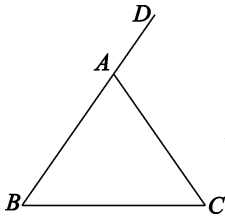
实践与操作:

根据要求尺规作图,并在图中标明相应字母 (保留作图痕迹,不写作法).

- (1) 作 $\angle DAC$ 的平分线 AM ;
- (2) 作线段 AC 的垂直平分线,与 AM 交于点 F , 与 BC 边交于点 E , 与 AC 边交于点 O . 连接 AE, CF .

猜想并证明:

判断四边形 $AECF$ 的形状并加以证明.



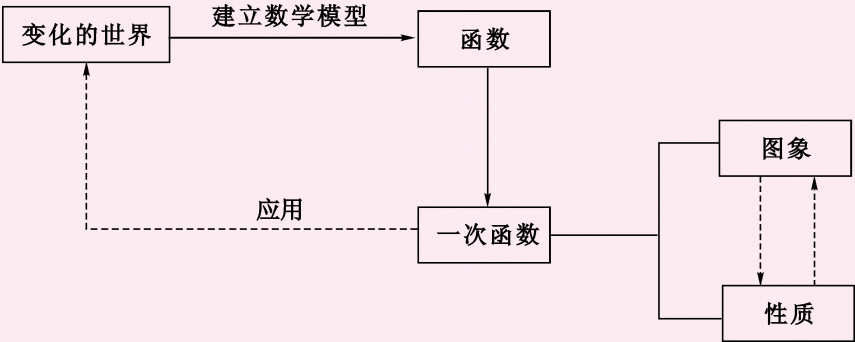
第十九章 一次函数

学习导航

本章纵览

本章是学习函数的第一阶段,重点在于初步认识函数的概念,并具体讨论最简单的初等函数——一次函数. 本章的主要内容包括:变量与函数的概念,函数的三种表示方法,正比例函数和一次函数的概念、图象、性质和应用,探索一次函数与方程、不等式之间的联系以及利用一次函数解决生活中的实际问题. 这一章是函数知识的入门阶段,也是进一步学习方程、不等式及反比例函数和二次函数知识的基础. 函数的概念是数学中极为重要的基本概念,它的抽象性较强,接受并理解它有一定的难度,这也是本章的难点. 变化与对应的思想体现在函数的概念之中,用运动变化的眼光,以函数为工具,从数量关系和图象两方面动态地分析问题,是本章学习的重点.

知识要点



学习要求

- 1. 以探索实际问题中的数量关系和变化规律为背景,经历“找出常量和变量,建立并表示函数模型,讨论函数模型,解决实际问题”的过程,体会函数是刻画现实世界中变化规律的重要数学模型.
- 2. 结合实例,了解常量、变量和函数的概念,体会“变化与对应”的思想,了解函数的三种表示方法(列表

法、解析式法和图象法),能利用图象数形结合地分析简单的函数关系.

3. 理解正比例函数和一次函数的概念,会画它们的图象,能结合图象讨论这些函数的基本性质,能利用这些函数分析和解决简单的实际问题.

4. 通过讨论一次函数与方程及不等式的关系,从运动变化的角度,用函数的观点加深对已经学习过的方程及不等式等内容的认识,构建和发展相互联系的知识体系.



学法指导

1. 重视数学概念中蕴含的思想,注意从运动变化和联系对应的角度认识函数.

本章首次正式出现函数的概念,通过本章的学习,同学们应初步对函数形成正确的认识,即认识到虽然函数的表示方法有多种,因问题不同函数的具体形式可以形形色色,但是各种函数都是反映变化规律的数学工具,现在学习的函数都是刻画同一个变化过程中两个变量之间的对应关系的模型,对于同一类问题可以用同一类函数进行研究(例如用一次函数研究线性规划问题).

2. 借助实际问题情境,由具体到抽象地认识函数;通过函数应用举例,体现数学建模思想.

找出问题中相关变量之间的关系,并以数学形式表示这种关系,是本章中用数学模型表示和解决实际问题的关键步骤,而正确地理解问题情境是基础. 同学们在本章的学习中,可以从多种角度思考,借助图象、表格、式子等进行分析,寻找变量之间的关系,检验所建立的函数的合理性.

3. 重视数形结合的研究方法.

函数的表示方法之一是图象法,就是通过坐标系中图象上点的坐标反映变量之间的对应关系. 这种表示方法将数量关系直观化、形象化,同学们在学习要注重数形结合地研究问题.

4. 加强对知识之间内在联系的认识.

从函数的角度对前面学习过的一元一次方程、一元一次不等式和二元一次方程组重新进行了分析,这种再认识不是在原来水平上的回顾复习,而应站在更高的起点上进行动态分析. 同学们要学会用一次函数把上述三个不同的数学对象统一认识,逐步达到新旧知识的融会贯通,提高解决问题的能力.

5. 注重对基础知识和基本技能的掌握,提高基本能力.

本章中函数的基本概念,函数的一般表示方法和一次函数的概念、图象、性质等是基础知识;会画一次函数(包括正比例函数)的图象,能结合图象讨论这些函数的基本性质等是基本技能;能利用函数分析和解决简单的实际问题是基本能力. 同学们在学习要注重对基础知识、基本技能的掌握和基本能力的提高.

19.1 函 数

19.1.1 变量与函数

第一学时



问题导学

“万物皆变”——我们生活在一个变化的世界中,如气温随着海拔而变化;汽车行程随着行驶时间而变化;同学们的身高、体重也在随着年龄的增



长而变化……这种一个量随另一个量的变化而变化的现象大量存在.若能从数学的角度研究变化的量,将有助于我们了解自己、认识世界.那么如何从数学的角度认识千变万化的世界呢?让我们一起进入本学时的学习.



自主学习



教材导读

请同学们阅读教材 p71 的有关内容,并完成下列问题:

1. 根据教材中的四个问题填写下表:

问题	常量	变量
(1)		
(2)		
(3)		
(4)		

2. 用自己的语言描述:什么是变量?什么是常量?

3. 请你举出生活中有关变量的一个例子,并指出变量和常量.



自主测评

1. 某种报纸的价格是每份 0.4 元,买 x 份报纸的总价为 y 元.先填写下表,再用含 x 的式子表示 y .

份数	1	2	3	4	...
价钱/元					...

y 与 x 之间的关系式是_____,其中常量是_____,变量是_____.

2. 长方形相邻两边长分别为 x, y , 面积为 30, 则用含 x 的式子表示 $y, y = \underline{\hspace{2cm}}$. 在这个问题中, _____是常量, _____是变量.

3. 球的表面积 $S(\text{cm}^2)$ 与球的半径 $R(\text{cm})$ 的关系式是 $S = 4\pi R^2$, 这里的变量是_____, 常量是_____.

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

常量与变量的本质特征是什么?



合作学习



难点探究

根据题意写出适当的关系式,并指出其中的变量.

- (1) 多边形的内角和 y 与边数 n 的关系;
- (2) 甲、乙两地相距 $y \text{ km}$, 某人骑自行车以每小时 10 km 的速度从甲地驶向乙地, 试用行驶时间 $t(\text{h})$ 表示此人距乙地的距离 $s(\text{km})$.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面

字母表示的量一定是变量吗?



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

1. 设圆柱的底面半径 R 不变,圆柱的体积 V 与高 h 的关系式是 $V=\pi R^2h$. 在这个式子中,常量和变量分别是什么?

2. 设圆柱的高 h 不变,圆柱的体积 V 与底面半径 R 的关系式是 $V=\pi R^2h$. 在这个式子中,常量和变量分别是什么?

3. 从甲地到乙地的路程为 300 千米,一辆汽车从甲地到乙地,每小时行驶 50 千米. 据此回答问题.

(1) 汽车行驶 1 小时后,距离乙地_____千米,距离甲地_____千米;

(2) 设汽车行驶时间为 t (小时),与乙地的距离为 s (千米),请用含有 t 的式子表示 s ;并指出哪些是变量? 哪些是常量?

(3) 这辆汽车行驶多长时间即可到达乙地?



归纳梳理

1. 在一个变化过程中,数值发生变化的量是变量,数值始终不变的量是常量. 要注意字母表示的量不一定是变量. 在判断常量和变量时,要抓住“变”与“不变”两个特征.

2. 常量和变量是两个对立而又统一的量. 它们是对“某一变化过程”而言的,是相对的. “某一变化过程”的条件不同,常量和变量就可能不同.



深化拓展

基础巩固

1. 当甲以每小时 20 千米的速度行驶时,他所走的路程 s (千米)随着时间 t (小时)的增大而增大,则下列说法正确的是 ()

- A. 20 和 s, t 都是变量
- B. 20 和 t 是变量
- C. s 和 t 是变量
- D. 20 和 t 是常量

2. 下表是王辉从 4 岁到 10 岁的体重情况:

年龄/岁	4	5	6	7	8	9	10
体重/kg	15.4	16.7	18.0	19.6	21.5	23.2	25.2

这个问题中的变量是_____.

3. 一个三角形的底边长为 5,高 h 可以任意伸缩,三角形的面积 S 也随之发生了变化. 其中常量是_____,变量是_____.

能力提升

4. 写出下列问题中的关系式,并指出其中的变量和常量.

(1) 用 20 cm 长的铁丝所围的长方形的长 x (cm) 与面积 S (cm²) 的关系.

(2) 直角三角形中一个锐角 α 与另一个锐角 β 之间的关系.

(3) 一个盛满 30 t 水的水箱, 每小时流出 0.5 t 水, 试用流水时间 t (h) 表示水箱中的剩水量 y (t).

5. 某礼堂的座位排列呈圆弧形, 横排座位数的设置如下表:

排数	1	2	3	4	...
座位数	20	24	28	32	...

- (1) 该表反映了哪些变量之间的关系?
- (2) 根据表格中提供的数据可以得出第 n (n 为正整数) 排有多少个座位?

拓展创新

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 边 BC 上的高是 6 cm, 当 $\triangle ABC$ 的顶点 C 沿边 BC 所在直线向点 B 运动时, $\triangle ABC$ 的面积发生了变化.

- (1) 在这个变化过程中, _____ 是变量, _____ 是常量;
- (2) 如果 $\triangle ABC$ 的边 BC 的长为 x cm, 那么三角形的面积 y (cm^2) 可以表示为 _____;
- (3) 如果 $\triangle ABC$ 的边 BC 的长从 12 cm 变化到 3 cm, 那么三角形的面积从 _____ cm^2 变化到 _____ cm^2 .



第二学时



问题导学

你坐过摩天轮吗？想一想，你坐在摩天轮上，随着时间的变化，你离开地面的高度是如何变化的？对于给定的时间 t ，相应的高度 h 确定吗？



其实，我们的日常生活中充满着许许多多变化的量，例如输液时间与相应时间内所输液体的量，汽车行驶的路程与行驶的时间等等，如果我们了解这些变量之间存在的关系，那么就可以帮助我们更好地认识世界，而函数就是刻画变量之间关系的常用模型。那么什么是函数？用函数可以解决现实生活中的哪些问题？你一定很想知道吧？那就一起来看一看吧！



自主学习

教材导读

请同学们阅读教材 p72~p74 的有关内容，思考并回答下列问题：

1. 通过对教材 p71 中四个问题的再研究，你能说出这些变化过程中两个变量之间的联系吗？试着写下来。

2. 由教材 p73“思考”(1)中的心电图可知，图中研究的变量是_____，图中反映的是_____随_____的变化而变化的情况，对于 x 的每一个确定的值， y 都有唯一确定的值与其相对应吗？

3. 由教材 p73“思考”(2)中的人口数统计表可知，表中反映的是_____随着_____的变化而变化的情况，对于表中每一个确定的年份，都对应着一个

确定的人口数吗？

4. 教材 p73 的“思考”(1)和“思考”(2)分别是用什么形式研究问题的？与前面所给四个问题的研究形式有什么不同？

5. 阅读教材 p73 例 1 上面的内容，并思考下面的问题：函数的概念中，你认为主要包括哪几点？

6. 你是如何理解自变量的值与相对应的函数值的？请举例说明。

★温馨提示：同学们千万不要认为“函数”是一个数呀！它是指某一变化过程中两个变量之间的关系。

自主测评

1. 骆驼被称为“沙漠之舟”，它的体温随时间的变化而变化。在这一问题中，自变量是 ()

A. 沙漠 B. 体温 C. 时间 D. 骆驼

2. 如图所示，向平静的水面投入一枚石子，在水面会激起一圈圈圆形涟漪。当圆形涟漪的半径从 2 cm 变成 5 cm 时，圆形的面积从 _____ cm^2 变成 _____ cm^2 。在这一变化过程中，_____是自变量，_____是_____的函数。



3. 当 $x=0$ 时，函数 $y=2x^2+1$ 的值是 ()

A. 1 B. 0
C. 3 D. -1

4. 判断下列变量之间的关系是不是函数关系，并说明理由。

(1) 长方形的宽一定时，其面积与长；

(2) 汽车行驶速度一定时，汽车行驶的路程与时间。

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

在一个变化过程中,如何判断哪个变量是自变量?



合作学习



难点探究

1. 在教材 p73、p74 例 1 中, y 表示什么? x 表示什么? 题中的等量关系是什么?

2. 例 1 中自变量 x 的取值范围是如何确定的? 在确定自变量的取值范围时应考虑哪些因素?

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面

什么样的两个变量间存在函数关系?



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

1. 下列关系式中, y 是 x 的函数吗? 为什么?
(1) $y = x + 2$; (2) $y = |x|$; (3) $|y| = x$.

2. 求下列函数中自变量 x 的取值范围:
(1) $y = 3x - 1$; (2) $y = 2x^2 + 7$;

$$(3) y = \frac{1}{x+2}; \quad (4) y = \sqrt{x-2}.$$

3. 学校为创建媒体教学中心,备有资金 150 万元,已分批购进电脑 x 台,每台电脑的单价为 5 000 元.

(1) 求所剩资金 y (万元) 与购进电脑台数 x 之间的函数关系式,并求自变量的取值范围;

(2) 购进 200 台这种型号的电脑后还有备用资金多少万元?



归纳梳理

1. 在判断一个关系是不是函数关系时,第一要看是不是一个变化过程;第二要看在这个变化过程中是不是有两个变量;第三要看某一变量每取一个确定的值,另一个变量是否有唯一确定的值与之相对应.

2. 确定函数自变量的取值范围就是求使函数解析式有意义的自变量的取值范围,同时对于实际问题还要考虑实际意义.



深化拓展



基础巩固

1. 下列是关于变量 x 和 y 的四个关系式:① $y = x$, ② $y^2 = x$, ③ $2x^2 = y$, ④ $|y| = 2x$. 其中 y 是 x 的函数的有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. 已知函数 $y = x^2 - 9$, 当 $x = 5$ 时, $y = \underline{\hspace{2cm}}$; 反之, 当 $y = 16$ 时, $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 某油箱容量为 60 L 的汽车,加满汽油后行驶了 100 km,油箱中的汽油大约消耗了 $\frac{1}{5}$, 如果加满



汽油后汽车行驶的路程为 x km,油箱中剩余油量为 y L,则 y 与 x 之间的函数解析式和自变量的取值范围分别是 ()

- A. $y=0.12x, x>0$
- B. $y=60-0.12x, x>0$
- C. $y=0.12x, 0\leq x\leq 500$
- D. $y=60-0.12x, 0\leq x\leq 500$

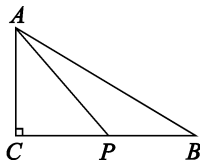
能力提升

4. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的自变量 x 的取值范围为 _____.

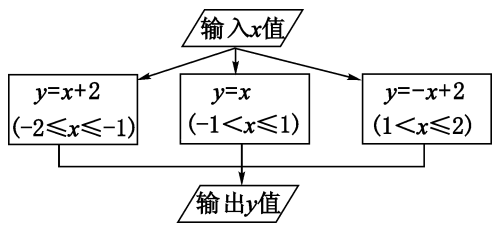
5. 把一个长、宽、高分别为 3 cm、2 cm、1 cm 的长方体铜块铸成一个圆柱体铜块,那么圆柱体铜块的底面积 $S(\text{cm}^2)$ 与高 $h(\text{cm})$ 之间的函数关系式为 _____.

6. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, AC = 6, BC = 10$,设 P 为 BC 边上的任意一点,点 P 不与点 B, C 重合,且 $CP = x$,若 y 表示 $\triangle APB$ 的面积. 求:

- (1) y 与 x 之间的函数关系式;
- (2) 自变量 x 的取值范围.



