

第 18 章 平行四边形

学习导航

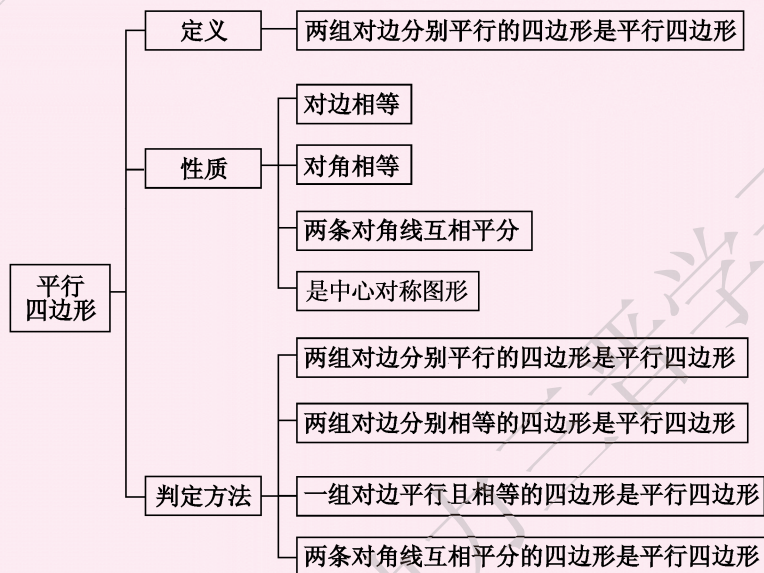


本章纵览

亲爱的同学们,平行四边形是我们生活中常见的一种图形,它具有十分和谐的对称美.它具有哪些基本性质?如何识别平行四边形呢?带着这些问题,我们一起走进本章,动手操作,动脑思考,深入探究,推理验证,通过学习平行四边形的知识,丰富我们对图形世界的认识,获得更多的体验,发展我们的思维,增强我们解决问题的能力.



知识要点



学习要求

1. 理解平行四边形的概念,了解四边形的不稳定性.
2. 探索并证明平行四边形的性质定理:平行四边形的对边相等、对角相等、对角线互相平分.
3. 在对平行四边形性质认识的基础上,探索并掌握平行四边形的判定方法,学会一些简单的应用.
4. 探索并证明平行四边形的判定定理:一组对边平行且相等的四边形是平行四边形;两组对边分别相等的四边形是平行四边形;对角线互相平分的四边形是平行四边形.
5. 了解两条平行线之间的距离的意义,能度量两条平行线之间的距离.
6. 通过逆命题猜想、操作验证、逻辑推理证明的过程,体验数学研究和发现的过程,学会数学思考的方法.



学法指导

1. 教材是通过探究发现的方法来介绍平行四边形判定知识的,知道了图形的性质定理后,从探究逆命题的正确性出发,先在操作中直观感知,再逻辑证明得出图形的判定定理,这个过程实际上就是人类认识世界,发现知识的漫长过程的浓缩,要重视这个过程,积极参与这个过程,忽视这个过程,仅限于记住几个结论,不是真正意义上的学习.

2. 由于平行四边形的知识十分丰富,有极大的思维空间,解题方法往往是多样的,因此,在解题过程中,要注意一题多解,根据问题的需要,从边、角或对角线等不同的角度出发,思考不同的解决方法,增强解决问题的能力.

3. 要注意发现不同问题之间的内在联系,养成多问为什么的好习惯,达到举一反三的效果,切实减轻自己的学习负担.

4. 平行四边形知识体系结构完整,逻辑关系清晰,要借助于对平行四边形知识的学习,锻炼自己归纳知识的能力,使所学知识框架化、结构化,以便于理解、记忆和应用.在自己独立思考的基础上,将自己对知识梳理的成果与同学们进行交流,取长补短,力臻完善.



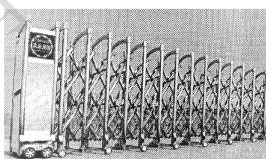
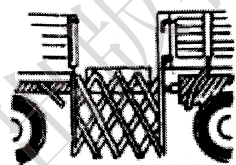
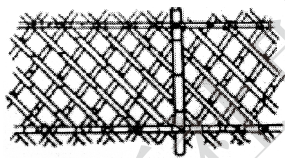
§ 18.1 平行四边形的性质

第一学时



问题导学

我们一起来观察下图中的竹篱笆格子、汽车的防护链和电动伸缩门,想一想它们有什么共同特征?



平行四边形是日常生活中我们常见的图形,为什么它的应用如此广泛呢?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₇₂ 中的“回忆”部分.

(1) 什么是平行四边形? 用什么符号表示平行四边形? 试举出一些生活中平行四边形的例子.

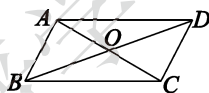
(2) 根据平行四边形的定义,你知道平行四边形的对边具有什么性质吗? 由此可知平行四边形的相邻两个内角的关系是什么?

2. 阅读教材 P_{73~74} 中的“探索”部分.

请你动手操作,你能发现平行四边形的对边有怎样的关系吗? 你是怎样发现的? 平行四边形的对角有怎样的关系呢? 你是怎样发现的?

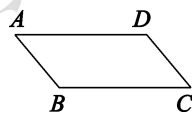
自主测评

1. 如图,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,连结 AC, BD , 它们的交点记为 O , 边 AB 可以看成是由 _____ 平移得来的, $\triangle ABC$ 可以看成是由 _____ 绕点 O 旋转 _____ 得来的.

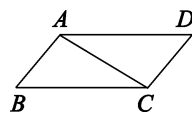


2. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $\angle A + \angle C = 100^\circ$, 则 $\angle B$ 等于 ()

- (A) 50° (B) 100°
(C) 80° (D) 130°



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3. 如图, $\square ABCD$ 的周长为 28 cm , $\triangle ABC$ 的周长是 22 cm , 则 AC 的长是 _____ cm .

收获与问题 在自主学习中,你发现了什么呢?

交流一下,看谁发现的平行四边形的性质多.



合作学习

难点探究

在教材 P₇₃ 中用演绎推理证明“平行四边形的对边相等”和“平行四边形的对角相等”的思路是什么?想一想:“连结 BD ”的作用是什么?体现了怎样的数学思想?

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

你注意到了吗?不少四边形的问题都要转化为三角形的问题加以解决.



探究展示

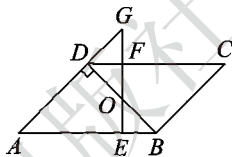
问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

如图,在 $\square ABCD$ 中, $BD \perp AD$, $\angle A = 45^\circ$, E, F 分别是 AB, CD 上的点,且 $BE = DF$,连结 EF 交 BD 于点 O .

(1) 求证: $BO = DO$;

(2) 若 $EF \perp AB$, 延长 EF 交 AD 的延长线于点 G , 当 $FG = 1$ 时, 求 AD 的长.



归纳梳理

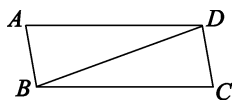
1. 平行四边形是一个 _____ 对称图形, 其对称中心是 _____.
2. 平行四边形的对边 _____ 且 _____.
3. 平行四边形的对角 _____, 邻角 _____.
4. 我们可以通过构造辅助线, 将四边形问题转化为 _____ 问题解决.



深化拓展

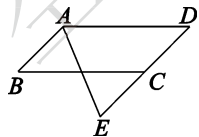
基础反思

1. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $BC = BD$, $\angle C = 74^\circ$, 则 $\angle ADB$ 的度数是 ()

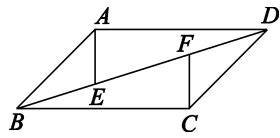


- (A) 16° (B) 22°
(C) 32° (D) 68°

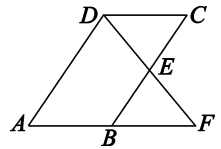
2. 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, AE 平分 $\angle BAD$, 交 DC 的延长线于点 E . 求证: $DA = DE$.



3. 如图, E, F 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 BD 上的点, $BF = DE$. 求证: $AE = CF$.