7. 根据如图所示的程序计算函数值,若输入的 x 值为 $\frac{3}{2}$,则输出的 y 值为 _____.



拓展创新

8. 一根合金棒在不同的温度下,其长度也不同,合金棒的长度和温度之间有如下关系:

温度/ $^\circ\text{C}$	...	-5	0	5	10	15	...
长度/cm	...	9.995	10	10.005	10.01	10.015	...

(1) 上表反映了温度与长度两个变量之间的关系,其中 _____ 是自变量, _____ 是 _____ 的函数;

(2) 当温度是 10°C 时,合金棒的长度是 _____ cm;

(3) 如果合金棒的长度大于 10.05 cm 小于 10.15 cm,根据表中的数据推测,此时的温度应在 _____ $^\circ\text{C}$ 的范围内;

(4) 假设温度为 $x^\circ\text{C}$ 时,合金棒的长度为 y cm,根据表中数据写出 y 与 x 之间的函数解析式为 _____;

(5) 当温度为 -20°C 或 100°C 时,合金棒的长度分别为 _____ cm 或 _____ cm.

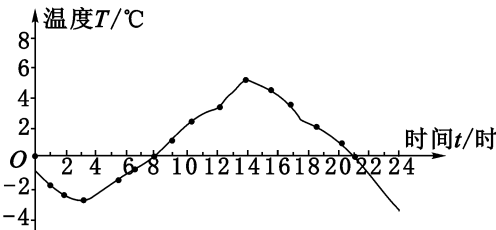
19.1.2 函数的图象

第一学时



问题导学

我们在如图所示的气温曲线图上可以直观地看出不同时间的气温,该图象反映出气温随时间的变化规律.一般地,函数常常可以用它的图象来表示,利用函数的图象可以帮助我们直观地研究函数.那么,什么是函数的图象?怎样画出函数的图象呢?怎样利用函数的图象来研究函数?这一学时我们将对此作一些初步的研究.



自主学习



教材导读

阅读教材 p75 ~ p77 的有关内容,回答下列问题:

- 1. 在正方形的边长 x 与面积 S 的函数解析式 $S=x^2$ 中, x 的取值范围是如何确定的?
- 2. 用自己的语言来总结:教材中是如何画 S 与 x 之间函数关系的图象的?可以分为哪几步?
- 3. 请你总结一下什么是函数的图象?
- 4. 你能说说函数的图象有什么作用吗?
- 5. 通过自学,你一定已经初步了解了函数图象的画法.请试着总结出来.



自主测评

汽车以 60 km/h 的速度匀速行驶.行驶路程为 $s(\text{km})$,行驶时间为 $t(\text{h})$.

(1)行驶路程 $s(\text{km})$ 与行驶时间 $t(\text{h})$ 的关系式为

_____,其中自变量 t 的取值范围是_____;

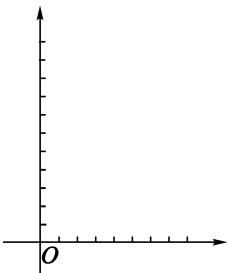
(2)若在平面直角坐标系中画出它的图象,则 t 的值作点的_____坐标, s 的值作点的_____坐标;

(3)填写下表:

t/h	0	1	2	3	4	5
s/km						

(4)在所给的平面直角坐标系中画出这个函数的图象;

(5)点 $(2.5, 170)$ 在此函数图象上吗?为什么?



收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



合作学习



难点探究

1. 通过对教材 p76“思考”的研究,体会如何利用函数的图象研究函数,并解决实际问题.

(1)图象上最高点的坐标是什么?它有什么实际意义?

(2)从 0 时到 4 时曲线从左到右呈上升还是下降趋势?这说明了什么?从 4 时到 14 时曲线从左到右呈上升还是下降趋势?这又说明了什么?

(3)你能根据图象估计出这一天中任一时刻的气温吗?你是如何估计的?与同伴交流.



2. 阅读教材 p76 例 2, 回答下列问题:

(1) 纵坐标 y 表示什么? 点 $(8, 0.6)$ 有什么实际意义?

(2) 题中的图象是由 5 条线段组成的折线, 其中每条线段的左右端点的横坐标之差表示什么?

(3) 图中有两条与横轴平行的线段, 表明了什
么? 它们分别对应什么活动?

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



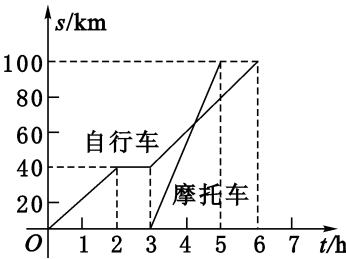
探究展示

问题共析 要积极发言, 及时总结哦!

展示交流

已知有两人分别骑自行车和摩托车沿着相同的路线从甲地到乙地去. 下图反映的是这两个人行驶过程中时间和路程的关系, 请根据图象回答下列问题:

- (1) 甲地与乙地相距多少千米? 两个人分别用了几小时才到达乙地? 谁先到达了乙地? 早到多长时间?
- (2) 分别描述在这个过程中自行车和摩托车的行驶状态;
- (3) 求摩托车行驶的平均速度.



归纳梳理

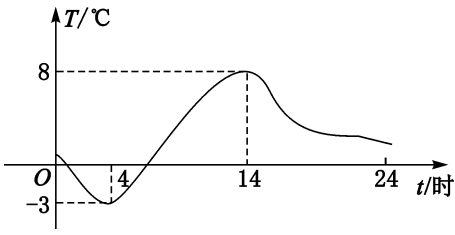
一般来说, 函数的图象是由平面直角坐标系中的一系列点组成的. 图象上每一点的坐标 (x, y) 代表了函数的一对对应值, 它的横坐标 x 表示自变量的某一个值, 纵坐标 y 表示与它对应的函数值.



深化拓展

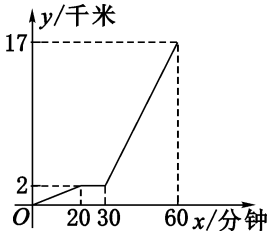
基础巩固

1. 如图是自动测温仪记录的图象, 它反映了某市的春季某天的气温 T 如何随时间 t 的变化而变化, 下列从图象中得到的信息正确的是 ()



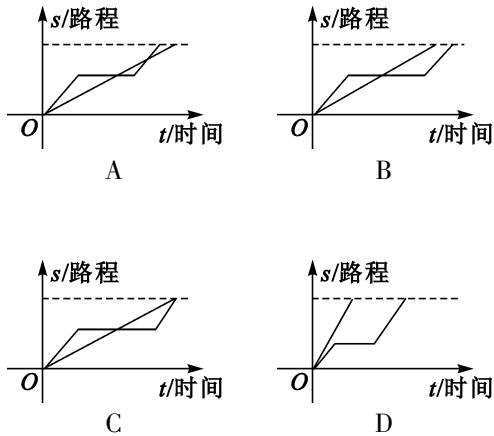
- A. 0 时时气温达到最低
- B. 最低气温是零下 4 °C
- C. 0 时到 14 时之间气温持续上升
- D. 最高气温是 8 °C

2. 某星期下午, 小强和同学小明相约在某公共汽车站一起乘车回学校, 小强从家出发先步行到车站, 等小明到了后两人一起乘公共汽车回到学校. 图中折线表示小强离开家的路程 y (千米) 和所用时间 x (分钟) 之间的函数关系. 下列说法中错误的是 ()



- A. 小强从家到公共汽车站步行了 2 千米
- B. 小强在公共汽车站等小明用了 10 分钟
- C. 公共汽车的平均速度是 30 千米/时
- D. 小强乘公共汽车用了 20 分钟

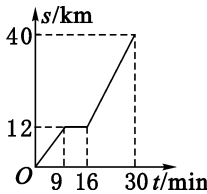
3. “龟兔赛跑”这则寓言故事讲述的是比赛中兔子开始领先,但它因为骄傲在途中睡觉,而乌龟一直坚持爬行最终赢得比赛,下列函数图象可以体现这一故事过程的是 ()



能力提升

4. 下图是某汽车行驶的路程 s (km) 与时间 t (min) 的函数关系图象. 观察图中所提供的信息,解答下列问题:

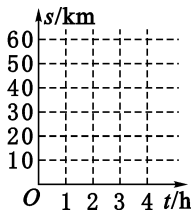
(1) 汽车在前 9 分钟内的平均速度是多少?



(2) 汽车在中途停了多长时间?

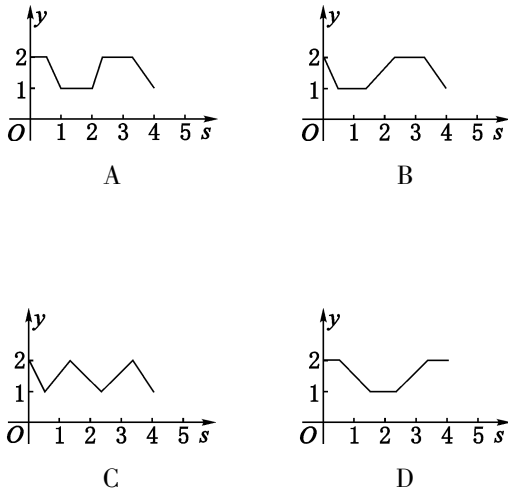
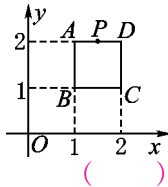
(3) 求当 $16 \leq t \leq 30$ 时, 汽车行驶的平均速度.

5. 星期天, 小明与小刚骑自行车去距家 50 千米的某地游玩, 匀速行驶 1.5 小时的时候, 其中一辆自行车出现故障, 因此两人在自行车修理店修车, 用了半小时, 然后以原速继续前进, 行驶 1 小时到达目的地, 请在如图所示的平面直角坐标系中, 画出符合他们行驶路程 s (km) 与行驶时间 t (h) 之间关系的函数图象.



拓展创新

6. 如图, 在平面直角坐标系中, 边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中, AD 边的中点处有一动点 P , 动点 P 沿 $P \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow P$ 匀速运动一周, 则点 P 的纵坐标 y 与点 P 走过的路程 s 之间的函数关系用图象表示大致是 ()



第二学时



问题导学

通过前面的学习,我们已经初步了解了如何画函数的图象,如何利用函数的图象认识和研究函数.那么如何尽可能准确地画出函数的图象?画函数图象时要注意什么?怎样利用函数图象分析变量之间的关系?本学时的学习将引领同学们解答以上问题.让我们一起进入函数知识的宝库吧!



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 p77 的例 3,体会用“描点法”画函数图象的方法.

(1)在列表前,先确定了什么?表格中自变量 x 的取值从左到右是如何排列的?

(2)在描点时, x, y 的值分别作为点的什么坐标?

(3)在连线时,是按照什么顺序将各点用平滑的曲线连接的?

(4)用“描点法”画函数图象的一般步骤是什么?

2. 对于函数 $y = x + 0.5$ 的图象,从左到右呈____趋势,这说明 y 随着 x 的____而____. 对于函数 $y = \frac{6}{x} (x > 0)$ 的图象,从左到右呈____趋势,这说明 y 随着 x 的____而____.

自主测评

1. 下列函数中,其图象一定经过原点的函数是 ()

- A. $y = 3x - 2$

C. $y = x^2 - 3x + 1$
- B. $y = \frac{5}{x}$

D. $y = -\frac{3}{2}x$

2. 已知 $P(2, a)$ 是函数 $y = 2x + 3$ 的图象上的一个点,则 $a =$ ____.

3. 点 $A(3, -4)$ ____ (填“在”或“不在”)函数 $y = -2x + 2$ 的图象上.

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



合作学习

难点探究

1. 仿照教材 p77 的例 3,试画出函数 $y = -3x + 2$ 的图象.

分析:

(1)自变量 x 的取值范围是什么?

(2)为了较全面地研究这个函数,列表时对 x 的取值应注意什么?

2. 观察(1)中函数 $y = -3x + 2$ 的图象,它是什么形状?从左到右图象是呈上升还是下降趋势?当 x 的值由小变大时,函数 y 的值是如何变化的?

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

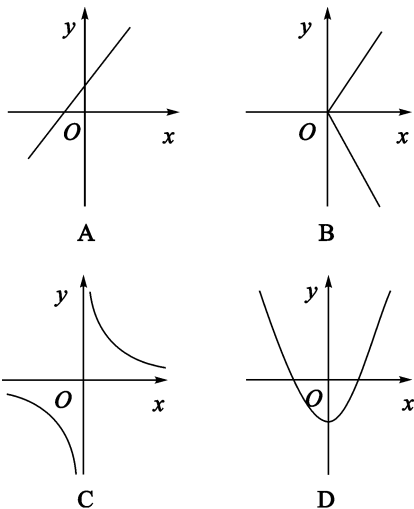
问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

1. (1) 画出函数 $y = -\frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象.

(2) 判断点 $(8, -\frac{1}{2})$ 和点 $(3, 2)$ 是否在此函数图象上.

2. 下列曲线中, 表示 y 不是 x 的函数的是



归纳梳理

1. 我们通常采用描点法画函数的图象, 一般可分为列表、描点、连线三个步骤.

2. 画函数图象时要注意以下几个问题:

(1) 列表时根据自变量的取值范围取值, 从小到大或自中间向两边选取, 取值要有代表性, 尽量使画出的函数图象能反映出函数的全貌.

(2) 描点时要以表中每对对应值为坐标, 点取得越多, 图象越准确.

(3) 连线时要用平滑的曲线将所描出的各点按横坐标由小到大的顺序连接起来.



深化拓展

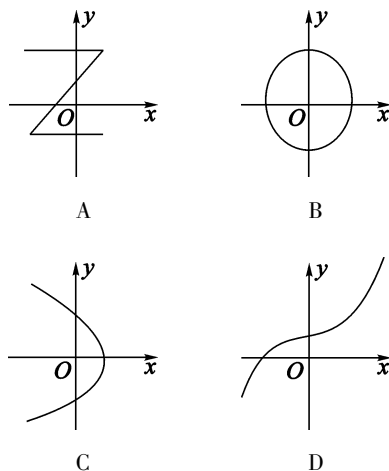
基础巩固

1. 已知点 $A(2, 3)$ 在函数 $y = ax^2 - x + 1$ 的图象上, 则 a 等于_____.

2. 下列各点中在函数 $y = 3x - 1$ 的图象上的是

- A. $(1, -2)$ B. $(-1, -4)$
C. $(2, 0)$ D. $(0, 1)$

3. 下列各曲线中表示 y 是 x 的函数的是

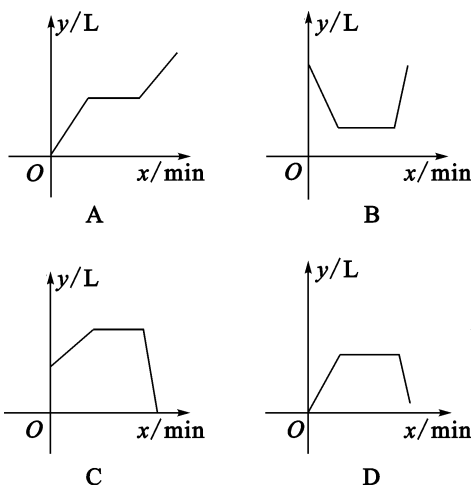


能力提升

4. 画出函数 $y = x + 1$ 的图象, 并结合图象解答下列问题:

- (1) 当 x 取何值时, y 的值为 0?
(2) 当 y 取何值时, x 的值为 0?
(3) 当 x 的值逐渐增大时, y 的值如何变化?

5. 打开某洗衣机开关, 在洗涤衣服时 (开始时洗衣机内无水), 洗衣机经历了进水、清洗、排水、脱水四个连续过程, 其中进水、清洗、排水时洗衣机中的水量 $y(L)$ 与时间 $x(\text{min})$ 之间满足某种函数关系, 其函数图象大致为



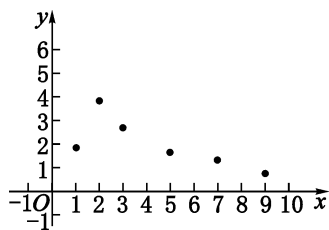
6. 已知 y 是 x 的函数, 自变量 x 的取值范围是 $x > 0$, 下表是 y 与 x 的几组对应值.

x	...	1	2	3	5	7	9	...
y	...	1.98	3.95	2.63	1.58	1.13	0.88	...

小腾根据学习函数的经验, 利用上述表格所反映出的 y 与 x 之间的变化规律, 对该函数的图象与性质进行了探究.