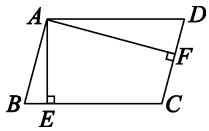


6. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 是 BC 边的中点, 连结 DE 并延长, 交 AB 的延长线于点 F . 求证: $AB = BF$.



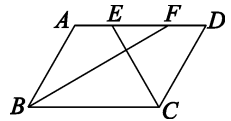
◎ 能力提升

4. 如图, 从 $\square ABCD$ 的顶点 A 引两边的垂线 AE, AF , 如果 AE, AF 的夹角为 75° , 求 $\square ABCD$ 各内角的度数.



◎ 拓展创新

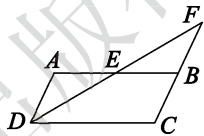
7. 如图, $\square ABCD$ 的周长为 48 cm , $AB : BC = 5 : 7$, $\angle ABC$ 与 $\angle BCD$ 的平分线分别交 AD 于点 F, E . 求 EF 的长.



5. (2018 · 青海) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为 AB 边上的中点, 连结 DE 并延长, 交 CB 的延长线于点 F .

(1) 求证: $AD = BF$;

(2) 若平行四边形 $ABCD$ 的面积为 32 , 试求四边形 $EBCD$ 的面积.



第二学时



问题导学

如图,两段平直的铁轨可以看成是两条平行线,根据你的经验判断,两段铁轨间的距离相等吗?

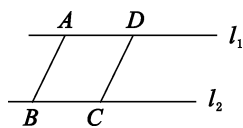


自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₇₅ 中的“试一试”部分.

(1) 两条平行线之间的任意两条平行线段有怎样的数量关系? 为什么? 结合下图进行说明.



(2) 什么叫两条平行线之间的距离?

(3) 按教材要求操作,你有什么发现? 你能得到什么样的结论? 还可以如何验证它?

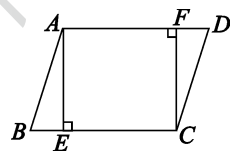
2. 阅读教材 P_{75~76} 中的“例 3”“例 4”部分,分别说出例 3、例 4 解题的主要依据.

自主测评

1. (2018 · 宜宾) 在 $\square ABCD$ 中,若 $\angle BAD$ 与 $\angle CDA$ 的平分线交于点 E ,则 $\triangle AED$ 的形状是

- (A) 锐角三角形 (B) 直角三角形
(C) 钝角三角形 (D) 不能确定

2. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $AE \perp BC$ 于点 E , $CF \perp AD$ 于点 F . 若 $AE = 12 \text{ cm}$,则 $CF =$ _____ cm .



3. 在 $\square ABCD$ 中,已知 $\angle A = 42^\circ$,求 $\angle B$, $\angle C$ 和 $\angle D$ 的度数.

收获与问题 在自主学习中,你发现了什么呢?

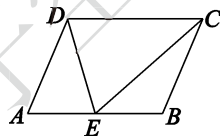
要注意平行线之间的距离处处相等.



合作学习

难点探究

1. 如图,在 $\square ABCD$ 中, E 为边 AB 的中点,那么 $\triangle AED$ 的面积和 $\triangle EBC$ 的面积是相等的,你能说出理由吗?



2. 在 $\square ABCD$ 中,如果 $\angle A = 45^\circ$, $CD = 2 \text{ cm}$,那么边 AD 与 BC 之间的距离为 _____ cm .

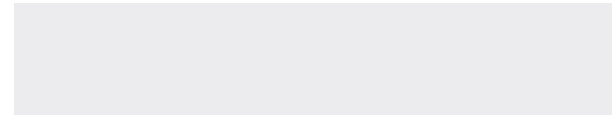
组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

总结一下:两个三角形的底边(或高)相等时,面积之间有什么关系呢?



探究展示

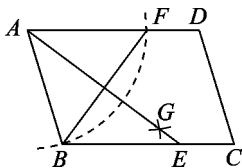
问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

1. 在 $\square ABCD$ 中, $\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E , 且点 E 将边 AD 分为长 3, 4 的两部分, 你能求出 $\square ABCD$ 的周长吗? 请说明理由.

2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 用直尺和圆规作 $\angle BAD$ 的平分线 AG , 交 BC 于点 E . 若 $BF=6$, $AB=5$, 则 AE 的长为 ()



- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10



归纳梳理

1. 什么叫两条平行线之间的距离?
2. 平行线之间的距离_____.
3. 等底等高的三角形面积_____.

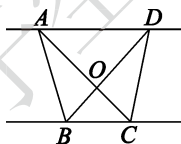


深化拓展

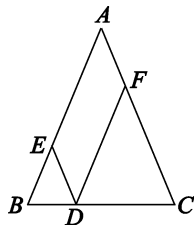
基础反思

1. 若 $\square ABCD$ 的面积为 20, $BC=5$, 则边 AD 与 BC 之间的距离为_____.

2. 如图, $AD \parallel BC$, AC, BD 相交于点 O , 则面积相等的三角形有_____对.

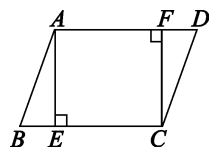


3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=16$, 点 D, E, F 分别在 BC, AB, AC 上, 且 $DF \parallel AB, DE \parallel AC$, 求四边形 $AEDF$ 的周长.

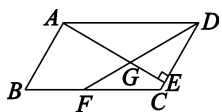


能力提升

4. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 已知 $CF \perp AD$ 于点 F , $AE \perp BC$ 于点 E , 若 $AF=6, BE=2$, 求 AD 的长.



5. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AE \perp CD$ 于点 E , DF 平分 $\angle ADC$, 与边 BC 相交于点 F . 如果 $\angle C = 2\angle B$, 求 $\angle ADC$ 和 $\angle EGF$ 的度数.

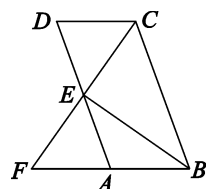


◎ 拓展创新

6. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 为边 AD 上的中点, 延长 CE 交 BA 的延长线于点 F .

(1) 求证: $AB = AF$;

(2) 若 $BC = 2AB$, $\angle FBC = 70^\circ$, 求 $\angle EBC$ 的度数.

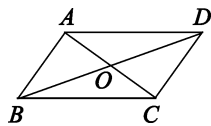


第三学时



问题导学

如图,在 $\square ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O ,线段 OA 与 OC , OB 与 OD 有怎样的数量关系?你是如何得到的?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₇₇ 中的“观察”部分.

(1) 在教材 P₇₃ 中图 18.1.3 的探索过程中,你能探究出 OA 与 OC , OB 与 OD 有怎样的数量关系吗?你是如何发现的?

(2) 由(1)可以得出平行四边形的又一条性质:平行四边形的对角线_____.

(3) 你是如何理解“平行四边形的对角线互相平分”中的“互相”的?

2. 认真阅读教材 P₇₇ 中用演绎推理对探索结论进行证明的部分.

(1) 还记得吗?证明线段相等或角相等的一个方法是:找出它们所在的三角形,并证明它们_____.

(2) 教材 P₇₇ 中的分析认为只需证明 $\triangle AOB \cong \triangle COD$,那么这两个三角形全等的依据可以是_____.

(3) 按教材 P₇₇ 第三个云图里的要求,写出证明平行四边形性质定理 3 的完整过程.

证明:

3. 阅读教材 P₇₇ 中的“例 5”与 P₇₈ 中的“例 6”部分.

例 5 的主要解题依据是_____;

例 6 的主要解题依据是_____.

自主测评

1. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O ,已知 $AD=8$, $BD=12$, $AC=6$,则 $\triangle OBC$ 的周长为

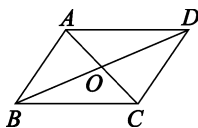
()

(A) 13

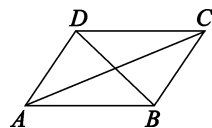
(B) 17

(C) 20

(D) 26



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $AC=8$, $BD=6$, $AD=a$,则 a 的取值范围是_____.

3. 已知 $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , $\triangle AOB$ 的面积为 2 cm^2 ,求 $\square ABCD$ 的面积.

收获与问题

在自主学习中,你发现了什么呢?