下面是小腾的探究过程, 请补充完整:

(1) 如图, 在平面直角坐标系中, 描出了以上表中各对对应值为坐标的点. 根据描出的点, 画出该函数的图象;

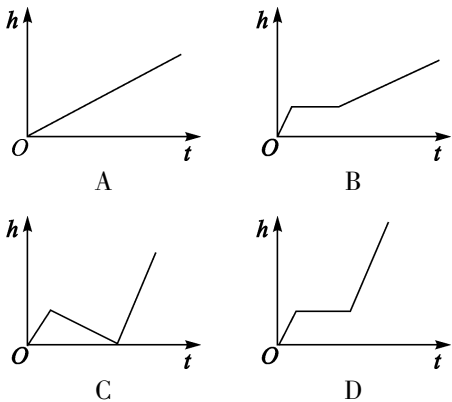
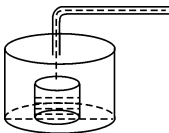


(2) 根据画出的函数图象, 写出:

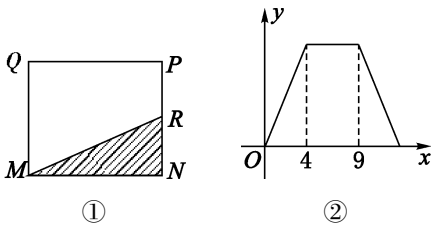
- ① $x=4$ 对应的函数值 y 约为 _____;
- ② 当 $y=1$ 时, x 的值约为 _____.

拓展创新

7. 小明做了一个数学实验: 将一个圆柱形的空玻璃杯放入形状相同的无水鱼缸内, 看作一个容器. 然后, 小明对准玻璃杯口匀速注水 (如图), 在注水过程中, 杯底始终紧贴鱼缸底部. 则下面可以近似地刻画出容器最高水位 h 与注水时间 t 之间的变化情况的是 ()



8. 如图①, 在矩形 $MNPQ$ 中, 动点 R 从点 N 出发, 沿 $N \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow M$ 方向运动至点 M 处停止. 设点 R 运动的路程为 x , $\triangle MNR$ 的面积为 y , 如果 y 关于 x 的函数图象如图②所示, 那么当 $x=9$ 时, 点 R 应运动到点 ()



- A. M 处
- B. N 处
- C. P 处
- D. Q 处

第三学时



问题导学

我国正迈入老龄化社会,生育率低、人口结构老化、社保制度滞后已成为影响未来发展的重大隐患.为了更好地研究我国新生儿出生率现状、正确预测未来,小明从网上查到 2005 年至 2016 年每年新生儿的出生人数,但他不清楚应该选择什么方法来表示新生儿出生人数与年份的函数关系.聪明的你会表示吗?

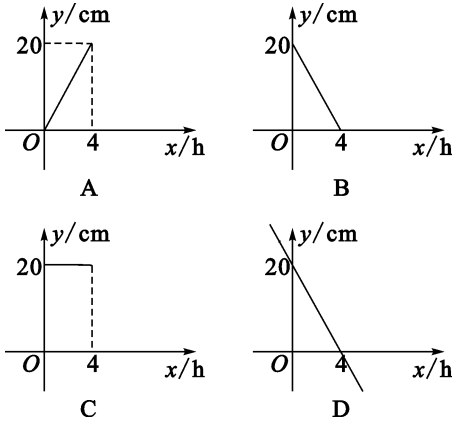
教材导读

阅读教材 p79 ~ p81 的有关内容,回答下列问题:

- 1. 函数有哪几种表示方法?
- 2. 例 4 中是以表格的形式表示了 6 对变量的值,从表中可以发现什么规律?
- 3. 此函数的图象为什么画成线段而不是直线或射线?
- 4. 对于实际问题中的函数关系,要画出其函数图象时有哪些步骤? 每一步要注意什么?
- 5. 三种函数的表示方法各有什么优缺点? 这三种表示方法之间有什么关系?

自主测评

1. 一根蜡烛长 20 cm,点燃后每小时燃烧 5 cm,燃烧时剩下的长度 y (cm) 与燃烧时间 x (h) 的函数关系用图象表示为下图中的 ()



2. 某种水果每千克售价 2.5 元,在坐标平面内表示 1 kg 到 50 kg 水果售价的图象是 ()

- A. 一条线段
- B. 一条直线
- C. 一条射线
- D. 以上答案都不是

3. 弹簧挂上物体后会伸长,测得一弹簧的长度 y (cm) 与所挂物体的质量 x (kg) 有下面的关系:

x /kg	0	1	2	3	4	5	6
y /cm	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15

那么弹簧总长 y (cm) 与所挂物体的质量 x (kg) 之间的函数解析式为 _____ (不考虑弹性限度).

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



合作学习

难点探究

等腰三角形的周长为 12 cm,若底边长为 y cm,一腰长为 x cm.

- (1) 写出 y 与 x 的函数解析式;
- (2) 求自变量 x 的取值范围;
- (3) 画出这个函数的图象.





归纳梳理

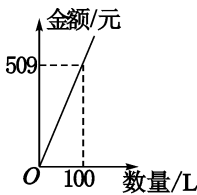
- 1. 画实际问题的函数图象时,必须先考虑函数自变量的取值范围. 有时为了表达的方便,建立平面直角坐标系时,横轴和纵轴上的单位长度可以不一致.
- 2. 在观察实际问题的函数图象时,先从两坐标轴表示的实际意义得到点的坐标的实际意义,然后观察图形,分析两变量间的关系,结合题意寻找对应的现实情境.



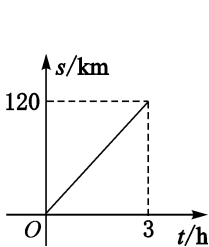
深化拓展

基础巩固

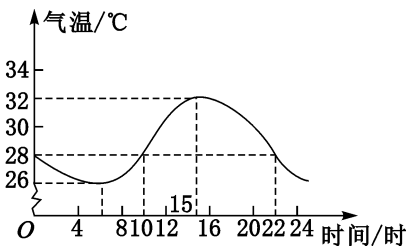
- 1. 某型号汽油的数量与相应金额的关系如图所示,那么这种汽油的单价是每升_____.



- 2. 某日上午,甲、乙两车先后从A地出发沿同一条公路匀速前往B地,甲车8点出发,如图是其行驶路程 $s(\text{km})$ 随行驶时间 $t(\text{h})$ 变化的图象. 乙车9点出发,若要在10点至11点之间(含10点和11点)追上甲车,则乙车的速度 $v(\text{km/h})$ 的范围是_____.



(第2题)



(第3题)

- 3. 经科学家研究,蝉在气温超过 $28\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时才会活跃起来,此时边吸树木的汁液边鸣叫. 如图是某地一天的气温变化图象,在这一天中,听不到蝉鸣的时间共_____小时.

能力提升

- 4. 图①中的摩天轮可抽象成一个圆,圆上一点离地面的高度 $y(\text{m})$ 与旋转时间 $x(\text{min})$ 之间的关系如图②所示.

反思:本题的难点是根据三角形三边关系定理得到自变量的取值范围.

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面

图象上点的意义是什么?



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

秋天到了,小明家的苹果丰收了. 他主动帮助妈妈到集市上去卖刚刚采摘下的苹果. 已知销售量 $x(\text{kg})$ 与售价 $y(\text{元})$ 的关系如下表所示:

销售量 x/kg	1	2	3	4	5
售价 $y/\text{元}$	2.1	4.2	6.3	8.4	10.5

(1)分析表格中的数据,售价 y 是怎样随销售量 x 的变化而变化的? 售价 y 是销售量 x 的函数吗? 如果是,写出函数的解析式,并画出函数的图象;

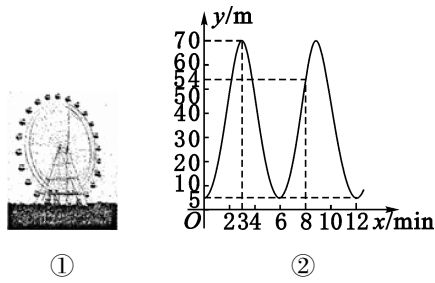
(2)当 $x=15$ 时, y 的值是多少?

(1) 根据图②填表:

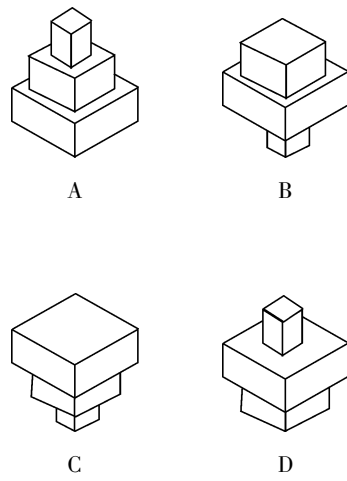
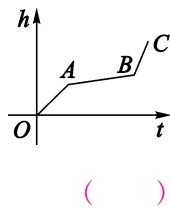
x/min	0	3	6	8	12	...
y/m						...

(2) 变量 y 是 x 的函数吗? 为什么?

(3) 根据图中的信息, 请写出摩天轮的直径.



5. 均匀地向一个容器中注水, 最后把容器注满, 在注水过程中, 水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图所示 (图中 $OABC$ 为折线), 则这个容器的形状可以是



拓展创新

6. 由于连续降雨, 水位不断上涨, 下表记录了 5 个时间点的桥面到水面的距离.

$x/\text{时}$	0	1	2	3	4	...
$y/\text{米}$	10	9.5	9	8.5	8	...

- (1) 根据上表写出 y 与 x 之间的函数关系式;
- (2) 画出这个函数的图象;
- (3) 据估计, 这种上涨的情况还会持续, 一艘船水上部分高 4 米, 下雨时距离此桥还有 16 小时的路程.
 - ① 若按原速前进能否通过此桥? 为什么?
 - ② 若船原来的速度为 24 千米/时, 为了顺利通过此桥, 请你给船长就船速方面提一个合理的建议.



19.2 一次函数

19.2.1 正比例函数

第一学时



问题导学

请大家看下面几个问题:

问题 1: 小明买一种单价为 2 元的笔记本, 他花的总费用 y (元) 与购买数量 x (本) 之间的关系;

问题 2: 无人驾驶汽车以 80 km/h 的速度匀速行驶, 行驶的路程 s (km) 与行驶时间 t (h) 之间的关系.

上述问题中的变量对应的规律可用什么样的函数解析式来表示? 这些函数解析式有什么共同点? 它们又有怎样的性质呢? 通过本学时的学习我们就会知道其中的答案.



自主学习



教材导读

1. 请同学们阅读教材 p86“问题 1”.

(1) 高铁列车运行的时间 = _____;

(2) 高铁列车的行程 y (单位: km) 与运行时间 t (单位: h) 之间有何函数关系? 自变量的取值范围是什么?

2. 独立完成教材 p86、p87“思考”中的问题, 并回答下列问题:

(1) 这些函数解析式的共同特征是什么? 它们都可以写成什么形式?

(2) 正比例函数的定义中, k 叫什么? 它的取值范围是什么? 在函数 $y = -\frac{2x}{3}$ 中, 比例系数是多少?

(3) 教材“思考”中各正比例函数的比例系数分

别是 _____.

(4) 判断一个函数是否为正比例函数应把握哪几点?

自主测评

1. 下列函数中, y 是 x 的正比例函数的是 ()

A. $y = 4x + 1$

B. $y = 2x^2$

C. $y = -4x$

D. $y = \frac{1}{x}$

2. 若 $y = 5x^{3m-2}$ 是正比例函数, 则 $m =$ _____.

3. 下列问题中的变量, 成正比例关系的是 ()

A. 人的身高与体重

B. 正方形的面积与它的边长

C. 买同一种练习本所需的钱数和所买的本数

D. 从甲地到乙地, 所用的时间与行驶的速度

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



合作学习

难点探究

1. 下列函数哪些是正比例函数? _____.

① $y = \frac{x}{3}$; ② $y = \frac{3}{x}$; ③ $y = -\frac{1}{2x}$; ④ $y = 2x$; ⑤ $y = x^2 +$

1; ⑥ $y = 5x + 2$.

2. 若函数 $y = (m-4)x$ 是 y 关于 x 的正比例函数, 则 $m =$ _____.

3. 若 x, y 是变量, 且函数 $y = (k+1)x^{k^2}$ 是正比例函数, 则 $k =$ _____.

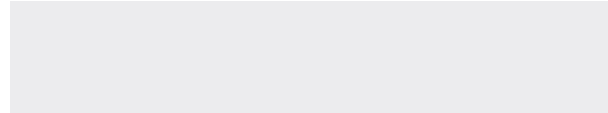
4. 写出比例系数是 -5 的正比例函数: _____.

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

1. 根据下表数据写出 y 与 x 之间的一个函数解析式,请问它是什么函数关系?

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-3	-6	-9

2. 若 y 与 $x-2$ 成正比例关系,且 $x=8$ 时, $y=6$. 写出 y 与 x 之间的函数解析式,并分别求出当 $x=4$ 和 $x=-3$ 时的函数值.



归纳梳理

判断一个函数是否为正比例函数,就是判断该函数解析式能否化为 $y=kx(k \neq 0)$ 的形式. 如果一个函数为正比例函数,那么关于自变量 x 的代数式必为单项式,系数 $k \neq 0$,且 x 的指数为 1.



深化拓展

基础巩固

1. 下列函数中, y 是 x 的正比例函数的是 ()
- A. $y=4x+1$ B. $y=2x^2$
C. $y=-\sqrt{5}x$ D. $y=\sqrt{x}$
2. 小明从今年一月起每月存 10 元零用钱, x 月后他的存钱总数为 y 元,则 y 关于 x 的函数解析式

为 _____,这是一个 _____ 函数. 当 $x=11$ 时, $y=$ _____.

3. 若正方形的周长为 P ,边长为 a ,则周长 P 与边长 a 之间的函数解析式为 _____,它是 _____ 函数.

4. 写出下列各问题中 y 与 x 的函数解析式,并判断 y 是否是 x 的正比例函数.

(1) 地面气温是 28°C ,如果高度每升高 1 km,气温下降 5°C ,写出气温 $y(^\circ\text{C})$ 与高度 $x(\text{km})$ 之间的函数解析式;

(2) 圆的周长 $y(\text{cm})$ 与半径 $x(\text{cm})$ 之间的函数解析式.

能力提升

5. 若函数 $y=(m-2)x+(2m+6)$ 是正比例函数,则 m 的值为 _____,此时正比例函数的解析式为 _____.

6. 已知 y 与 x 成正比例,且 $x=2$ 时, $y=-6$,则 $y=9$ 时, $x=$ _____.

拓展创新

7. 点燃蜡烛,蜡烛的长度与时间成正比例变短,长为 21 cm 的蜡烛,点燃 6 min 后,蜡烛变短 3.6 cm. 设蜡烛点燃 x min 变短 y cm. 求:

- (1) y 与 x 之间的函数解析式;
(2) 自变量 x 的取值范围;
(3) 此蜡烛需几分钟燃烧完?

第二学时



问题导学

如果汽车以 80 km/h 的速度匀速行驶,那么行驶的路程 $s(\text{km})$ 与行驶时间 $t(\text{h})$ 之间存在正比例函数关系,解析式是_____。为了能更好地刻画路程 $s(\text{km})$ 随行驶时间 $t(\text{h})$ 的变化趋势,我们需要画出函数的图象.那么正比例函数的图象是什么形状?由图象我们能得到什么信息?通过本学时的学习我们就会知道其中的答案.



自主学习



教材导读

我们知道,函数图象可以直观、清晰地表示函数关系.正比例函数的解析式具有共同的结构,那么它们的图象是否也有某种必然的共同之处呢?

阅读教材 p87~p89 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. (1)教材例 1(1)中的两个函数解析式中的 k 分别是多少?它们有什么共同点?函数的图象是什么形状?经过了第几象限?

(2)教材例 1(2)中的两个函数解析式中的 k 分别是多少?它们有什么共同点?函数的图象是什么形状?经过了第几象限?

2. 结合例 1,你能说出正比例函数 $y=3x$ 和 $y=-3x$ 的图象是什么吗?由此,你能想出画正比例函数的图象时,怎样画最简便吗?



自主测评

用你认为最简单的方法画出下列函数的图象:

$$y = \frac{3}{2}x.$$

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



合作学习



难点探究

1. 对比函数解析式 $y=2x$ 与 $y=\frac{1}{3}x$,它们有什么共同点?函数自变量的取值范围是什么?当 x 取负数时, y 是什么数?当 x 取 0 时, y 是什么数?当 x 取正数时, y 是什么数?

2. 对比函数 $y=2x$ 与 $y=\frac{1}{3}x$ 的图象,它们的图象都经过了哪几个象限?从左到右图象呈什么趋势?这说明 y 随着 x 的增大如何变化?

3. 请同学们类比上述方法,说出函数 $y=-1.5x$ 与 $y=-4x$ 的共同性质.

4. 一般地,正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$ 的图象是一条经过_____的直线,我们称它为直线 $y=kx$.

当 $k>0$ 时,直线 $y=kx$ 经过第_____象限,从左向右_____,即随着 x 的增大 y 也_____;

当 $k<0$ 时,直线 $y=kx$ 经过第_____象限,从左向右_____,即随着 x 的增大 y 反而_____.

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

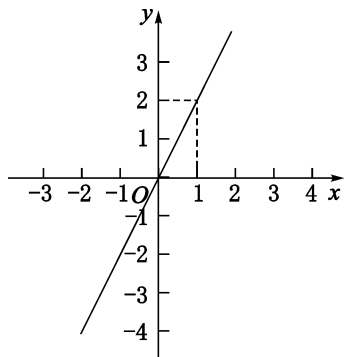
1. 用你认为最简单的方法画出下列函数的图象:

(1) $y = -\frac{5}{2}x$;

(2) $y = 6x$.

2. 经过原点与点(1,3)的直线是哪个函数的图象? 若经过原点与点(1,-4)呢? 你发现了什么?

3. 正比例函数的图象如图所示,求这个函数的解析式,并判断点(-4,-6)是否在这个函数的图象上.



归纳梳理

1. 正比例函数 $y=kx$ (k 是常数,且 $k \neq 0$) 的图象是一条经过原点的直线,我们通常称之为直

线 $y=kx$.

当 $k>0$ 时,直线 $y=kx$ 经过第三、第一象限,从左向右上升, y 随 x 的增大而增大;

当 $k<0$ 时,直线 $y=kx$ 经过第二、第四象限,从左向右下降, y 随 x 的增大而减小.

2. 根据两点确定一条直线,可以确定两个点(两点法)画正比例函数的图象.



深化拓展

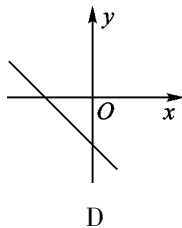
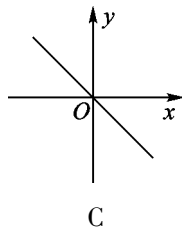
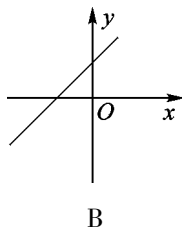
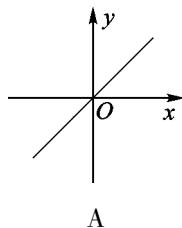


基础巩固

1. 正比例函数 $y=5x$ 的图象是经过点(0,__), (1,__)的一条__,并且经过第__象限;正比例函数 $y=-x$ 的图象是经过点(0,__), (1,__)的一条__,并且经过第__象限.

2. 已知正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过第三、第一象限,则 y 随 x 的增大而__.

3. 当 $k>0$ 时,正比例函数 $y=kx$ 的图象大致是 ()



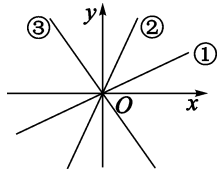
能力提升

4. (2016 · 陕西) 设 $A(a,b)$ 是正比例函数 $y=-\frac{3}{2}x$ 图象上的任意一点,则下列等式一定成立的是

- ()
- A. $2a+3b=0$ B. $2a-3b=0$
C. $3a-2b=0$ D. $3a+2b=0$

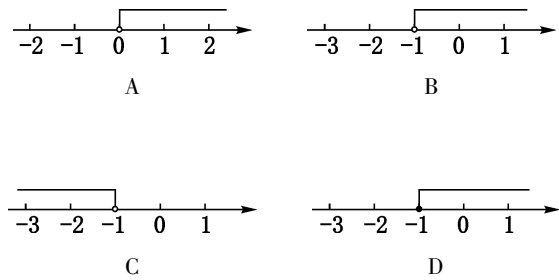
5. 如图,三个正比例函数的图象分别对应的解析式是:

① $y=ax$, ② $y=bx$, ③ $y=cx$, 则 a,b,c 的大小关系是 ()



- A. $a > b > c$ B. $c > b > a$
C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

6. 已知函数 $y = (m+1)x$, y 随 x 的增大而增大, 则 m 的取值范围在数轴上表示正确的是 ()

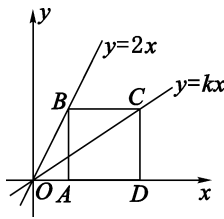


7. 已知正比例函数 $y = kx$ 的图象经过点 $(3, -6)$,

- (1) 求这个函数的解析式;
- (2) 画出这个函数的图象;
- (3) 判断点 $A(4, -2)$, 点 $B(-1.5, 3)$ 是否在此函数图象上;
- (4) 若点 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$ 在此函数的图象上, 且 $x_1 > x_2$, 比较 y_1, y_2 的大小.

拓展创新

8. 如图, B, C 分别是直线 $y = 2x$ 和 $y = kx (k \neq 0)$ 上的点, A, D 是 x 轴上的点, 已知四边形 $ABCD$ 是正方形, 求 k 的值.



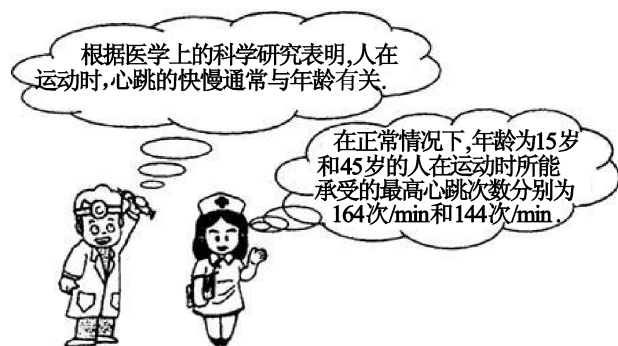
19.2.2 一次函数

第一学时



问题导学

周末,王伟陪爷爷到医院去体检,爷爷向医生咨询了有关老年人运动与健康的常识.医生提供了以下信息(如图),并告知在正常情况下,一个人在运动时每分钟心跳所能承受的最高次数是这个人的年龄的一次函数.此时,63岁的爷爷就问王伟:“我有一次跑步后测得10 s内心跳为26次,是否有危险?”什么是一次函数?如何帮助王伟解决这个问题?学完本学时的内容,相信你一定能行!



自主学习

教材导读

1. 完成教材 p90“思考”中的问题(1)~(4),并思考:这些函数是正比例函数吗?它们有哪些共同点?

2. 正比例函数与一次函数有什么关系?

3. 相信大家已经对一次函数的概念有了一定的理解,试着完成下面的问题:

(1) 一次函数的解析式可化为 _____ 的形式.

(2) 自变量 x 的次数为 _____.

(3) 对自变量系数(常数) k 的要求是 _____. 你知道为什么吗?

(4) 常数 b 可以是 0 吗? 当 $b=0$ 时, $y=kx+b$ 就成为 _____. 因此说 _____ 是特殊的一次函数.

自主测评

1. 下列函数解析式中,哪些是一次函数,哪些又是正比例函数?

(1) $y = \frac{2}{x-1}$; (2) $y = -2x+1$; (3) $y = 2x^2 - (3x+2x^2)$;

(4) $y = 1+2x^2$; (5) $y = -\frac{1}{3}x$.

2. 下列说法中不正确的是 ()

- A. 一次函数不一定是正比例函数
- B. 不是一次函数就一定不是正比例函数
- C. 正比例函数是特殊的一次函数
- D. 不是正比例函数就不是一次函数

3. 已知函数 $y = (2-m)x + 2m-3$, 求当 m 为何值时,

- (1) 此函数为正比例函数;
- (2) 此函数为一次函数.

收获与问题

请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

一次函数与正比例函数有什么区别和联系?



合作学习

难点探究

1. 函数 $y = \frac{2x-4}{4}$ 是一次函数吗? 如果是, 请写出 k, b 的值; 如果不是, 试说明理由.

2. 某种优质蚊香一盘长 105 cm, 小海点燃后观察发现每小时缩短 10 cm.

- (1) 写出蚊香点燃后的长度 y (cm) 与点燃时间 t (h) 之间的函数关系式. 它是一次函数吗?
- (2) 求点燃后 5 小时蚊香的长度.
- (3) 该盘蚊香可使用多长时间?

组内问题归结

请把组内不能解决的问题记录在下面

如何确定一次函数解析式中 k, b 的值?



探究展示

问题共析

要积极发言, 及时总结哦!

展示交流

已知: 关于 x 的函数 $y = (m-3)x^{|m|-2} + n - 2$.

- (1) 当 m, n 为何值时, 它是一次函数?
- (2) 当 m, n 为何值时, 它是正比例函数?



归纳梳理

1. 判断一个函数是否为一次函数, 关键要抓住一次函数的结构特征, 即

- (1) 可化为形如 $y = kx + b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$) 的形式;
- (2) 自变量 x 的次数为 1;
- (3) 对自变量系数 (常数) k 的要求是 $k \neq 0$.

2. 正比例函数是特殊的一次函数, 但一次函数不一定是正比例函数.

3. 对于一次函数, 千万不要忽略一次项系数 $k \neq 0$ 这个条件.



深化拓展

基础巩固

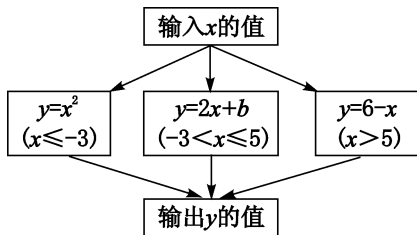
1. 已知函数 $y = (k-1)x + k^2 - 1$, 当 k 时, 它是一次函数; 当 $k =$ 时, 它是正比例函数.

2. 下列函数中, y 是 x 的一次函数的是 ()

- | | |
|----------------------|--------------------|
| A. $y = -3x + 5$ | B. $y = -3x^2$ |
| C. $y = \frac{1}{x}$ | D. $y = 2\sqrt{x}$ |

能力提升

3. 下列说法中错误的是 ()
- A. 一般地, 如果 $y=kx+b$, 那么 y 是 x 的一次函数
- B. $y=-5x$ 是一次函数, 也是正比例函数
- C. 在 $3x-y=0$ 中, y 与 x 成正比例
- D. 若 $y=(m^2-4)x-3$ 是一次函数, 则 $m \neq \pm 2$
4. 根据如图所示的程序计算函数 y 的值, 若输入的 x 值是 4 或 7 时, 输出的 y 的值相等, 则 b 等于 ()



- A. 9 B. 7
- C. -9 D. -7
5. 已知 A, B, C 是一条铁路线 (直线) 上顺次的三个站, A, B 两站相距 100 km. 现有一列火车从 B 站出发, 以 75 km/h 的速度向 C 站驶去. 设 x (h) 表示火车行驶的时间, y (km) 表示火车与 A 站的距离, 试写出 y 与 x 之间的函数解析式.

6. 已知 y 与 $(x-3)$ 成正比例, 且 $x=4$ 时, $y=8$, 求 y 与 x 之间的函数解析式.

拓展创新

7. 某工厂加工一批产品, 为了提前交货, 规定每个工人完成 100 个以内, 每个产品付酬 1.5 元; 超过 100 个, 超过部分每个产品付酬增加 0.3 元; 超过 200 个, 超过部分除按上述规定外, 每个产品再增加 0.4 元. 求一个工人:
- (1) 完成 100 个以内所得报酬 y (元) 与产品数 x (个) 之间的函数关系式;
- (2) 完成 100 个以上, 但不超过 200 个所得报酬 y (元) 与产品数 x (个) 之间的函数关系式;
- (3) 完成 200 个以上所得报酬 y (元) 与产品数 x (个) 之间的函数关系式.



第二学时



问题导学

前面我们已经学习了用描点法画函数的图象,也知道通常可以结合函数的图象研究它的性质.那么,一次函数的图象是什么形状呢?它又有怎样的性质呢?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 p91 例 2, 体会一次函数与正比例函数的区别与联系.

(1) 从解析式上看, 函数 $y = -6x$ 和 $y = -6x + 5$ 有什么异同?

(2) 观察所列表格中的数值, 你能发现对于自变量的任意一个值, 这两个函数相应的值有什么关系吗?

(3) 上述关系反映在图象上说明函数 $y = -6x + 5$ 的图象上的点是由函数 $y = -6x$ 图象上相应的点作怎样的变化得到的?

(4) 观察图象, 你认为函数 $y = -6x + 5$ 的图象与函数 $y = -6x$ 的图象有什么关系?

2. 从上面的学习中, 你能猜到函数 $y = 2x$ 和 $y = 2x - 1$ 的图象的关系吗? 在同一平面直角坐标系中画出 $y = 2x$ 和 $y = 2x - 1$ 的图象, 验证你的猜想是否正确.

3. 函数 $y = 2x - 1$ 与 $y = -0.5x + 1$ 的图象也具有上面的关系吗? 画图试一试.

4. 通过前面的学习, 相信同学们已经对一次函数 $y = kx + b$ 与 $y = kx$ 的图象的关系有了一些了解, 试完成下面的问题.

一次函数 $y = kx + b$ 的图象是_____, 我们称它为直线_____, 它可以看成是由直线_____向上或向下平移_____个单位长度而得到的(当 $b > 0$ 时, 向_____平移; 当 $b < 0$ 时, 向_____平移).

自主测评

1. 在同一平面直角坐标系中, 对于函数: ① $y = -x - 1$, ② $y = x + 1$, ③ $y = -x + 1$, ④ $y = 2x - 1$ 的图象, 通过点 $(-1, 0)$ 的是_____, 相互平行的是_____ (填序号).

2. 直线 $y = 2x - 3$ 可以看成是由正比例函数_____的图象向_____平移_____个单位长度得到的.

3. 将函数 $y = -3x$ 的图象向上平移 5 个单位长度, 所得图象的函数解析式为_____. 平移后的图象与 y 轴的交点坐标为_____, 与 x 轴的交点坐标为_____.

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与直线 $y = kx$ ($k \neq 0$) 有什么关系?



合作学习

难点探究

1. 思考: (1) 画一次函数的图象时, 怎样画最简单? 为什么?

(2) 在同一平面直角坐标系中画出下列函数的图象: $y = x + 1$, $y = -x + 1$. 要画这两个函数的图象, 你认为取哪两个点较好?

2. 用最简便的方法完成教材 p93 中的“探究”.

3. 观察我们在教材 p93“探究”中画出的四个一次函数的图象,能否从中发现一些规律?

(1)填写下表:

$y=kx+b$ ($k \neq 0$)	经过的象限	图象变化趋势	函数的 增减性
$k>0, b>0$			
$k>0, b<0$			
$k<0, b>0$			
$k<0, b<0$			

观察表中的规律,你认为一次函数 $y=kx+b$ 的增减性是由什么决定的? 经过的象限呢?

(2)对于一次函数 $y=kx+b$,其中 b 实际上是该函数图象与 轴交点的 坐标.

当 b 0 时,图象与 y 轴的交点在 x 轴的上方;当 b 0 时,图象与 y 轴的交点在 x 轴的下方.

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面

一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 中的 k, b 是如何决定函数的性质的?



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

1. 已知一次函数 $y=(m-3)x+2m-1$ 的图象经过第一、二、四象限,求 m 的取值范围.

2. 已知点 $(-1, a)$ 和 $(\frac{1}{2}, b)$ 都在直线 $y=\frac{2}{3}x+3$ 上,试比较 a 和 b 的大小. 你能想出几种判断的方法?



归纳梳理

1. 一次函数的图象是一条直线,正比例函数的图象是一条经过原点的直线. 在作图时,只需确定直线上两点的位置,就可得到一次函数的图象.

2. 由 k, b 的符号可决定直线 $y=kx+b$ 的位置,反过来,由直线 $y=kx+b$ 的位置可确定 k, b 的符号,这是一种数形结合的数学思想.

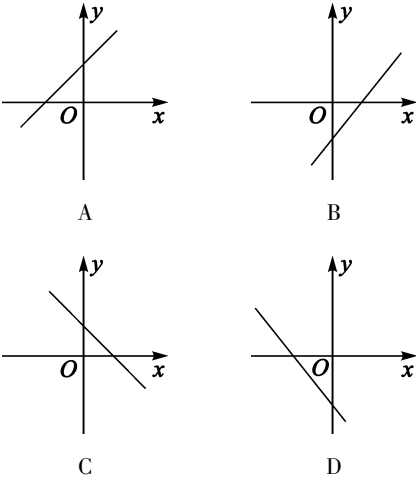
3. 一般地,一次函数 $y=kx+b$ 有下列性质:
- (1)当 $k>0$ 时, y 随 x 的增大而增大;
 - (2)当 $k<0$ 时, y 随 x 的增大而减小.