平行四边形被它的两条对角线分成四个三角形,你能指出它们的面积、周长以及形状之间有什么关系吗?请与同学们交流一下自己的发现吧.



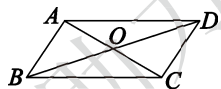
合作学习

难点探究

如图,在 $\square ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O .

(1)若 $AC=12\text{ cm}$, $BD=20\text{ cm}$, $AD=14\text{ cm}$,求 $\triangle BOC$ 的周长;

(2)若 $\square ABCD$ 的面积为 110 cm^2 ,求 $\triangle ABC$ 的面积.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

你能够灵活运用平行四边形的性质解决问题吗?



探究展示

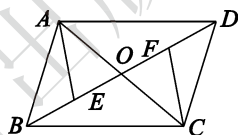
问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

如图,在 $\square ABCD$ 中,对角线 AC, BD 相交于点 O , E, F 分别是 OB, OD 的中点.

(1)求证: $AE=CF$;

(2)若 $\triangle AOE$ 的面积为6,求 $\square ABCD$ 的面积.



归纳梳理

1. 平行四边形的性质:

边: _____;

角: _____;

对角线: _____;

对称性: _____.

2. 证明两条线段或两个角相等的思路是 _____.



深化拓展

基础反思

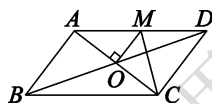
1. (2018 · 衡阳) 如图,

$\square ABCD$ 的对角线相交于点 O ,

且 $AD \neq CD$,过点 O 作 $OM \perp$

AC ,交 AD 于点 M .如果 \triangle

CDM 的周长为8,那么 $\square ABCD$ 的周长是 _____.



2. 若平行四边形的一边长为5,则它的两条对角线长可以是 _____ ()

(A) 2 和 12

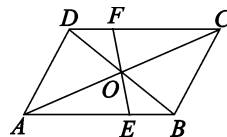
(B) 3 和 4

(C) 4 和 6

(D) 4 和 8

3. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , EF 过点 O ,分别与 AB, CD 相交于点 E, F .

求证: $BE=DF$.



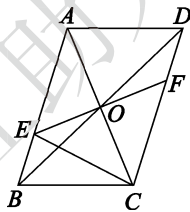
◎ 能力提升

4. 在 $\square ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , OA , OB , AB 的长度分别为 3 cm, 4 cm, 5 cm, 则 $\square ABCD$ 各边的长分别为 _____, 两条对角线的长分别为 _____.

5. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , EF 过点 O , 且与 AB , CD 分别相交于点 E , F , 连接 EC .

(1) 求证: $OE=OF$;

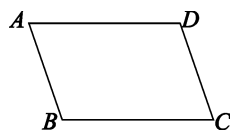
(2) 若 $EF \perp AC$, 且 $\triangle BEC$ 的周长是 10, 求 $\square ABCD$ 的周长.



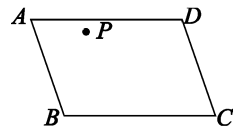
◎ 拓展创新

6. 问题一: 李老师家有一块平行四边形的菜地 (如图①), 他想在中间修一条笔直的小路, 把菜地分成面积相等的两块, 应该怎样修呢?

问题二: 如果李老师家的这块平行四边形菜地里有一口水井 P (如图②), 为了浇水方便, 那条笔直的小路要经过水井, 并且同样要把菜地分成面积相等的两部分, 那么又该怎样修呢?



图①



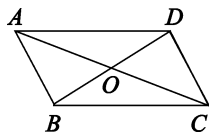
图②

第四学时



问题导学

如图, $\square ABCD$ 的对角线相交于点 O , 且 $AB = 5$, $\triangle OCD$ 的周长为 23, 则平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线长的和是 ()



- (A) 18 (B) 28
(C) 36 (D) 46



自主学习

教材导读

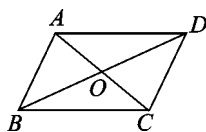
阅读教材 P₇₉ 中的“例 7”与“例 8”部分.

(1) 例 7 的主要解题依据是 _____.

(2) 回答教材 P₇₉ 中的云图针对“ $S_{\square ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = AC \cdot BE$ ”提出的问题: 你知道其中的理由吗?

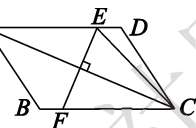
自主测评

1. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, O 是对角线 AC, BD 的交点, 下列结论错误的是 ()



- (A) $AB \parallel CD$ (B) $AB = CD$
(C) $AC = BD$ (D) $OA = OC$

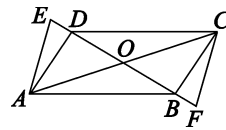
2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 的垂直平分线分别交 AD, BC 于点 E, F , 连结 CE , 若 $\triangle CED$ 的周长为 6, 则 $\square ABCD$ 的周长为 ()



- (A) 6 (B) 12
(C) 18 (D) 24

3. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , E, F 分别为 OD, OB 延长线上的点, 且 $DE = BF$.

求证: $AE = CF$.



收获与问题 在自主学习中, 你发现了什么呢?

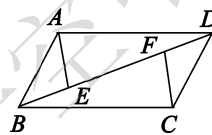
要注意数形结合, 画示意图.



合作学习

难点探究

如图, 在 $\square ABCD$ 中, E, F 是对角线 BD 上的两点, 且 $BE = DF$, 连结 AE, CF , 请你猜想 AE 与 CF 有怎样的数量关系? 对你的猜想进行证明, 你能想出几种办法?



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.



探究展示

问题共析 要积极发言, 及时总结哦!

展示交流

1. 已知 $\square ABCD$ 的周长为 64 cm, 边 BC 上的高 $AE=6$ cm, 边 CD 上的高 $AF=10$ cm, 求 $S_{\square ABCD}$.

2. 如图是一个由 5 张纸片拼成的平行四边形, 相邻纸片之间互不重叠也无缝隙, 其中两张等腰直角三角形纸片的面积都为 S_1 , 另外两张直角三角形纸片的面积都为 S_2 , 中间一张正方形纸片的面积为 S_3 , 则这个平行四边形的面积一定可以表示为 ()

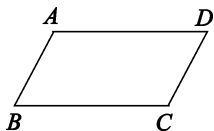
- (A) $4S_1$ (B) $4S_2$
(C) $4S_2+S_3$ (D) $3S_1+4S_3$



归纳梳理

1. 我们学习平行四边形的性质主要是从边、角、对角线及对称性方面研究的, 请你结合 $\square ABCD$, 用几何语言写出它的边、角、对角线具有的性质:

- (1) 边: _____;
(2) 角: _____;
(3) 对角线: _____.



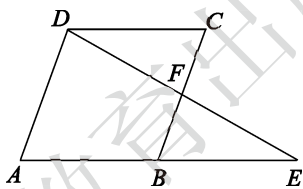
2. 我们研究平行四边形的过程中, 应用较多的是数学思想中的 _____ 思想, 即把 _____ 变成 _____ 来解决问题.



深化拓展

基础反思

1. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 延长 AB 到点 E , 使 $BE=AB$, 连结 DE , 交 BC 于点 F , 则下列结论不一定成立的是 ()



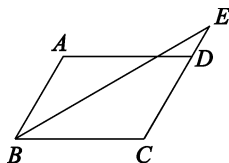
- (A) $\angle E = \angle CDF$

- (B) $EF = DF$
(C) $AD = 2BF$
(D) $BE = 2CF$

2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle ABC$ 的平分线 BE 与 CD 的延长线相交于点 E .

(1) 作出 $\angle C$ 的平分线 CO , 交 BE 于点 O ; (尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹)

(2) 试比较 BO 与 EO 的大小, 并说明理由.



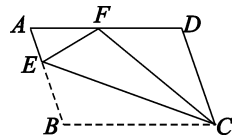
能力提升

3. 若一个平行四边形的两条对角线的长分别为 10 和 8, 则它的一边长 a 的取值范围是 ()

- (A) $2 < a < 14$ (B) $1 < a < 9$
(C) $3 < a < 4$ (D) $6 < a < 8$

拓展创新

4. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 在边 AB 上, 点 F 在边 AD 上, AF 比 FD 小 2, 将 $\square ABCD$ 沿直线 EC 翻折, 使点 B 落在边 AD 的点 F 上, 如果 $\triangle AEF$ 的周长为 19, $\triangle CDF$ 的周长为 37, 求 AB, BC 的长.