深化拓展

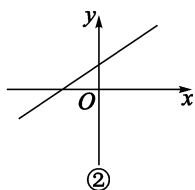
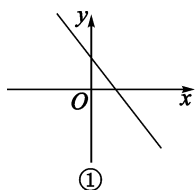
基础巩固

- 1. 一次函数 $y=-2x+3$ 的图象不经过 ()
 - A. 第一象限
 - B. 第二象限
 - C. 第三象限
 - D. 第四象限
- 2. 下列函数中, y 随 x 的增大而减小的函数是 ()
 - A. $y=x+3$
 - B. $y=-2+6x$
 - C. $y=-3x+1$
 - D. $y=3x$
- 3. 若 $b>0$, 则一次函数 $y=-x+b$ 的图象大致是 ()



4. 某一次函数图象的位置大致如图所示, 试分别确定 k, b 的符号.

图①中, k 0, b 0; 图②中, k 0, b 0.



能力提升

5. 已知将直线 $y=x-1$ 向上平移 2 个单位长度后得到直线 $y=kx+b$, 则下列关于直线 $y=kx+b$ 的说法正确的是 ()

- A. 经过第一、二、四象限
- B. 与 x 轴交于点 $(1, 0)$
- C. 与 y 轴交于点 $(0, 1)$
- D. y 随 x 的增大而减小

6. 若一次函数 $y=ax+b$ 的图象经过第一、二、四象限, 则下列不等式中总是成立的是 ()

- A. $b < 0$
- B. $a-b > 0$
- C. $a^2+b > 0$
- D. $a+b > 0$

7. 已知关于 x 的函数 $y=(m-1)x+1-3m$ 为一次函数, 试根据下列各条件确定 m 的值或取值范围.

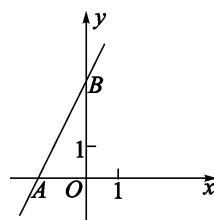
- (1) 该函数图象经过原点;
- (2) 该函数图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, 2)$;
- (3) 该函数图象上有两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 当 $x_1 > x_2$ 时, $y_1 > y_2$;
- (4) 该函数的图象与直线 $y=3x$ 平行.

拓展创新

8. 如图, 直线 $y=2x+3$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B .

(1) 求 A, B 两点的坐标;

(2) 过点 B 作直线 BP , 交 x 轴于点 P , 且使 $OP=2OA$, 求 $\triangle ABP$ 的面积.



第三学时



问题导学

爸爸准备为小明买一双新的运动鞋,但要小明自己算出穿几码的鞋. 小明回家量了一下妈妈 36 码的鞋子长 23 cm,爸爸 41 码的鞋子长 25.5 cm. 小明问了隔壁的小东哥哥,了解到他穿的 38 码的鞋子长 24 cm,那么自己穿的 23.5 cm 长的鞋是几码呢? 小明犯难了. 你想帮他解决这个问题吗? 那就快进入本学时的学习吧!



自主学习



教材导读

请同学们阅读教材 p93、p94 的例 4,思考并回答下列问题:

1. 求一次函数 $y=kx+b$ 的解析式,关键是要要求出哪些字母的值?

2. 运用待定系数法求一次函数解析式的一般步骤是什么?

3. 已知一个一次函数,当自变量 $x=3$ 时,函数值 $y=5$;当 $x=-4$ 时, $y=-9$. 求这个一次函数的解析式.



自主测评

1. 若一次函数 $y=kx+2$ 的图象经过点 $A(-1, 1)$,则 $k=$ _____.

2. 已知一次函数 $y=kx+b$,当 $x=1$ 时, $y=2$;当 $x=2$ 时, $y=3$. 则此函数的解析式为 _____.

3. 已知一次函数的图象经过点 $A(-2, -1)$,且与直线 $y=2x-3$ 平行,则此函数的解析式为 ()

- A. $y=x+1$
- B. $y=2x+3$
- C. $y=2x-1$
- D. $y=-2x-5$

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



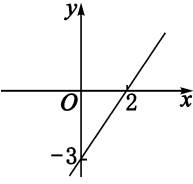
合作学习



难点探究

1. 已知一次函数的图象如图所示,写出它的解析式.

提示:观察图象,你能得到什么信息?



2. 写出两个一次函数,使它们的图象都经过点 $(-2, 3)$.

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面

确定一个一次函数的解析式需要几个条件?



探究展示

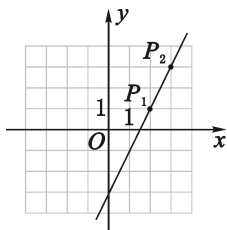
问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

1. 如图,直线 l 上有一点 $P_1(2,1)$,将点 P_1 先向右平移 1 个单位长度,再向上平移 2 个单位长度得到点 P_2 ,点 P_2 恰好在直线 l 上.

- (1) 写出点 P_2 的坐标;
- (2) 求直线 l 所表示的一次函数的解析式;
- (3) 若将点 P_2 先向右平移 3 个单位长度,再向上平移 6 个单位长度得到点 P_3 . 请判断点 P_3 是否在直线 l 上,并说明理由.



2. 你会用所学知识帮小明解决“问题导学”中的问题吗? 请尝试完成.



归纳梳理

利用待定系数法确定函数解析式的一般步骤是:

- (1) 写出函数解析式的一般形式;
- (2) 把自变量与函数的对应值(也可能是以函数图象上点的坐标的形式给出)代入函数解析式中,得到关于待定系数的方程或方程组(一般有几个待定系数,就要有几个方程);
- (3) 解方程或方程组,求出待定系数的值;
- (4) 把待定系数的值代入所设函数的解析式,从而写出函数的解析式.

概括为:一设、二列、三解、四还原.



深化拓展

基础巩固

1. 已知一次函数 $y=kx+b$,当 $x=2$ 时, y 的值为 4;当 $x=-2$ 时, y 的值为 -2. 则 $k=$, $b=$.

2. 把直线 $y=2x-1$ 向左平移 1 个单位长度,平移后直线对应的关系式为 ()

- A. $y=2x-2$ B. $y=2x+1$
C. $y=2x$ D. $y=2x+2$

能力提升

3. 已知一次函数 $y=2x+b$ 和 $y=-x+a$ 的图象都经过点 $A(0,-4)$,且分别与 x 轴交于 B,C 两点,则 $\triangle ABC$ 的面积应为 ()

- A. 13 B. 14
C. 11 D. 12

4. 已知直线 m 与直线 $y=2x+1$ 的交点的横坐标为 2,与直线 $y=-x+2$ 的交点的纵坐标为 1,则直线 m 的函数解析式为 .

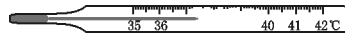
5. 一次函数 $y=kx-4$ ($k<0$) 的图象与两坐标轴所围成的三角形的面积等于 4,则此一次函数的解析式为 .

拓展创新

6. 已知水银体温计的读数 y ($^{\circ}\text{C}$) 与水银柱的长度 x (cm) 之间是一次函数关系. 现有一支水银体温计,其部分刻度线不清晰(如图),表中记录的是该体温计部分清晰刻度线及其对应水银柱的长度.

水银柱的长度 x/cm	4.2	...	8.2	9.8
体温计的读数 $y/^{\circ}\text{C}$	35.0	...	40.0	42.0

- (1) 求 y 关于 x 的函数关系式;
- (2) 用该体温计测体温时,水银柱的长度为 6.2 cm,求此时体温计的读数.

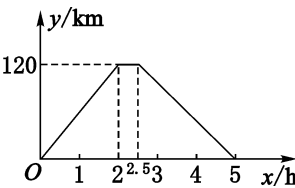


第四学时



问题导学

在一次运输任务中,一辆汽车将一批货物从甲地运往乙地,到达乙地卸货后返回. 设汽车从甲地出发 $x(\text{h})$ 时,汽车与甲地的距离为 $y(\text{km})$, y 与 x 的函数关系如图所示,你能从图象中知道这辆汽车的往返速度吗? 这辆车从甲地出发 4 h 时与甲地相距多少千米?



如何利用图象解决这些问题? 解决这些问题用到了什么数学思想和方法? 让我们带着问题共同进入本学时的学习.



自主学习

教材导读

请同学们阅读教材 p94、p95 的例 5, 思考并回答以下几个问题:

- 1. 如果购买种子的数量不超过 2 kg , 付款金额应如何计算?
- 2. 对“一次购买 2 kg 以上的种子, 超过 2 kg 部分的种子价格打八折”这句话你是如何理解的? 若购买了 10 kg 种子, 应付多少元? 若购买了 $x\text{ kg}(x>2)$ 种子, 应付多少元?
- 3. 问题中的函数关系有几个? 每个函数中自变量的取值范围分别是什么? 解决这个问题用到了什么数学思想?

自主测评

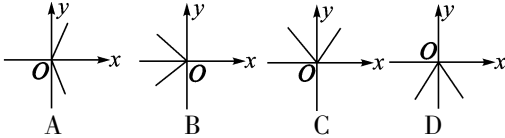
1. 某水果批发市场香蕉的价格如下表:

购买香蕉的数量	不超过 20 kg	20 kg 以上但不超过 40 kg	40 kg 以上
每千克的价格	6 元	5 元	4 元

若小强购买香蕉 $x\text{ kg}(x>40)$ 付了 y 元, 则 y 关于 x 的函数解析式为 _____.

2. 中亚手机专卖店对营业员的工资标准规定如下: 固定基本工资 400 元, 多销多得, 每销售一部手机奖励 15 元, 则营业员每月工资总额 $y(\text{元})$ 与销售手机数量 $x(\text{部})$ 之间的函数解析式为 _____. 营业员小芳本月销售手机 30 部, 她本月的工资总额是 _____ 元.

3. 当 $x>0$ 时, y 与 x 的函数解析式为 $y=2x$; 当 $x\leq 0$ 时, y 与 x 的函数解析式为 $y=-2x$. 则在同一平面直角坐标系中此函数的图象大致为 ()



收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



合作学习

难点探究

同学们, 通过前面的自学你一定已经具有解决这类问题的法宝了, 让我们一起对“问题导学”中所提出的问题进行研究吧.

- 1. 从图象上看, 折线由几部分组成? 这几段图象相对应的自变量的取值范围是什么?
- 2. 与 x 轴平行的水平线有什么实际含义?
- 3. 求 y 与 x 的函数解析式.
- 4. 完成“问题导学”中的问题.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



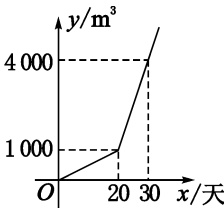
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

某农户种植一种经济作物,总用水量 $y(\text{m}^3)$ 与种植时间 $x(\text{天})$ 之间的函数关系如图所示.

- (1)第 20 天的总用水量为多少立方米?
- (2)当 $x \geq 20$ 时,求 y 与 x 之间的函数解析式;
- (3)种植时间为多少天时,总用水量达到 $7\,000\text{ m}^3$?



归纳梳理

- 一次函数的应用主要有两个方面:
- 1. 如果给出了一次函数的解析式,那么可直接应用一次函数的性质解决问题.
 - 2. 如果问题只用语言叙述、表格或图象提供了一次函数的情境,那么应先建立一次函数的模型,进而利用函数的性质解决问题. 对于一个问题的几种不同情况,应分类讨论,还要注意自变量的取值范围.



深化拓展

基础巩固

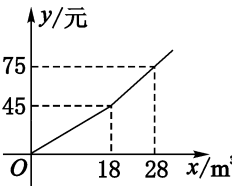
1. 某商店出售一种瓜子,其售价 $y(\text{元})$ 与瓜子质量 $x(\text{kg})$ 之间的关系如下表:

质量 x /kg	1	2	3	4	...
售价 y /元	3. 60+	7. 20+	10. 80+	14. 40+	...
	0. 20	0. 20	0. 20	0. 20	

由上表,得 y 与 x 之间的函数解析式是_____.

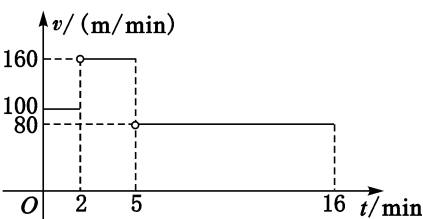
2. 某市规定了每月用水 18 m^3 以内(含 18 m^3)和用水 18 m^3 以上两种不同的收费标准,该市用户每月应缴水费 $y(\text{元})$ 是用水量 $x(\text{m}^3)$ 的函数,其图象如图所示.

- (1)若某月用水量为 18 m^3 ,则应缴水费多少元?
- (2)求当 $x > 18$ 时, y 关于 x 的函数解析式. 若小敏家某月缴水费 81 元,则这个月用水量为多少立方米?



能力提升

3. 小明从家出发沿一条直道跑步,经过一段时间后原路返回,刚好在第 16 min 时回到家中. 设小明出发第 $t\text{ min}$ 时的速度为 $v\text{ m/min}$,离家的距离为 $s\text{ m}$, v 与 t 之间的函数关系如图所示(图中的空心圈表示不包含这一点).



- (1) 小明出发第 2 min 时离家的距离为 _____ m;
- (2) 当 $2 < t \leq 5$ 时, 求 s 与 t 之间的函数表达式;
- (3) 画出 s 与 t 之间的函数图象.

4. 对于实数 a, b , 我们定义符号 $\max\{a, b\}$ 的意义为: 当 $a \geq b$ 时, $\max\{a, b\} = a$; 当 $a < b$ 时, $\max\{a, b\} = b$; 如: $\max\{4, -2\} = 4$, $\max\{3, 3\} = 3$, 若关于 x 的函数为 $y = \max\{x+3, -x+1\}$, 则该函数的最小值是 ()

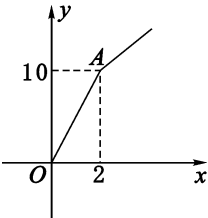
- A. 0
- B. 2
- C. 3
- D. 4

5. 一次函数 $y = kx + b$, 当 $1 \leq x \leq 4$ 时, $3 \leq y \leq 6$, 则 $\frac{b}{k}$ 的值为 _____.

拓展创新

6. 某玉米种子的价格为 a 元/千克, 如果一次性购买 2 千克以上的该种子, 超过 2 千克部分的种子价格打八折. 某科技人员对付款金额和购买量这两个变量的对应关系用列表法做了分析, 并绘制了函数图象. 以下是该科技人员绘制的表格和图象的不完整资料, 已知点 A 的坐标为 $(2, 10)$.

购买量/千克	1	1.5	2	2.5	3
付款金额/元	a	7.5	10	12	b



- (1) 写出表中 a, b 的值;
- (2) 求出当 $x > 2$ 时, y 关于 x 的函数解析式;
- (3) 甲农户将 8.8 元钱全部用于购买该玉米种子, 乙农户购买了 4.165 千克该玉米种子, 分别计算他们的购买量和付款金额.



19.2.3 一次函数与方程、不等式



问题导学

兄弟俩赛跑,哥哥先让弟弟跑 9 m,然后自己才开始跑,已知弟弟每秒跑 3 m,哥哥每秒跑 4 m. (1)何时弟弟跑在哥哥前面? (2)何时哥哥追上弟弟? (3)何时哥哥跑在弟弟前面? 你能利用什么知识来解决这些问题? 能利用函数知识来求解吗? 这些不同方法之间又有什么联系呢? 你一定很想知道吧,那就赶快进行下面的学习吧!



自主学习

教材导读

阅读教材 p96~p98 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. 关于教材 p96 的第一个“思考”中的三个方程:
三个方程的共同点是 _____, 不同点是 _____.

从函数的角度看:

解方程(1) $2x+1=3$ 就是求函数 $y=2x+1$ 当函数值 $y=3$ 时,自变量 x 的值;

解方程(2) $2x+1=0$ 就是求函数 $y=2x+1$ 当函数值 $y=$ _____ 时,自变量 x 的值;

解方程(3) $2x+1=-1$ 就是求函数 $y=2x+1$ 当函数值 $y=$ _____ 时,自变量 x 的值.

从上面解答问题的过程看,你能说出一元一次方程 $ax+b=0$ ($a \neq 0$) 与一次函数 $y=ax+b$ 的关系吗?

2. 关于教材 p96 的第二个“思考”中的三个不等式:

三个不等式的共同点是 _____, 不同点是 _____.

从函数的角度看:

解不等式 $3x+2>2$ 就是求函数 $y=3x+2$ 当函数值 $y>2$ 时,自变量 x 的取值范围;

解不等式 $3x+2<0$ 就是求函数 $y=3x+2$ 当函数值 $y=$ _____ 时,自变量 x 的取值范围;

解不等式 $3x+2<-1$ 就是求函数 $y=3x+2$ 当函数值 $y=$ _____ 时,自变量 x 的取值范围.

从上面解答问题的过程看,你能说出一元一次不等式 $ax+b>0$ ($a \neq 0$) 与一次函数 $y=ax+b$ 的关系吗?

3. 关于教材 p97 的“问题 3”:

(1) 某时刻气球所在的海拔高度如何计算? 写出两个气球某一时刻的海拔高度 y (单位:m) 与上升时间 x (单位:min) 之间的函数关系式.

$$y_1 = \text{_____}; y_2 = \text{_____}.$$

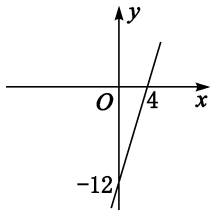
(2) 两个气球在上升 1 h 的过程中,它们所在的位置发生了哪些变化?

(3) 如何求在什么时刻两个气球位于同一高度?

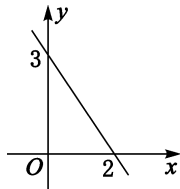
(4) 问题“求 x 等于多少时,两个气球位于同一高度”与“求当 x 取何值时,函数 $y=x+5$ 和 $y=0.5x+15$ 的函数值相同”有什么关系?

自主测评

1. 求方程 $-5x - 10 = 5$ 的解可以看成是求函数 $y = -5x - 10$ 当函数值 $y = 5$ 时, 自变量 x 的值.
2. 如图所示是一次函数 $y = 3x - 12$ 的图象, 观察图象回答下列问题:
当 $y = 0$ 时, $x =$ _____. 由此可知方程 $3x - 12 = 0$ 的解为 _____.



(第2题)



(第4题)

3. 函数 $y = 2x$ 与 $y = x + 1$ 的图象的交点坐标为 _____.
4. 如图, 直线 $y = kx + 3$ 经过点 $(2, 0)$, 则关于 x 的不等式 $kx + 3 > 0$ 的解集是 ()
- A. $x > 2$ B. $x < 2$
C. $x \geq 2$ D. $x \leq 2$

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



合作学习

难点探究

1. 我们可以利用函数 $y = -2x + 3$ 的图象求方程 $-2x + 3 = 5$ 的解, 那么你能利用函数 $y = -2x + 3$ 的图象求出方程 $-2x + 2 = -1$ 的解吗? 如果能, 试着求出来.
2. 利用函数的知识解不等式 $2x + 4 > 6$, 可以选择哪些函数的图象? 利用哪种函数的图象求解会更简便?

3. 对教材 p97“问题3”的研究:

- (1) 直线 $y = x + 5$ 上的点的坐标与方程 $x - y = -5$ 的解有什么关系?
- (2) 直线 $y = 0.5x + 15$ 上的点的坐标与方程 $0.5x - y = -15$ 的解有什么关系?
- (3) 两条直线的交点坐标与方程组 $\begin{cases} x - y = -5, \\ 0.5x - y = -15 \end{cases}$ 的解有什么关系? 由此你能想到什么?

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

问题共析 要积极发言, 及时总结哦!

展示交流

1. 用函数方法解方程 $-2x + 4 = -4$.
2. 用函数方法解不等式 $2x + 3 < 5$.

3. 用函数方法解方程组 $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x - y = 1. \end{cases}$





归纳梳理

1. 任何一个关于 x 的一元一次方程都可以转化成 $kx+b=0 (k \neq 0)$ 的形式, 解关于 x 的方程 $kx+b=0$ 可以转化为: 已知函数 $y=kx+b$ 的函数值为 0, 求自变量 x 的值. 从图象上看, 相当于已知直线 $y=kx+b$, 确定它与 x 轴的交点的横坐标.

2. (1) 一元一次不等式 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0 (a, b$ 为常数, $a \neq 0)$ 可以看作是当函数 $y=ax+b$ 的值大于 0 或小于 0 的情形, 所以解一元一次不等式可以转化为当相应的一次函数值大于 (或小于) 0 时, 求自变量相应的取值范围.

(2) 不等式 $ax+b>0$ 的解集就是函数 $y=ax+b$ 的图象在 x 轴上方的部分所对应的自变量的取值的全体; 不等式 $ax+b<0$ 的解集就是函数 $y=ax+b$ 的图象在 x 轴下方的部分所对应的自变量的取值的全体.

3. 解关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} y=kx+b, \\ y=mx+n, \end{cases}$ 从“数”的角度看, 相当于考虑当自变量为何值时两个函数的值相等, 以及这个函数值是多少; 从“形”的角度看, 相当于确定两条直线 $y=kx+b$ 与 $y=mx+n$ 的交点坐标.

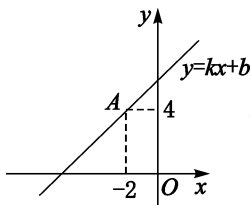


深化拓展

基础巩固

1. 已知关于 x 的方程 $mx+n=0$ 的解是 $x=-2$, 则直线 $y=mx+n$ 与 x 轴的交点坐标是_____.

2. 如图, 直线 $y=kx+b (k \neq 0)$ 经过点 $A(-2, 4)$, 则不等式 $kx+b>4$ 的解集为 ()



- A. $x>-2$ B. $x<-2$
C. $x>4$ D. $x<4$

3. 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(0, 1), B(2, 0)$, 则当 x _____ 时, $y \leq 0$.

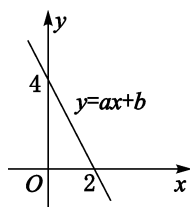
4. 一次函数 $y=2x+3$ 与 $y=2x-3$ 的图象的位置

关系是_____, 即_____ (填“有”或“没有”)

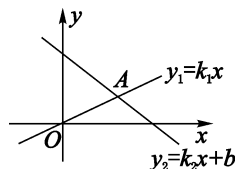
交点, 由此可知方程组 $\begin{cases} 2x-y+3=0, \\ 2x-y-3=0 \end{cases}$ 的解的情况是_____.

能力提升

5. 如图, 一次函数 $y=ax+b$ 的图象与 x 轴相交于点 $(2, 0)$, 与 y 轴相交于点 $(0, 4)$, 结合图象可知, 关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解是_____.



(第5题)



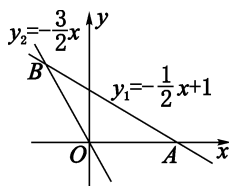
(第6题)

6. 如图, 正比例函数 $y_1=k_1x$ 和一次函数 $y_2=k_2x+b$ 的图象相交于点 $A(2, 1)$. 当 $x<2$ 时, y_1 _____ y_2 . (填“ $>$ ”或“ $<$ ”)

7. 方程组 $\begin{cases} x+y=15, \\ x-y=7 \end{cases}$ 的解为_____, 则直线 $y=-x+15$ 和 $y=x-7$ 的交点坐标是_____.

拓展创新

8. 如图, 已知直线 $y_1=-\frac{1}{2}x+1$ 与 x 轴交于点 A , 与直线 $y_2=-\frac{3}{2}x$ 交于点 B . 求:



- (1) 求 $\triangle AOB$ 的面积;
(2) 当 $y_1>y_2$ 时, x 的取值范围.

19.3 课题学习 选择方案

第一学时



问题导学

做一件事,有时有不同的实施方案.比较这些方案,从中选择最佳方案作为行动计划是非常必要的.请同学们看下面的问题:

暑假快要到了,某学校校长将带领该校市级“三好学生”去北京旅游.甲旅行社说:“如果校长买全票一张,则其余学生可享受半价优惠.”乙旅行社说:“包括校长在内,全部按全票价的六折优惠(即按全票价的60%收费).”甲、乙旅行社的全票价均为240元.

同学们能为校长作出选择吗?选择哪家旅行社与什么有关?其中用到了什么知识?让我们带着问题走进今天的学习!



自主学习

教材导读

阅读教材 p102、p103 的“问题 1”,思考并回答下列问题:

1. 在方案 A, B 中,上网费用与什么因素有关?

2. 设月上网时间为 x h, 方案 A 的收费金额为 y_1 元, 方案 B 的收费金额为 y_2 元, 方案 C 的收费金额为 y_3 元.

(1) 在方案 A 中, 当 $x=20$ 时, $y_1 =$ _____; 当 $x=25$ 时, $y_1 =$ _____; 当 $x=30$ 时, $y_1 =$ _____.

当 $0 \leq x \leq 25$ 时, $y_1 =$ _____;

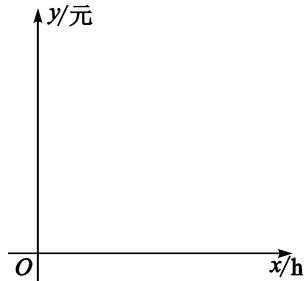
当 $x > 25$ 时, $y_1 =$ _____.

当 $y_1 = 50$ 时, $x =$ _____.

(2) 在方案 B 中, 当 $0 \leq x \leq 50$ 时, $y_2 =$ _____; 当 $x > 50$ 时, $y_2 =$ _____. 当 $y_2 = 120$ 时, $x =$ _____.

(3) 在方案 C 中, $y_3 =$ _____.

(4) 将三种函数的图象画在同一平面直角坐标系中, 结合图象与解析式分析:



当上网时间 _____ 时, 选择方案 A 最省钱;

当上网时间 _____ 时, 选择方案 B 最省钱;

当上网时间 _____ 时, 选择方案 C 最省钱.

自主测评

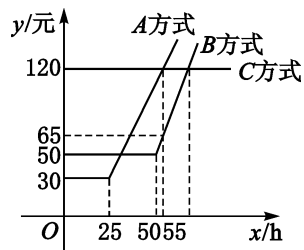
1. 某单位要印刷产品说明书, 甲印刷厂提出: 每份说明书收 1 元印刷费, 另收 1 500 元制版费; 乙印刷厂提出: 每份说明书收 2.5 元印刷费, 不收制版费.

(1) 甲厂印刷 x 份的费用为 $y_1 =$ _____, 乙厂印刷 x 份的费用为 $y_2 =$ _____.

(2) 当印刷 800 份说明书时, 选择 _____ 印刷厂比较合算.

(3) 当印刷 _____ 份说明书时, 两印刷厂费用相同.

2. 某通讯公司就宽带上网推出 A, B, C 三种月收费方式. 这三种收费方式每月所需的费用 y (元) 与上网时间 x (h) 的函数关系如图所示, 则下列判断错误的是 ()



A. 每月上网时间不足 25 h 时, 选择 A 方式最省钱

B. 每月上网费用为 60 元时, B 方式可上网的时间比 A 方式多

C. 每月上网时间为 35 h 时, 选择 B 方式最省钱

D. 每月上网时间超过 70 h 时, 选择 C 方式最省钱

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

上述问题中,都是通过几种方案得到几个不同的函数解析式,如何根据这几个函数解析式来说明各种方案的优势?

合作学习

难点探究

学校“百变魔方”社团准备购买 A,B 两种魔方. 已知购买 2 个 A 种魔方和 6 个 B 种魔方共需 130 元,购买 3 个 A 种魔方和 4 个 B 种魔方所需款数相同.

- (1)求这两种魔方的单价;
- (2)结合社员们的需求, 社团决定购买 A,B 两种魔方共 100 个(其中 A 种魔方不超过 50 个). 某商店有两种优惠活动,如图所示.

请根据以上信息,说明选择哪种优惠活动购买魔方更实惠.

优惠活动

活动一:“疯狂打折”

A种魔方八折
B种魔方四折

活动二:“买一送一”

购买一个A种魔方
送一个B种魔方

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

根据前面所学,你能解答“问题导学”中提出的问题吗? 请尝试完成.



归纳梳理

最佳策略问题的分析解决步骤:

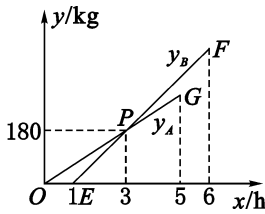
- (1)分析变量之间的关系,设好自变量,并表示出与之有关的其余变量;
- (2)结合实际问题的需要,求自变量的取值范围;
- (3)分析问题与所设变量的关系,建立(一次)函数解析式;
- (4)利用函数的性质或图象,结合自变量的取值范围,选择最佳策略解决问题.



深化拓展

基础巩固

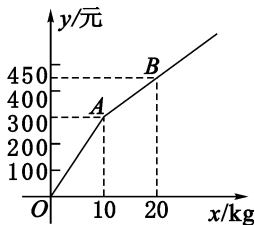
1. 某物流公司引进 A,B 两种机器人用来搬运某种货物,这两种机器人充满电后可以连续搬运 5 h,A 种机器人于某日 0 时开始搬运,过了 1 h,B 种机器人也开始搬运. 如图,线段 OG 表示 A 种机器人的搬运量 y_A (kg) 与时间 x (h) 的函数图象,线段 EF 表示 B 种机器人的搬运量 y_B (kg) 与时间 x (h) 的函数图象. 根据图象提供的信息,解答下列问题:



- (1)求 y_B 关于 x 的函数解析式;
- (2)如果 A,B 两种机器人各连续搬运 5 h,那么 B 种机器人比 A 种机器人多搬运了多少千克货物?

能力提升

2. 甲、乙两家草莓采摘园的草莓品质相同,销售价格也相同. 五一期间,两家均推出了优惠方案,甲采摘园的优惠方案是:游客进园需购买 50 元的门票,采摘的草莓六折优惠;乙采摘园的优惠方案是:游客进园不需购买门票,采摘的草莓超过一定数量后,超过部分打折优惠. 优惠期间,设某游客的草莓采摘量为 x (kg),在甲采摘园所需总费用为 y_1 (元),在乙采摘园所需总费用为 y_2 (元),图中折线 OAB 表示 y_2 与 x 之间的函数关系.



- (1) 甲、乙两采摘园优惠前的草莓销售价格是每千克 _____ 元;
- (2) 求 y_1, y_2 与 x 之间的函数关系式;
- (3) 在图中画出 y_1 与 x 的函数图象,并写出选择甲采摘园所需总费用较少时,草莓采摘量 x 的范围.

拓展创新

3. 某游泳馆普通票价 20 元/张,暑期为了促销,新推出两种优惠卡:

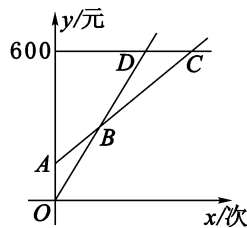
- ①金卡售价 600 元/张,每次凭卡不再收费;
- ②银卡售价 150 元/张,每次凭卡另收 10 元.

暑期普通票正常出售,两种优惠卡仅限暑期使用,不限次数. 设游泳 x 次时,所需总费用为 y 元.

(1) 分别写出选择银卡、普通票消费时, y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 在同一平面直角坐标系中,若三种消费方式对应的函数图象如图所示,请求出点 A, B, C 的坐标;

(3) 请根据函数图象,直接写出选择哪种消费方式更合算.



第二学时



问题导学

某饮料厂开发了甲、乙两种新型饮料,主要原料为 A,B,每瓶饮料中的 A,B 含量如下表所示:

饮料名称	A	B
甲	20 g	40 g
乙	30 g	20 g



现用 A,B 两种原料各 2 800 g 进行试生产,计划生产甲、乙两种饮料共 100 瓶. 已知甲种饮料每瓶的成本为 2.6 元,乙种饮料每瓶的成本为 2.8 元. 问如何安排生产,才能使成本总额最低? 这个问题涉及最佳方案的选择. 如何利用所学函数关系解决这类问题就是我们这学时要研究的内容.



自主学习



教材导读

请同学们阅读教材 p103、p104 的“问题 2”,思考并回答下列问题:

1. 租多少辆汽车要考虑什么? 问题中共有多少人乘车? 结合表中数据可知至少要租几辆车? 问题中有几名教师? “每辆汽车上至少要有 1 名教师”表明了什么?

2. 租车费用与什么有关? 若租甲种车 x 辆,则租乙种车几辆? 租车总费用 y 与 x 的函数解析式是什么?

3. 自变量 x 的取值如何确定?

4. 最少的租车费用由什么决定? 用到了一次函数的什么性质?

自主测评

某酒厂每天生产 A,B 两种品牌的白酒共 600 瓶,A,B 两种品牌的白酒每瓶的成本和利润如下表:

	A	B
成本/(元/瓶)	50	35
利润/(元/瓶)	20	15

设每天生产 A 种品牌的白酒 x 瓶,每天获利 y 元,则 y 与 x 的函数解析式是 _____;如果该酒厂每天至少投入成本 26 400 元,那么每天至少获利 _____ 元.