§ 18.2 平行四边形的判定

第一学时



问题导学

用两个全等三角形可以拼成几种不同的四边形？其中有几个是平行四边形？你是依据什么判定它们是平行四边形的？你还想知道其他判定一个四边形是平行四边形的方法吗？一起走进今天的课堂吧！



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₈₁ “思考” 上面的部分.

(1) 平行四边形的性质有哪些？

(2) 如何判定一个四边形是平行四边形？你是从哪个方面考虑的？

(3) 由平行四边形的性质逆向思考，你认为可能有哪些判定方法？它们分别是平行四边形的哪些方面考虑的？

2. 完成教材 P₈₁ 中的“思考” 部分里的表格填空.

命题“平行四边形的两组对边分别相等”的逆命题是

这个逆命题是 _____ (填“真”或“假”) 命题.

3. 阅读教材 P₈₂ 中的“试一试” 部分.

(1) 请你按照教材 P₈₂ 中“试一试” 的要求画图.

(2) 根据画图结果可以得出平行四边形的判定定理 1:

4. 阅读教材 P₈₂ 中的对判定定理 1 的证明. 证明过程中, 为什么要“连结 BD”?

5. 阅读教材 P₈₃ 中的“试一试” 部分.

(1) 请你按照教材 P₈₃ 中“试一试” 的要求画图.

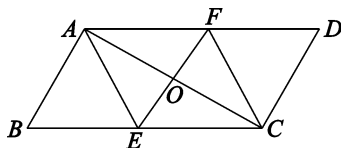
根据画图结果可以得出平行四边形的判定定理 2:

(2) 阅读教材 P₈₃ 中的对判定定理 2 的证明. 证明过程中, 为什么要“连结对角线 AC”?

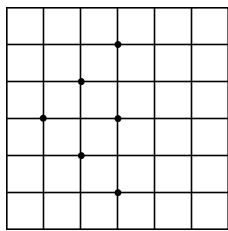
6. 阅读教材 P₈₄ 中的“例 1” 和“思考” 部分, 请尝试用其他方法证明例 1.

自主测评

1. 如图, 点 E, F 分别在 $\square ABCD$ 的边 BC, AD 上, AC, EF 交于点 O , 请你添加一个条件 (只添一个即可), 使四边形 $AECF$ 是平行四边形, 你所添加的条件是 _____.



2. 在下面的格点图中,以已知的 6 个格点为顶点,请你画出所有的平行四边形.



3. (2018·呼和浩特)顺次连结平面上的 A, B, C, D 四点得到一个四边形,从① $AB \parallel CD$;② $BC = AD$;③ $\angle A = \angle C$;④ $\angle B = \angle D$ 四个条件中任取其中两个,可以得出“四边形 $ABCD$ 是平行四边形”这一结论的情况共有 ()

- (A) 5 种 (B) 4 种
(C) 3 种 (D) 1 种

收获与问题 在自主学习中,你发现了什么呢?

你能说出两种判定方法的证明思路吗?



合作学习



难点探究

1. 教材 P₈₄ 中的第一个云图中提出了问题:“你还能用其他方法来证明吗?”请你用与教材不同的方法来证明平行四边形判定定理 2: 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

2. 在四边形 $ABCD$ 中,当 $AB = CD, BC \parallel AD$ 时,四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗? 为什么? 请举例说明.

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

请注意平行四边形判定的条件.



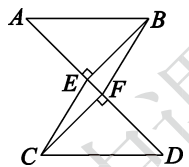
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

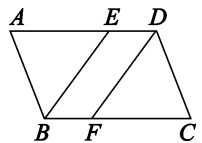
1. 如图,已知 $AB \parallel CD, BE \perp AD$, 垂足为 $E, CF \perp AD$, 垂足为 F , 且 $AE = DF$.

求证: 四边形 $BECF$ 是平行四边形.



2. 如图,在 $\square ABCD$ 中, BE, DF 分别是 $\angle ABC, \angle CDA$ 的平分线.

求证: 四边形 $BEDF$ 为平行四边形.





归纳梳理

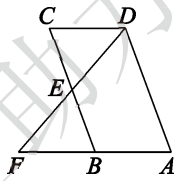
_____ 的四边形
 _____ 的四边形
 _____ 的四边形 } 是平行四边形.



深化拓展

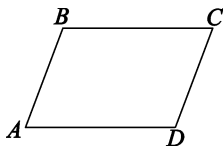
基础反思

1. (2018 · 东营) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, E 是边 BC 的中点, 连结 DE 并延长, 交 AB 的延长线于点 F , 且 $AB=BF$. 添加一个条件使四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 你认为下面四个条件中可选择的是 ()

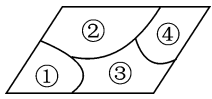


- (A) $AD=BC$ (B) $CD=BF$
 (C) $\angle A=\angle C$ (D) $\angle F=\angle CDF$

2. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 要使得四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 应添加的条件是 _____ (只填写一个条件, 不使用图形以外的字母和线段).



3. 小敏不慎将一块平行四边形玻璃打碎成如图所示的四块, 为了能在商店配到一块与原来相同的平行四边形玻璃, 他带了两块碎玻璃, 其编号应该是 ()



- (A) ①② (B) ①④
 (C) ③④ (D) ②③

能力提升

4. 如图, 在边长为 1 的小正方形网格中, 三角形的三个顶点均落在格点上.

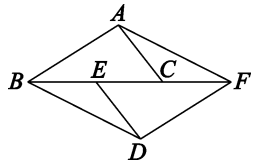


- (1) 以三角形的其中两边为边画一个平行四边形, 并在顶点处标上字母 A, B, C, D ;
 (2) 求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

5. 如图, 点 B, E, C, F 在一条直线上, $AB=DF, AC=DE, BE=FC$.

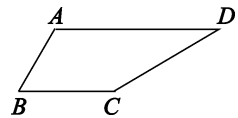
(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle DFE$;

(2) 连结 AF, BD , 求证: 四边形 $ABDF$ 是平行四边形.



拓展创新

6. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=6, BC=8, \angle A=120^\circ, \angle B=60^\circ, \angle BCD=150^\circ$, 求 AD 的长.



第二学时



问题导学

在四边形 $ABCD$ 中,从下列条件:① $AB \parallel CD$, ② $AB=CD$,③ $BC \parallel AD$,④ $BC=AD$ 中任意选取两个,能使四边形是平行四边形的选法有几种?你能说出你用所选条件判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的依据是什么吗?你还想知道其他的判定方法吗?



自主学习

教材导读

1. 完成教材 P₈₅ 中的“思考”部分里的表格填空.

命题“平行四边形的两条对角线互相平分”的逆命题是_____.

这个逆命题是_____ (填“真”或“假”)命题.

2. 阅读教材 P₈₅ 中“试一试”部分的内容.

(1) 请你按照教材 P₈₅ 中“试一试”的要求画图.

(2) 根据画图结果可以得出平行四边形的判定定理:_____.

3. 阅读教材 P₈₆ 中的对判定定理 3 的证明.

按照教材 P₈₆ 中云图的要求选择一种方法证明判定定理 3.

证明:

4. 阅读教材 P₈₇ 中的“思考”部分.

现在我们总共学习了_____ 种判定平行四边形的的方法(包括定义).

平行四边形的判定定理与性质之间是_____ 的

关系.

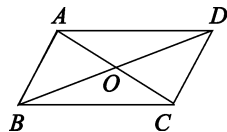
自主测评

1. 在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O ,当 $OA=OC$, $OB=$ _____ 时,四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

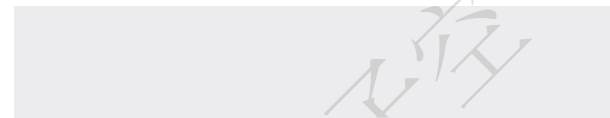
2. 在四边形 $ABCD$ 中,当 $AB \parallel DC$, $\angle B=60^\circ$, $\angle D=$ _____ 时,四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

3. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$,对角线 AC , BD 相交于点 O , $BO=DO$.

求证:四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



收获与问题 在自主学习中,你发现了什么呢?

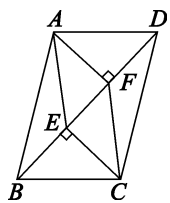


合作学习

难点探究

如图,在 $\square ABCD$ 中,点 E, F 在对角线 BD 上, $AF \perp BD$, $CE \perp BD$.

求证:四边形 $AECF$ 是平行四边形.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

对教材 P₈₆ 中的“例 2”进行变式训练:

(1) 如果将条件 $AE=CF$ 改成 $BE \parallel DF$, 那么四边形 $BFDE$ 还是平行四边形吗?

(2) 自己变化条件, 证明四边形 $BFDE$ 还是平行四边形.



归纳梳理

平行四边形的判定方法	两组对边分别_____的四边形是平行四边形
	两组对边分别相等的四边形是平行四边形
	一组对边_____的四边形是平行四边形
	两条对角线_____的四边形是平行四边形



深化拓展

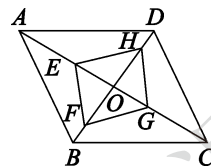
基础反思

1. 下面几组条件中, 能判定一个四边形是平行四边形的是 ()

- (A) 一组对边相等
- (B) 两条对角线互相平分
- (C) 一组对边平行
- (D) 两条对角线互相垂直

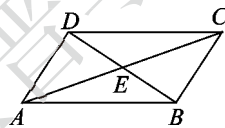
2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 点 E, G 在 AC 上, $AE=CG$, 点 F, H 在 BD 上, $BF=DH$.

求证: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.



能力提升

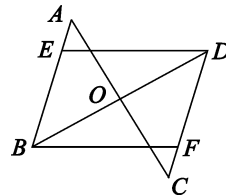
3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 E , $\angle CBD=90^\circ$, $BC=4$, $BE=ED=3$, $AC=10$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 ()



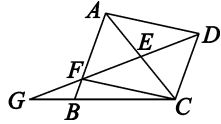
- (A) 6
- (B) 12
- (C) 20
- (D) 24

4. 如图, $AB \parallel CD$, 点 O 为线段 BD 的中点, 直线 AC 经过点 O , 点 E, F 分别在线段 AB, CD 上, 且 $AE=CF$.

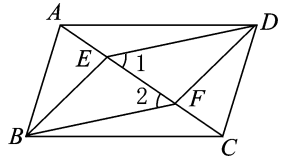
求证: $ED=BF$.



5. (2018·兰州)如图,在 $\triangle ABC$ 中,过点 C 作 $CD \parallel AB$, E 是 AC 的中点,连结 DE 并延长,交 AB 于点 F ,交 CB 的延长线于点 G ,连结 AD , CF . 求证:四边形 $AFCD$ 是平行四边形.



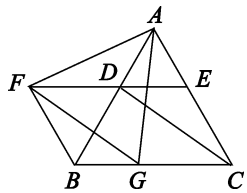
7. 如图,四边形 $ABCD$ 是平行四边形, E, F 为对角线 AC 上的两点,连结 ED, EB, FD, FB ,给出以下条件:① $BE \parallel DF$;② $BE = DF$;③ $AE = CF$,请你从中选取一个条件,使 $\angle 1 = \angle 2$ 成立,并给出证明.



拓展创新

6. 如图,点 G 在边 BC 上, $\triangle ABC$ 和 $\triangle AGF$ 都是等边三角形,点 E 在边 AC 上, $FE \parallel BG$, FE 和 AB 相交于点 D . 求证:

- (1) 四边形 $BCEF$ 是平行四边形;
- (2) 四边形 $CDFG$ 是平行四边形.

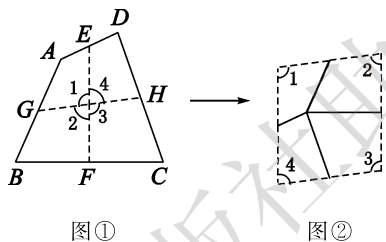


第三学时



问题导学

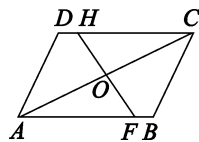
如图,图①是一张四边形的硬纸片 $ABCD$, E, G, F, H 分别是边 AD, BA, CB, DC 上的中点,沿线段 EF, GH 将硬纸片剪开,得到四张小四边形纸片,用它们可以拼成如图②所示的四边形,请问图②中的四边形是平行四边形吗?为什么?你是用哪种方法判定的?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₈₈ 中的“例 3”.
 (1) 例 3 中“求证 AC 和 HF 互相平分”的含义如何理解? 假设 AC 和 HF 相交于点 O , 如何用几何语言描述“ AC 和 HF 互相平分”.



(2) 例 3 中采用证四边形 $AFCH$ 是平行四边形的方法来证 AC 与 HF 互相平分, 用的是哪一种判定方法?

(3) 你还有其他的判定方法吗? 和教材中的方法比较, 哪种更简便?

(4) 例 3 在证明的过程中, 哪一部分用的是平行四边形的性质, 哪一部分用的是平行四边形的判定?

2. 阅读教材 P₈₈ 中的“例 4”.

(1) 证明例 4 的过程中主要运用的两个依据是:

① 四边形的内角和是 _____ ;

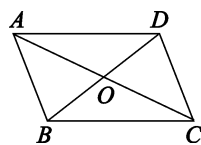
② _____

的四边形是平行四边形.

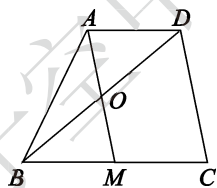
(2) $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ 表示四边形 $ABCD$ 的两组 _____ 角相等. 由此可以得到平行四边形的又一种判定方法: _____ 的四边形是平行四边形.

自主测评

1. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 如果 $AB = CD, BC = AD$, 对角线 AC 和 BD 相交于点 O , 若 $\triangle AOB$ 的周长为 15, $AB = 6$, 那么对角线 $AC + BD =$ _____ .



2. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, M 是 BC 的中点, AM, BD 互相平分并相交于点 O . 求证: $AM = DC$.



收获与问题 在自主学习中, 你发现了什么呢?

要灵活运用平行四边形的性质与判定定理.

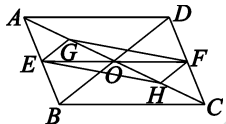


合作学习

◎ 难点探究

如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , EF 经过点 O , 且分别与 AB, CD 相交于点 E, F, G, H 分别为 OA, OC 的中点.

求证: 四边形 $EHFG$ 是平行四边形.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

要根据题目中的已知条件选用相应的平行四边形的判定方法.

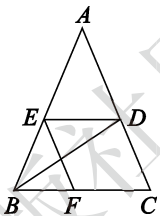


探究展示

问题共析 要积极发言, 及时总结哦!

◎ 展示交流

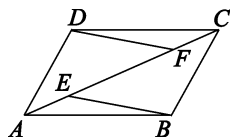
1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, $DE \parallel BC$ 交 AB 于点 E , $EF \parallel AC$ 交 BC 于点 F , 则 $BE = FC$, 为什么?



2. 如图, E, F 是四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的两点, $AF = CE, DF = BE, DF \parallel BE$.

(1) 求证: $\triangle AFD \cong \triangle CEB$;

(2) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗? 请说明理由.



归纳梳理

1.

归纳角度	从边的角度	从角的角度	从对角线的角度
平行四边形的性质			
平行四边形的判定			

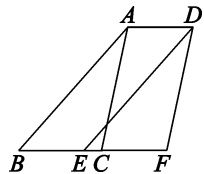
2. 要学会灵活运用平行四边形的性质与判定定理解决问题.



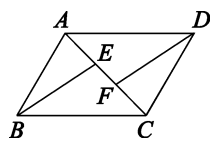
深化拓展

◎ 基础反思

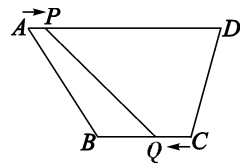
1. (2018 · 孝感) 如图, B, E, C, F 在一条直线上, 已知 $AB \parallel DE, AC \parallel DF, BE = CF$, 连结 AD , 求证: 四边形 $ABED$ 是平行四边形.