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面

若一个问题中有多个变量,如何建立函数模型?



合作学习



难点探究

一个汽车零件制造车间有工人 20 名,已知每名工人每天可制造甲种零件 6 个或乙种零件 5 个,且每制造一个甲种零件可获利润 150 元,每制造一个乙种零件可获利润 260 元. 车间每天安排 x 名工人制造甲种零件,其余工人制造乙种零件.

(1) 请写出此车间每天所获利润 y (元) 与 x (名) 之间的函数解析式;

(2) 若要使车间每天所获利润不低于 24 000 元,你认为至少要派多少名工人去制造乙种零件才合适?

讨论:(1) 每天所获利润如何计算?

(2) 题中哪些信息决定自变量 x 的取值范围?

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

某商场计划购进 A, B 两种新型节能台灯共 100 盏,这两种台灯的进价、售价如下表所示:

	进价(元/盏)	售价(元/盏)
A 型	30	45
B 型	50	70

(1)若商场预计进货款为 3 500 元,则应购进这两种台灯各多少盏?

(2)若商场规定 B 型台灯的进货数量不超过 A 型台灯进货数量的 3 倍,应怎样进货才能使商场在销售完这批台灯时获利最多? 此时的利润为多少元?



归纳梳理

解决最优化问题,基本方法是利用函数的性质求出函数的最大值或最小值,从而设计出最佳方案. 解决这类问题应注意由实际意义挖掘出自变量

的取值范围.



深化拓展

基础巩固

1. 某住宅小区计划购买并种植甲、乙两种树苗共 300 株. 已知甲种树苗每株 60 元,乙种树苗每株 90 元. 若购买树苗共用了 21 000 元,则甲种树苗买了 ____ 株,乙种树苗买了 ____ 株. 若甲种树苗买了 x 株,购买树苗所需费用为 y 元,则 y 与 x 之间的函数解析式为 _____. 据统计,甲、乙两种树苗每株树苗对空气的净化指数分别为 0.2 和 0.6,要保证该小区的空气净化指数之和不低于 90 的最低费用为 _____ 元.

能力提升

2. 某校准备组织师生共 60 人,从甲地乘动车前往乙地参加夏令营活动,动车票价格如下表所示:

运行区间		成人票价 (元/张)		学生票价 (元/张)
出发站	终点站	一等座	二等座	二等座
甲地	乙地	30	22	16.5

(教师按成人票价购票,学生按学生票价购票)
若师生均购买二等座票,则共需 1 045 元.
(1)参加活动的教师有 _____ 人,学生有 _____ 人.
(2)由于部分教师需提早前往做准备工作,这部分教师均购买一等座票,而后续前往的教师和学生均购买二等座票. 设提早前往的教师有 x 人,购买一、二等座票全部费用为 y 元.
①求 y 关于 x 的函数关系式;
②若购买一、二等座票全部费用不多于 1 069 元,则提早前往的教师最多只能有多少人?

◎ 拓展创新

3. 某车行去年 A 型车的销售总额为 6 万元, 今年每辆 A 型车的售价比去年减少 400 元. 若卖出的数量相同, 销售总额将比去年减少 20%.

(1) 求今年每辆 A 型车的售价.

(2) 该车行计划新进一批 A 型车和 B 型车共 45 辆, 已知 A、B 型车的进货价格分别是 1 100 元、1 400 元, 今年 B 型车的销售价格是 2 000 元, 要求 B 型车的进货数量不超过 A 型车进货数量的 2 倍, 应如何进货才能使这批车获得最大利润, 最大利润是多少?

第十九章小结

第一学时



自主学习

教材导读

请同学们阅读教材 p106 的有关内容,思考并回答下列问题:

1. (1) 举例说明两个变量 x 和 y 满足什么条件时, y 是 x 的函数;

(2) 下列各式中: ① $y = x^2$, ② $y = 2x + 1$, ③ $y^2 = 2x$ ($x \geq 0$), ④ $y = \pm \sqrt{x}$ ($x \geq 0$), 具有函数关系(自变量为 x) 的是 _____ (填序号).

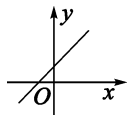
2. 你能说出表示函数关系的三种方法吗? 它们各有什么优点?

3. 写出一次函数 $y = kx + b$ (k, b 为常数, $k \neq 0$) 的性质:

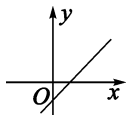
(1) 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而 _____;

(2) 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而 _____;

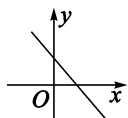
(3) 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象如图所示, 请你将空填写完整.



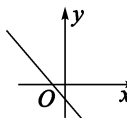
$$\textcircled{1} \begin{cases} k \text{ _____ } 0, \\ b \text{ _____ } 0; \end{cases}$$



$$\textcircled{2} \begin{cases} k \text{ _____ } 0, \\ b \text{ _____ } 0; \end{cases}$$



$$\textcircled{3} \begin{cases} k \text{ _____ } 0, \\ b \text{ _____ } 0; \end{cases}$$



$$\textcircled{4} \begin{cases} k \text{ _____ } 0, \\ b \text{ _____ } 0. \end{cases}$$

4. 写出一次函数 $y = 2x + 1$ 与正比例函数 $y = 2x$

的联系与区别.

5. 用待定系数法确定一次函数解析式的一般步骤是什么?

自主测评

1. 关于函数 $y = -\frac{1}{5}x$, 下列说法正确的是 ()

- A. 函数图象经过点 $(1, 5)$
- B. 函数图象经过第一、三象限
- C. y 随 x 的增大而减小
- D. 无论 x 取何值, 总有 $y < 0$

2. 若点 M 在直线 $y = x - 1$ 上, 则点 M 的坐标可以是 ()

- A. $(-1, 0)$
- B. $(0, 1)$
- C. $(1, 0)$
- D. $(1, -1)$

3. 在平面直角坐标系中, 将直线 $y = -3x + 2$ 向下平移 4 个单位长度后, 所得直线的解析式为 ()

- A. $y = -3x - 4$
- B. $y = -3x + 4$
- C. $y = -3x + 6$
- D. $y = -3x - 2$

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



合作学习

难点探究

已知一次函数 $y = (3+k)x - 2k^2 + 18$.

(1) 当 k 为何值时, 其图象经过原点?

- (2) 当 y 随 x 的增大而减小时, 求 k 的取值范围;
- (3) 当 k 为何值时, 其图象与直线 $y = -2x$ 平行?

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面

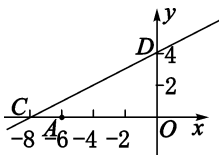


探究展示

问题共析 要积极发言, 及时总结哦!

展示交流

如图, 直线 $y = kx + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 C, D , 点 C 的坐标为 $(-8, 0)$, 点 A 的坐标为 $(-6, 0)$.



- 求 k 的值和该直线的函数解析式;
- 若 $P(x, y)$ 是第二象限内直线上的一个动点, 在点 P 运动的过程中, 试写出 $\triangle OPA$ 的面积 S 与 x 之间的函数解析式, 并写出自变量 x 的取值范围.



归纳梳理

本章用到的主要数学思想方法:

- 待定系数法.
- 数形结合: “数”和“形”是数学中两类基本的研究对象, 它们之间存在着深刻的内在联系, 数形结合是最基本、最重要的数学思想方法.
- 函数思想: 世界是运动变化的, 每一个变化过程中都存在一些变化规律. 而函数就是通过数或形定量地描述这种变化规律的重要数学模型.
- 分类讨论思想: 在研究函数图象的位置、函数的增减性时, 有时要分情况讨论. 如: 在购买物品、选择旅行社、运输物品时, 要根据购物数量、旅游人数等分情况讨论; 在研究函数图象时, 分段讨论函数等都体现了分类讨论的思想.
- 转化思想: 二元一次方程组的近似解是通过两个一次函数图象的交点直观得出的. 若求两函数图象的交点坐标, 不通过画图象, 可以把两个解析式联立成方程组, 求得方程组的解, 即为图象的交点坐标, 这便是方程与函数间的转化思想.



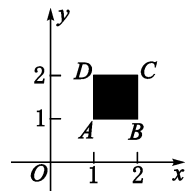
深化拓展

基础巩固

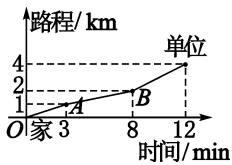
- 已知一个正比例函数的图象经过点 $(-2, 4)$, 则这个正比例函数的解析式是_____.
- 已知一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象过点 $(0, 3)$ 与 $(2, 1)$, 则 y 随 x 的增大而_____.
- 一次函数的图象过点 $(-1, 0)$, 且函数值随着自变量的增大而减小, 写出一个符合这个条件的一次函数的解析式:_____.

能力提升

- 如图, 有一种动画程序, 屏幕上正方形 $ABCD$ 是黑色区域 (含正方形边界), 其中 $A(1, 1), B(2, 1), C(2, 2), D(1, 2)$, 用信号枪沿直线 $y = -2x + b$ 发射信号, 当信号遇到黑色区域时, 区域便由黑变白, 则能够使黑色区域变白的 b 的取值范围为_____.



5. 小高从家骑车去单位上班, 先走平路到达点 A, 再走上坡路到达点 B, 最后走下坡路到达工作单位, 所用的时间与路程

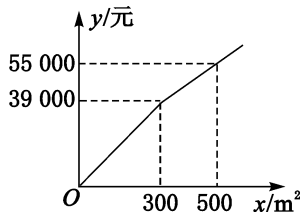


的关系如图所示. 下班后, 如果他沿原路返回, 且走平路、上坡路、下坡路的速度分别和去上班时保持一致, 那么他从单位到家需要的时间是 ()

- A. 12 min
- B. 15 min
- C. 25 min
- D. 27 min

拓展创新

6. 为了美化环境, 我市准备在一个广场上种植甲、乙两种花卉. 经市场调查, 甲种花卉的种植费用 y (元) 与种植面积 x (m^2) 之间的函数关系如图所示, 乙种花卉的种植费用为 100 元/ m^2 .



(1) 直接写出当 $0 \leq x \leq 300$ 和 $x > 300$ 时, y 与 x 的函数关系式;

(2) 广场上甲、乙两种花卉的种植面积共 $1\,200\text{ m}^2$, 如果甲种花卉的种植面积不少于 200 m^2 , 且不超过乙种花卉种植面积的 2 倍, 那么应该怎样分配甲、乙两种花卉的种植面积才能使种植总费用最少? 最少总费用为多少元?



第二学时



自主学习



教材导读

上个学时我们对本章知识进行了整体构建,利用数形结合的思想理解并掌握了一次函数的定义、图象、性质及确定一次函数解析式的方法.本学时我们对函数与方程、不等式之间的联系以及利用函数解决实际问题进行总体归纳学习.

请同学们思考下面的问题:

1. 方程、不等式与函数之间有着密切的联系.请用函数方法解下列方程(组)或不等式.

(1)解方程: $-3x-1=2$;

(2)解不等式: $-3x-1<2$;

(3)解方程组: $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x-y=2. \end{cases}$

2. 如何利用函数解决实际问题?



自主测评

1. 一元一次方程 $3x-1=5$ 的解就是一次函数 _____ 的图象与 x 轴的交点的横坐标.

2. 已知函数 $y=kx+b$ 的图象如图所示,则关于 x 的不等式 $kx+b>0$ 的解集为 _____.

3. 已知一次函数 $y=4x-1$ 与 $y=2x+3$ 的图象的交点坐标为 $(2,7)$,则方程组 $\begin{cases} 4x-y=1, \\ y=2x+3 \end{cases}$ 的解是 _____.

收获与问题 请把自主学习环节中的收获与问题记录在下面



合作学习



难点探究

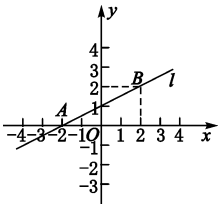
如图,直线 l 是一次函数 $y=kx+b$ 的图象,点 A, B 在直线 l 上.

根据图象回答下列问题:

(1)写出方程 $kx+b=0$ 的解;

(2)写出不等式 $kx+b>1$ 的解集;

(3)若直线 l 上的点 $P(a,c)$ 在线段 AB 上移动,则 a, c 应如何取值?



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

某学校计划组织全校 1 441 名师生到相关部门规划的林区植树,经过研究,决定租用当地租车公司一共 62 辆 A, B 两种型号客车作为交通工具.下表是租车公司提供给学校的有关两种型号客车的载客量和租金信息:

型号	载客量	租金单价
A	30 人/辆	380 元/辆
B	20 人/辆	280 元/辆

注:载客量指的是每辆客车最多可载该校师生的人数.

该学校租用 A 型客车 x 辆,租车总费用为 y 元.

(1)求 y 与 x 的函数解析式,并直接写出 x 的取值范围;

(2)若要使租车总费用不超过 21 940 元,一共有几种租车方案?哪种租车方案最省钱?



归纳梳理

1. 不等式、方程、函数之间的联系:它们都是刻画客观事物变化规律的模型.函数能刻画事物之间对应变化的过程,方程能刻画某个变化过程的一瞬间,不等式能刻画变化过程中同类量之间的大小.解决实际问题时,要合理利用三者之间的关系,有机结合,综合运用.

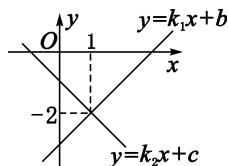
2. 用一次函数图象去解方程或不等式未必简单,但是从函数角度看问题,能发现一次函数、一元一次方程与一元一次不等式之间的联系,能直观地看到怎样用图形来表示方程的解与不等式的解集,这种用函数的观点认识问题的方法是一种进步.



深化拓展

基础巩固

1. 直线 $l_1: y = k_1x + b$ 与直线 $l_2: y = k_2x + c$ 在同一平面直角坐标系中的图象如图所示,则关于 x 的不等式 $k_1x + b < k_2x + c$ 的解集为 ()



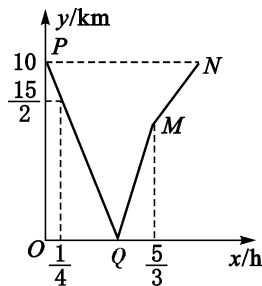
- A. $x > 1$ B. $x < 1$
C. $x > -2$ D. $x < -2$

能力提升

2. 已知一次函数 $y = -x + 3$, 当 $0 \leq x \leq 3$ 时, 函数 y 的最大值是 ()

- A. 0 B. 3
C. -3 D. 无法确定

3. 甲、乙两人分别从 A、B 两地同时出发, 匀速相向而行. 甲的速度大于乙的速度, 甲到达 B 地后, 乙继续前行. 设出发 x h 后, 两人相距 y km, 图中折线表示从两人出发至乙到达 A 地的过程中 y 与 x 之间的函数关系.

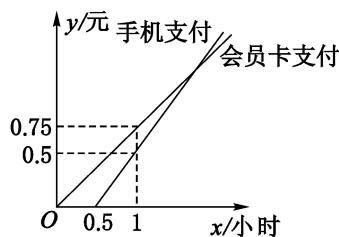


根据图中信息, 求:

- (1) 点 Q 的坐标, 并说明它的实际意义;
(2) 甲、乙两人的速度.

拓展创新

4. 为响应绿色出行号召, 越来越多的市民选择租用共享单车出行, 已知某共享单车公司为市民提供了手机支付和会员卡支付两种支付方式, 下图描述了两种方式应支付金额 y (元) 与骑行时间 x (小时) 之间的函数关系, 根据图象回答下列问题.



(1) 求手机支付金额 y (元) 与骑行时间 x (小时) 的函数关系式;

(2) 李老师经常骑行共享单车, 请根据不同的骑行时间帮他确定选择哪种支付方式比较合算.



第十九章 数学能力提升与评价

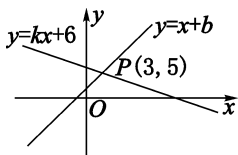
本章体现的数学能力主要有数形结合思想和模型思想.

一、数形结合思想

函数的表示方法之一是图象法,即通过坐标系中曲线上的点的坐标反映变量之间的对应关系.这种表示方法将数量关系直观化、形象化,从而可以数形结合地研究问题.一次函数反映的是数量关系和变化规律最基本的函数.在解决实际问题中,确立一次函数模型,借助图形的直观作用,引发联想,促进形象思维和逻辑思维的结合,最终变抽象为直观、化复杂为简单,从而快速地找出问题的答案和问题的实质.