2. 如图, E, F 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的两点, $CE = AF$, 请你猜想 BE 与 DF 有怎样的位置关系和数量关系, 并对你的猜想加以证明.



4. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 且 $AD = 12 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, 点 P, Q 分别从点 A, C 同时出发, 点 P 以 2 cm/s 的速度由点 A 向点 D 运动, 点 Q 以 1 cm/s 的速度由点 C 向点 B 运动, 几秒后, 在这个图形中会出现平行四边形?

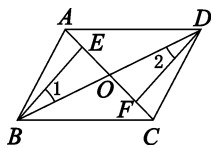


能力提升

3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 点 E, F 分别在 OA, OC 上.

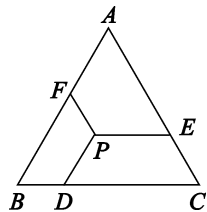
(1) 给出以下条件: ① $OB = OD$, ② $\angle 1 = \angle 2$, ③ $OE = OF$, 请你从中选取两个条件证明 $\triangle BEO \cong \triangle DFO$;

(2) 在(1)中你所选条件的前提下, 添加 $AE = CF$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



拓展创新

5. 如图, 等边三角形 ABC 的边长为 a , 点 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $PD \parallel AB, PE \parallel BC, PF \parallel AC$, 当点 P 在 $\triangle ABC$ 内不同位置时, $PD + PE + PF$ 的值是否发生变化? 如果不发生变化, 那么这个值是多少? 如果发生变化, 请说明理由.



第四学时



问题导学

平行四边形有哪些性质和判定方法？

平行四边形的性质	(1) _____ ; (2) _____ ; (3) _____ ; (4) _____ .
平行四边形的判定	(1) 定义: _____ ; (2) _____ ; (3) _____ ; (4) _____ .



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₈₉ 中的“例 5”部分.

例 5 的主要解题依据是:

- ① _____ ;
② _____ .

2. 阅读教材 P₈₉ 中的“例 6”部分.

(1) 例 6 的主要解题依据是:

- ① _____ ;
② _____ .

(2) 你能用另外一种方法证明四边形 $EHFG$ 是平行四边形吗？

自主测评

1. 作 $\square ABCD$, 使得 $AB=3\text{ cm}$, $AC=8\text{ cm}$, $BD=10\text{ cm}$.

2. 判断对错:

(1) 两组对边分别平行的四边形是平行四边形. ()

(2) 四个内角都相等的四边形是平行四边形. ()

(3) 一组邻角互补的四边形是平行四边形. ()

(4) 顺次连结平行四边形各边中点所得到的四边形是平行四边形. ()

(5) 以 60 cm 长为对角线, 20 cm 和 34 cm 长为两条邻边能作出平行四边形. ()

收获与问题 在自主学习中, 你发现了什么呢?

你注意到了吗? 画三角形是画平行四边形的基础.



合作学习

难点探究

1. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E, F 分别在边 BC, AD 上, 若想使四边形 $AFCE$ 为平行四边形, 需添加一个条件, 这个条件可以是 ()

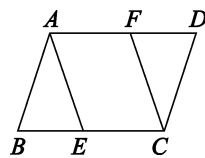
① $AF=CF$; ② $AE=CF$; ③ $\angle BAE=\angle DCF$; ④ $\angle BEA=\angle FCE$.

(A) ①或②

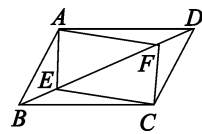
(B) ②或③

(C) ③或④

(D) ①或③或④



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图, E, F 是 $\square ABCD$ 对角线 BD 上的两点, 请你添加一个适当的条件, 使四边形 $AECF$ 是平行四边形, 这个条件可以是 _____ .

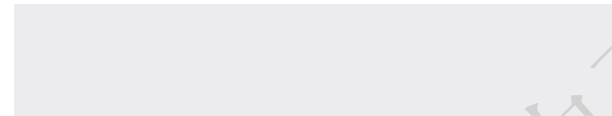
组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

要根据问题的已知条件灵活选用平行四边形的性质或判定定理来解题.



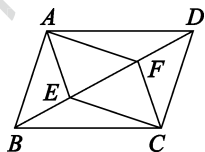
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

1. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,点 E, F 在对角线 BD 上,且 $BE=DF$,四边形 $AECF$ 是平行四边形. 求证:四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

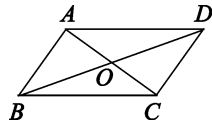


2. 将“展示交流”里的第 1 题与“难点探究”里的第 2 题进行对照,它们之间有什么区别与联系?



归纳梳理

1. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形,根据平行四边形的性质,你可以得出哪些结论,用几何语言描述出来.



2. 要证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形,你有哪些方法? 用几何语言描述出来.

3. 归纳:已知平行四边形时用 _____,判定四边形是平行四边形时用 _____.



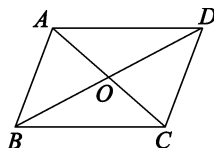
深化拓展

基础反思

1. 能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的选项是 ()

- (A) $AB \parallel CD, AD = BC$
- (B) $\angle A = \angle B, \angle C = \angle D$
- (C) $AB = CD, AD = BC$
- (D) $AB = AD, CB = CD$

2. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC, BD 相交于点 O ,下列条件不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的是 ()



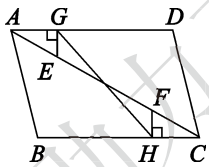
- (A) $AB \parallel CD, AD \parallel BC$

- (B) $OA=OC, OB=OD$
 (C) $AD=BC, AB \parallel CD$
 (D) $AB=CD, AD=BC$

◎ 能力提升

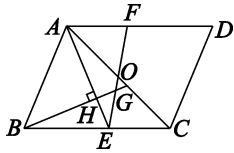
3. 如图, 在 $\square ABCD$ 的对角线 AC 上取 $AE=CF$, 作 $EG \perp AD$ 于点 G , 作 $FH \perp BC$ 于点 H , 连结 GH .

求证: GH 与 EF 互相平分.



4. (2018 · 重庆) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, O 是对角线 AC 的中点, E 是边 BC 上的一点, 且 $AB=AE$, 连结 EO 并延长, 交边 AD 于点 F , 过点 B 作 AE 的垂线, 垂足为 H , 交 AC 于点 G .

- (1) 若 $AH=3, HE=1$, 求 $\triangle ABE$ 的面积;
 (2) 若 $\angle ACB=45^\circ$, 求证: $DF=\sqrt{2}CG$.

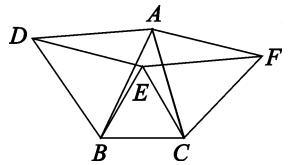


◎ 拓展创新

5. 延长 $\triangle ABC$ 的中线 AD 至点 E , 使 $DE=AD$, 连结 BE, CE , 则四边形 $ABEC$ 为 _____ 四边形.

6. 如图, 以 $\triangle ABC$ 的三边分别作等边 $\triangle ABD$, $\triangle BCE$, $\triangle ACF$.

- (1) 求证: 四边形 $ADEF$ 是平行四边形;
 (2) 平行四边形 $ADEF$ 是否一定存在? 试证明你的结论.



第 18 章 数学能力提升与评价

本章主要培养同学们的推理能力,通过本章的学习,同学们要体会合情推理与演绎推理的完美结合,通过回顾三角形相关内容的学习过程,我们可以用类似的思路来研究四边形.通过研究平行四边形的性质及判定,同学们的空间观念、运算能力、推理能力等方面又将会有新的发展,能力也可以得到进一步提升.

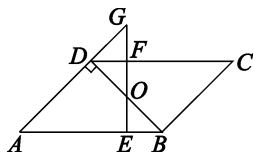
推理能力

[能力提升]

推理是学习数学的基本思维方式,有了三角形全等等知识,我们以此为基础,可以继续学习与体会合情推理与演绎推理.推理能力的学习贯穿在整个学习数学的过程中,这是一个长期、缓慢的过程,同学们在观察、实验、猜想、证明的过程中发展了推理能力,在学习平行四边形的性质与判定的过程中也再次体会到了命题与逆命题、定理与逆定理的学习,教材中的众多例题对此都有所体现.

[典例解读]

如图,在 $\square ABCD$ 中, $BD \perp AD$, $\angle A = 45^\circ$, E, F 分别是 AB, CD 上的点,且 $BE = DF$, 连结 EF , 交 BD 于点 O .



- (1) 求证: $BO = DO$;
- (2) 若 $EF \perp AB$, 延长 EF , 交 AD 的延长线于点 G , 当 $FG = 1$ 时, 求 AE 的长.

分析: 本题通过考查平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质、等腰直角三角形的判定与性质发展同学们的推理能力.熟练掌握平行四边形的性质,证明三角形全等是解决问题(1)的关键.

(1) 由平行四边形的性质和 A. A. S. 证明 $\triangle OBE \cong \triangle ODF$, 得出对应边相等即可; (2) 证明 $AE = GE$, 再证明 $DG = DO$, 得出 $OF = FG = 1$, 即可得出结果.

解: (1) \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore DC \parallel AB$,
 $\therefore \angle OBE = \angle ODF$.
 在 $\triangle OBE$ 与 $\triangle ODF$ 中,

$$\begin{cases} \angle OBE = \angle ODF, \\ \angle BOE = \angle DOF, \\ BE = DF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle OBE \cong \triangle ODF$ (A. A. S.).

$\therefore BO = DO$.

(2) $\because EF \perp AB, AB \parallel DC$,

$\therefore \angle GEA = \angle GFD = 90^\circ$.

$\because \angle A = 45^\circ$,

$\therefore \angle G = \angle A = 45^\circ$.

$\therefore AE = GE$.

$\because BD \perp AD$,

$\therefore \angle ADB = \angle GDO = 90^\circ$.

$\therefore \angle GOD = \angle G = 45^\circ$.

$\therefore DG = DO$.

$\therefore OF = FG = 1$.

由(1)可知, $OE = OF = 1$,

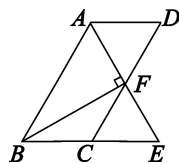
$\therefore GE = OE + OF + FG = 3$.

$\therefore AE = 3$.

[自我评价]

1. 如图, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 CD 于点 F , 交 BC 的延长线于点 E .

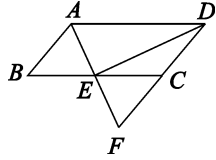
- (1) 求证: $BE = CD$;
- (2) 连结 BF , 若 $BF \perp AE$, $\angle BEA = 60^\circ$, $AB = 4$, 求 $\square ABCD$ 的面积.



2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 是边 BC 的中点, 连结 AE 并延长, 交 DC 的延长线于点 F .

(1) 求证: $AB=CF$;

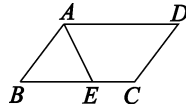
(2) 连结 DE , 若 $AD=2AB$, 求证: $DE \perp AF$.



运算能力

[自我评价]

如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E , 且 $BE=3$, 若平行四边形 $ABCD$ 的周长是 16, 则 $EC=$ _____.



空间观念

[自我评价]

1. 在 $\square ABCD$ 中, $AD=8$, AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E , DF 平分 $\angle ADC$ 交 BC 于点 F , 且 $EF=2$, 则 AB 的长为 ()

- (A) 3 (B) 5
(C) 2 或 3 (D) 3 或 5

2. 已知在平行四边形 $ABCD$ 中, BC 边上的高为 4, $AB=5$, $AC=2\sqrt{5}$, 则平行四边形 $ABCD$ 的周长 = _____.

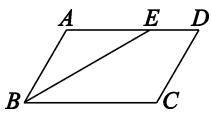
第18章测评

(测评时间:60分钟 满分:100分)

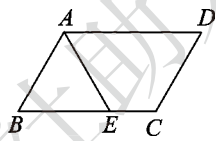
一、选择题(每小题2分,共20分)

1. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $\angle ABC$ 的平分线交边 AD 于点 E , $\angle BED=150^\circ$,则 $\angle A$ 的大小为()

- (A) 150° (B) 130°
(C) 120° (D) 100°



(第1题图)

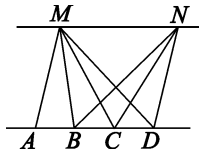


(第2题图)

2. 如图,在 $\square ABCD$ 中,已知 $AD=12\text{ cm}$, $AB=8\text{ cm}$, AE 平分 $\angle BAD$,交边 BC 于点 E ,则 CE 的长等于()

- (A) 8 cm (B) 6 cm
(C) 4 cm (D) 2 cm

3. 如图, $MN \parallel AD$,点 A, B, C, D 在同一条直线上,且 $AB=BC=CD$,则图中与 $\triangle MAC$ 面积相等的三角形(不包括 $\triangle MAC$)有()

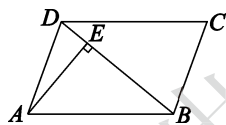


- (A) 1个 (B) 2个
(C) 3个 (D) 4个

4. 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=CD$, $AB \parallel CD$,下列结论错误的是()

- (A) $\angle A = \angle C$ (B) $AD \parallel BC$
(C) $\angle A = \angle B$ (D) 对角线互相平分

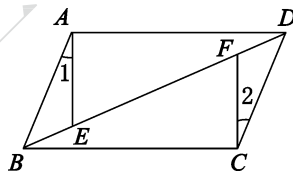
5. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $DB=DC$, $AE \perp BD$ 于点 E ,如果 $\angle C=70^\circ$,那么 $\angle DAE$ 等于()



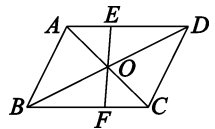
- (A) 20° (B) 25°
(C) 30° (D) 35°

6. 如图,在 $\square ABCD$ 中, E, F 是对角线 BD 上的两点,如果添加一个条件使 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$,则添加的条件不能是()

- (A) $AE=CF$ (B) $BE=DF$
(C) $BF=DE$ (D) $\angle 1 = \angle 2$



(第6题图)

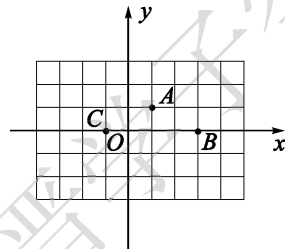


(第7题图)

7. 如图, EF 过 $\square ABCD$ 对角线的交点 O ,交 AD 于点 E ,交 BC 于点 F ,若 $\square ABCD$ 的周长为 18 , $OE=1.5$,则四边形 $EFCD$ 的周长为()

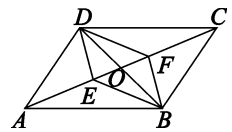
- (A) 14 (B) 13
(C) 12 (D) 10

8. 在平面直角坐标系中,以点 $A(1,1), B(3,0), C(-1,0)$ 为顶点构造平行四边形,下列各点不能作为平行四边形顶点的是()



- (A) $(5,1)$ (B) $(0,-2)$
(C) $(-3,1)$ (D) $(1,-1)$

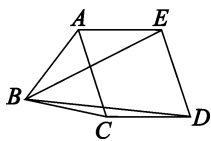
9. 如图所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC, BD 相交于点 O, E, F 是对角线 AC 上的两点,给出下列四个条件:



① $AE=CF$; ② $DE=BF$; ③ $\angle ADE = \angle CBF$; ④ $\angle ABE = \angle CDF$,其中不能判定四边形 $DEBF$ 是平行四边形的有()

- (A) 0个 (B) 1个
(C) 2个 (D) 3个

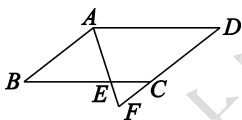
10. 如图,已知凸五边形 $ABCDE$ 的边长均相等,且 $\angle DBE = \angle ABE + \angle CBD$, $AC=1$,则 BD 必定满足()



- (A) $BD < 2$
- (B) $BD = 2$
- (C) $BD > 2$
- (D) 以上情况均有可能

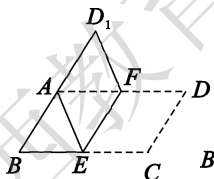
二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

11. 如图, E 是 $\square ABCD$ 的边 BC 上的一点, 且 $AB = BE$, 连结 AE 并延长, 与 DC 的延长线交于点 F , 若 $\angle F = 70^\circ$, 则 $\angle D =$ _____ $^\circ$.