[能力提升]

例 1 如图,直线 $y=x+b$ 与直线 $y=kx+6$ 交于点 $P(3,5)$,则关于 x 的不等式 $x+b>kx+6$ 的解集是 _____.



分析:从形的角度看,观察函数图象得到当 $x>3$ 时,函数 $y=x+b$ 的图象都在 $y=kx+6$ 图象的上方,所以关于 x 的不等式 $x+b>kx+6$ 的解集为 $x>3$.从数的角度分析,需根据直线 $y=x+b$ 与直线 $y=kx+6$ 交于点 $P(3,5)$,将 $x=3, y=5$ 分别代入 $y=x+b$ 和 $y=kx+6$ 中求出 k, b 的值,再将 k, b 的值代入不等式 $x+b>kx+6$,解不等式即可求出.

解:方法一:由图象可知,当 $x>3$ 时, $x+b>kx+6$,即不等式 $x+b>kx+6$ 的解集为 $x>3$.

方法二: $\because$ 直线 $y=x+b$ 与直线 $y=kx+6$ 交于点 $P(3,5)$,

$$\therefore \begin{cases} 5=3+b, \\ 5=3k+6. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=-\frac{1}{3}, \\ b=2. \end{cases}$$

$$\text{把} \begin{cases} k=-\frac{1}{3}, \\ b=2 \end{cases} \text{代入 } x+b>kx+6, \text{得 } x+2>-\frac{1}{3}x+6, \text{解}$$

得 $x>3$.

故答案为 $x>3$.

比较两种解法,从形的角度解答,更加直观

简单.

[自我评价]

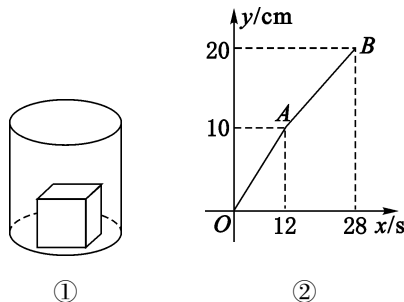
1. 已知二元一次方程组 $\begin{cases} x-y=-5, \\ x+2y=-2 \end{cases}$ 的解为

$\begin{cases} x=-4, \\ y=1, \end{cases}$ 则在同一平面直角坐标系中,直线 $l_1:y=x+$

5 与直线 $l_2:y=-\frac{1}{2}x-1$ 的交点坐标为 _____.

2. 函数 $y=2x$ 和 $y=-3x+1$ 的图象的交点在第 _____ 象限.

3. 如图①,一个正方体铁块放置在圆柱形水槽内,现以一定的速度往水槽中注水,28 s 时注满水槽.水槽内水面的高度 $y(\text{cm})$ 与注水时间 $x(\text{s})$ 之间的函数图象如图②所示.



(1) 正方形的棱长为 _____ cm;

(2) 求线段 AB 对应的函数解析式,并写出自变量 x 的取值范围;

(3) 如果将正方体铁块取出,又经过 $t(\text{s})$ 恰好将此水槽注满,直接写出 t 的值.

二、模型思想

模型思想是感知、体会和深入理解数学与外部世界联系的基本途径. 利用函数模型解决问题的基本过程是:首先,设变量(自变量和因变量),建立因变量和自变量的函数关系,把实际问题转化为函数问题;其次,研究函数的性质,把握变量之间的对应关系和变化规律,解决函数问题;第三,解释函数问题解的实际意义,得到实际问题的解.

[能力提升]

例 2 学校准备购进一批节能灯,已知 1 只 A 型节能灯和 3 只 B 型节能灯共需 26 元;3 只 A 型节能灯和 2 只 B 型节能灯共需 29 元.

(1)求一只 A 型节能灯和一只 B 型节能灯的售价各是多少元;

(2)学校准备购进这两种型号的节能灯共 50 只,并且 A 型节能灯的数量不多于 B 型节能灯数量的 3 倍,请设计出最省钱的购买方案.

分析:(1)根据题中给出的两个等量关系,列出二元一次方程组,解方程组即可;(2)由题意可知,总费用随 A 型节能灯数量的变化而变化,从而设出自变量和函数,列出函数关系式,根据一次函数的性质确定最省钱方案.

解:(1)设一只 A 型节能灯的售价是 x 元,一只 B 型节能灯的售价是 y 元,

根据题意,得
$$\begin{cases} x+3y=26, \\ 3x+2y=29. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=5, \\ y=7. \end{cases}$$

答:一只 A 型节能灯的售价是 5 元,一只 B 型节能灯的售价是 7 元.

(2)设购进 A 型节能灯 m 只,总费用为 W 元,根据题意,得

$$W=5m+7(50-m)=-2m+350,$$

$\because -2<0, \therefore W$ 随 m 的增大而减小.

又 $\because m \leq 3(50-m)$, 解得 $m \leq 37.5$.

而 m 为正整数,

$\therefore$ 当 $m=37$ 时, W 最小, $W_{\text{最小}}=-2 \times 37+350=276$,

此时 $50-37=13$.

答:当购买 A 型节能灯 37 只, B 型节能灯 13 只时最省钱.

[自我评价]

4. 在精准扶贫中,某村的李师傅在县政府的扶持下,去年下半年,他对家里的 3 个温室大棚进行整修改造,然后,1 个大棚种植香瓜,另外 2 个大棚种植甜瓜,今年上半年喜获丰收,现在他家的香瓜和甜瓜已全部售完,他高兴地说:“我的日子终于好了.”

最近,李师傅在扶贫工作者的指导下,计划在农业合作社承包 5 个大棚,以后就用 8 个大棚继续种植香瓜和甜瓜,他根据种植经验及今年上半年的市场情况,打算下半年种植时,两个品种同时种,一个大棚只种一个品种的瓜,并预测明年两种瓜的产量、销售价格及成本如下:

品种 项目	产量 (斤/棚)	销售价 (元/斤)	成本 (元/棚)
香瓜	2 000	12	8 000
甜瓜	4 500	3	5 000

现假设李师傅今年下半年香瓜种植的大棚数为 x 个,明年上半年 8 个大棚中所产的瓜全部售完后,获得的利润为 y 元.

根据以上提供的信息,请你解答下列问题:

(1)求出 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)求出李师傅种植的 8 个大棚中,香瓜至少种植几个大棚,才能使获得的利润不低于 10 万元.



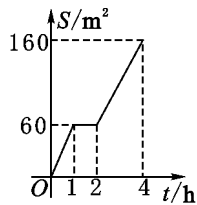
第十九章测评

(测评时间:60 分钟 满分:100 分)

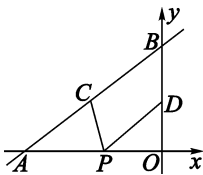
一、选择题(本大题共 10 个小题,每小题 2 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的)

1. 下列函数:① $y = \pi x$, ② $y = 2x - 1$, ③ $y = \frac{1}{x}$, ④ $y = x^2 - 1$ 中,一次函数有 ()
- A. 4 个 B. 3 个
C. 2 个 D. 1 个
2. 一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象与两坐标轴的交点是 ()
- A. $(3, 1), (1, \frac{3}{2})$ B. $(1, 3), (\frac{3}{2}, 1)$
C. $(3, 0), (0, \frac{3}{2})$ D. $(0, 3), (\frac{3}{2}, 0)$
3. 一次函数 $y = -2x - 3$ 的图象不经过的象限是 ()
- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限
4. 在函数 $y = \sqrt{x+2}$ 中,自变量 x 的取值范围是 ()
- A. $x > -2$ B. $x \geq -2$
C. $x \neq -2$ D. $x \leq -2$
5. 若正比例函数的图象经过点 $(-1, 2)$,则这个图象必经过点 ()
- A. $(1, 2)$ B. $(-1, -2)$
C. $(2, -1)$ D. $(1, -2)$
6. 直线 $y = x + 1$ 与 $y = -2x + a$ 的交点在第一象限,则 a 的值可以是 ()
- A. -1 B. 0
C. 1 D. 2
7. 若 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 是正比例函数 $y = -x$ 图象上的两点,则下列判断正确的是 ()
- A. $y_1 > y_2$
B. $y_1 < y_2$
C. 当 $x_1 < x_2$ 时, $y_1 > y_2$
D. 当 $x_1 < x_2$ 时, $y_1 < y_2$

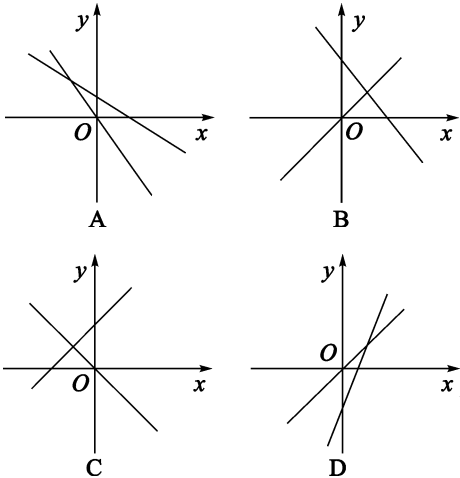
8. 园林队在某公园进行绿化,中间休息了一段时间.已知绿化面积 S (单位: m^2) 与工作时间 t (单位:h) 的函数关系的图象如图所示,则休息后园林队每小时绿化面积为 ()



- A. 40 m^2 B. 50 m^2
C. 80 m^2 D. 100 m^2
9. 如图,直线 $y = \frac{2}{3}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 和点 B , C, D 分别为线段 AB, OB 的中点, P 为 OA 上一动点,则 $PC + PD$ 的值最小时点 P 的坐标为 ()



- A. $(-3, 0)$ B. $(-6, 0)$
C. $(-\frac{3}{2}, 0)$ D. $(-\frac{5}{2}, 0)$
10. 表示一次函数 $y = mx + n$ 与正比例函数 $y = mnx$ (m, n 是常数,且 $mn \neq 0$) 的图象的是 ()



二、填空题 (本大题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 请把答案填在题中的横线上)

11. 若一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $P(1,0)$ 和点 $Q(0,1)$, 则 $k=$ _____, $b=$ _____.

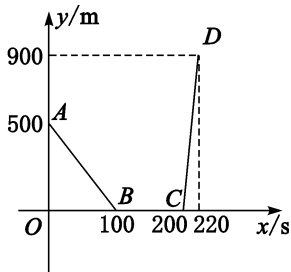
12. 将直线 $y=2x+1$ 平移后经过点 $(2,1)$, 则平移后的直线解析式为 _____.

13. 已知一次函数 $y=-x+a$ 与 $y=x+b$ 的图象交于点 $(m,8)$, 则 $a+b=$ _____.

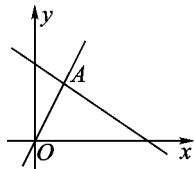
14. 从 A 地向 B 地打长途电话, 按时收费, 3 min 内收费 2.4 元, 以后每超过 1 min 加收 1 元. 若通话 t min ($t \geq 3, t$ 为整数), 则需付电话费 y (元) 与 t (min) 之间的函数解析式是 _____.

15. 若函数 $y=2x+1$ 中函数值的取值范围是 $1 \leq y \leq 3$, 则自变量 x 的取值范围是 _____.

16. 设甲、乙两车在同一条直线公路上匀速行驶, 开始甲车在乙车的前面, 当乙车追上甲车后, 两车停下来, 把乙车的货物转给甲车, 然后甲车继续前行, 乙车返回原地. 设 x s 后两车间的距离为 y m, y 关于 x 的函数关系如图所示, 则甲车的速度是 _____ m/s.



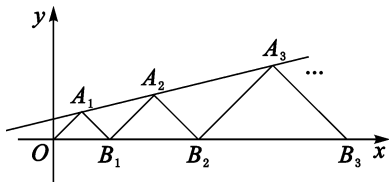
(第 16 题)



(第 17 题)

17. 如图, 函数 $y=2x$ 和 $y=ax+4$ 的图象相交于点 $A(m,3)$, 则不等式 $2x \geq ax+4$ 的解集为 _____.

18. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 和 $B_1, B_2, B_3, \dots$ 分别在直线 $y=\frac{1}{5}x+b$ 和 x 轴上. 勐 OA_1B_1 , 勐 $B_1A_2B_2$, 勐 $B_2A_3B_3, \dots$ 都是等腰直角三角形. 如果点 $A_1(1,1)$, 那么点 A_{2018} 的纵坐标是 _____.



三、解答题 (本大题共 6 个小题, 共 56 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (本小题满分 6 分)

已知一次函数 $y=kx+2b+4$ 的图象经过点 $(-1,-3)$, k 满足等式 $|k-3|-4=0$, 且 y 随 x 的增大而减小, 求这个一次函数的解析式.

20. (本小题满分 10 分)

已知 $y+2$ 与 x 成正比例, 且 $x=-2$ 时, $y=0$.

- (1) 求 y 与 x 之间的函数解析式;
- (2) 画出函数的图象;
- (3) 观察图象, 当 x 取何值时, $y \geq 0$?
- (4) 若点 $(m,6)$ 在该函数的图象上, 求 m 的值.

21. (本小题满分 10 分)

经过一年多的精准帮扶, 小明家的网络商店 (简称网店) 将红枣、小米等优质土特产迅速销往全国各地. 小明家的网店中红枣和小米这两种商品的相关信息如下表:

商品	红枣	小米
规格	1 kg/袋	2 kg/袋
成本 (元/袋)	40	38
售价 (元/袋)	60	54

根据上表提供的信息, 解答下列问题:

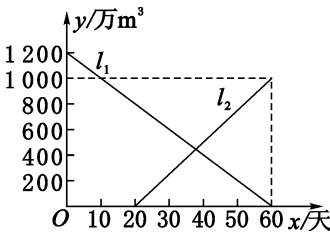
- (1) 已知今年前五个月, 小明家网店销售上表中规格的红枣和小米共 3 000 kg, 获得利润 4.2 万元, 求这前五个月小明家网店销售这种规格的红枣多少袋;
- (2) 根据之前的销售情况, 估计今年 6 月到 10

月这后五个月,小明家网店还能销售上表中规格的红枣和小米共 2 000 kg,其中,这种规格的红枣的销售量不低于 600 kg. 假设之后这五个月,销售这种规格的红枣为 x (kg),销售这种规格的红枣和小米获得的总利润为 y (元),求出 y 与 x 之间的函数关系式,并求这后五个月,小明家网店销售这种规格的红枣和小米获得的总利润至少为多少元.

22. (本小题满分 10 分)

由于持续高温和连日无雨,某水库的蓄水量随时间的增加而减少,已知原有蓄水量 y_1 (万 m^3) 与干旱持续时间 x (天) 的关系如图中线段 l_1 所示,针对这种干旱情况,从第 20 天开始向水库注水,注水量 y_2 (万 m^3) 与时间 x (天) 的关系如图中线段 l_2 所示 (不考虑其他因素).

- (1) 求原有蓄水量 y_1 (万 m^3) 与时间 x (天) 的函数关系式,并求当 $x=20$ 时的水库总蓄水量;
- (2) 求当 $0 \leq x \leq 60$ 时,水库的总蓄水量 y (万 m^3) 与时间 x (天) 的函数关系式 (说明 x 的取值范围),若总蓄水量不多于 900 万 m^3 为严重干旱,直接写出发生严重干旱时 x 的取值范围.



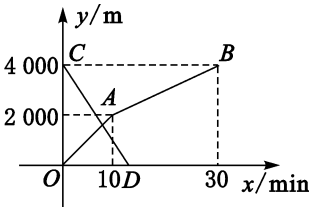
23. (本小题满分 10 分)

某种铂金饰品在甲、乙两个商店销售. 甲店标价 477 元/g,按标价出售,不优惠. 乙店标价 530 元/g,但若买的铂金饰品质量超过 3 g,则超出部分可打八折出售.

- (1) 分别写出到甲、乙商店购买该种铂金饰品所需费用 y (元) 和质量 x (g) 之间的函数解析式;
- (2) 李阿姨要买一条质量不少于 4 g 且不超过 10 g 的此种铂金饰品,到哪个商店购买最合算?

24. (本小题满分 10 分)

小玲和弟弟小东分别从家和图书馆同时出发,沿同一条路相向而行,小玲开始跑步,中途改为步行,到达图书馆恰好用时 30 min. 小东骑自行车以 300 m/min 的速度直接回家,两人离家的路程 y (m) 与各自离开出发地的时间 x (min) 之间的函数图象如图所示.



- (1) 家与图书馆之间的路程为 _____ m,小玲步行的速度为 _____ m/min;
- (2) 求小东离家的路程 y 关于 x 的函数解析式,并写出自变量 x 的取值范围;
- (3) 求两人相遇的时间.