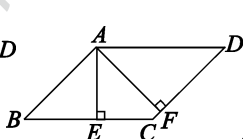


12. 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 如果 $\triangle ABO$ 的面积是 6, 那么 $\square ABCD$ 的面积是 _____.

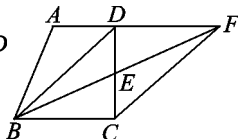
13. 如图, 把 $\square ABCD$ 折叠, 使点 C 与点 A 重合, 这时点 D 落在 D_1 处, 折痕为 EF , 若 $\angle BAE = 55^\circ$, 则 $\angle D_1AD =$ _____.



(第 13 题图)



(第 14 题图)



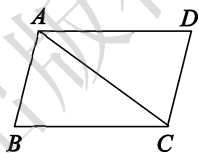
(第 15 题图)

14. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E, F 分别在 BC, CD 边上, $AE \perp BC, AF \perp CD$, 如果 $\angle C = 3\angle B$, 那么 $\angle DAF =$ _____.

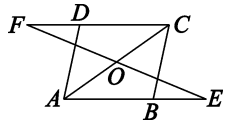
15. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, E$ 是 DC 上一点, 连结 BE 并延长, 交 AD 的延长线于点 F , 请你只添加一个条件: _____, 使得四边形 $BDFC$ 为平行四边形.

三、解答题(共 65 分)

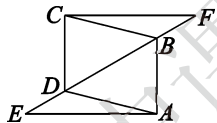
16. (本题 8 分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle BAC = 68^\circ, \angle ACB = 36^\circ$, 求 $\angle D$ 和 $\angle BCD$ 的大小.



17. (本题 6 分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 延长 AB 至点 E , 延长 CD 至点 F , 使得 $BE = DF$, 连结 EF , 与对角线 AC 交于点 O . 求证: $OE = OF$.

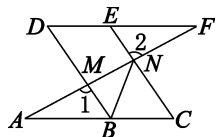


18. (本题 8 分) 如图, E, F 分别是 $\square ABCD$ 对角线 BD 所在直线上的两点, 连结 AE, CF , 请你添加一个条件, 使得 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 并证明.



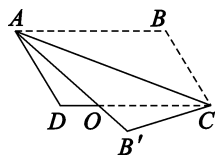
19. (本题 7 分) 如图, 点 B, E 分别在 AC, DF 上, AF 分别交 BD, CE 于点 $M, N, \angle A = \angle F, \angle 1 = \angle 2$.

- (1) 求证: 四边形 $BCED$ 是平行四边形;
- (2) 已知 $DE = 2$, 连结 BN , 若 BN 平分 $\angle DBC$, 求 CN 的长.



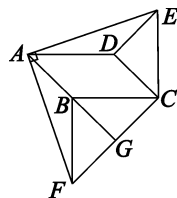
20. (本题 8 分) 周长为 80 cm 的平行四边形被两条对角线分成四个三角形, 其中相邻的两个三角形的周长差为 12 cm, 求这个平行四边形各边的长.

21. (本题 8 分) 在 $\square ABCD$ 中, 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 对折, 使点 B 落在 B' 处, AB' 和 CD 相交于点 O . 求证: $OA = OC$.



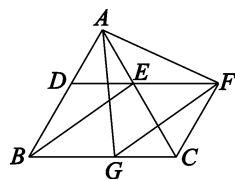
22. (本题 8 分) (2018 · 黄冈) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 分别以边 BC, CD 为腰作等腰三角形 BCF , 等腰三角形 CDE , 使 $BC = BF, CD = DE, \angle CBF = \angle CDE$, 连结 AF, AE .

- (1) 求证: $\triangle ABF \cong \triangle EDA$;
- (2) 延长 AB , 与 CF 相交于点 G , 若 $AF \perp AE$, 求证: $BF \perp BC$.



23. (本题 12 分) 如图, 在等边三角形 ABC 中, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, $DE \parallel BC$, 点 F 在 DE 的延长线上, $FC = EC$.

- (1) 求证: $\triangle ADF \cong \triangle EAB$;
- (2) 点 G 在 BC 边上, 若 $FG \parallel EB$, 求 $\angle AGF$ 的度数.



第 19 章 矩形、菱形与正方形

学习导航



本章纵览

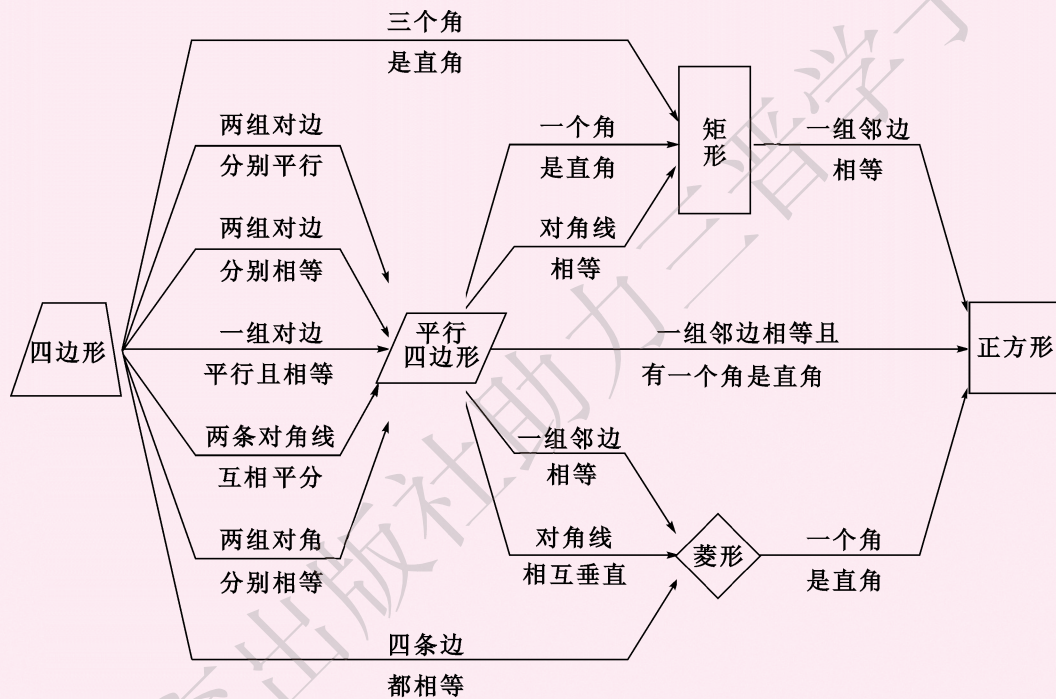
平行四边形为人们认识世界打开了新的窗口,加深了我们对事物的理解.进一步的探索使人们发现,平行四边形本身也是一个“小世界”,而矩形、菱形和正方形就是其中富有魅力的成员,对它们的研究,会使我们更进一步地感悟大千世界的精彩.

矩形、菱形和正方形是一些特殊的平行四边形.在了解了矩形、菱形和正方形的性质之后,再探索它们的判定方法,这样从边、角、对角线 and 对称性的角度研究平行四边形家族,就得到了一个完整的知识结构.这种分析归纳的学习研究方法,会使我们在今后的生活和学习中终身受益.

与研究平行四边形一样,矩形、菱形和正方形的判定方法也是通过逆命题的猜想、操作验证和逻辑推理证明的过程得到的,再次经历这样的知识发生、发展的过程,可以使同学们获得更多的亲身体验,进一步发展逻辑思维能力,激发创新意识,产生新的飞跃.



知识要点





学习要求

1. 通过逆命题猜想、操作验证、逻辑推理证明的过程,体验数学研究和发现的过程,提高数学学习的能力.
2. 借鉴平行四边形的学习经验,在认识矩形、菱形和正方形的基础上,探索并掌握矩形、菱形和正方形的判定方法,并能用其解决简单的应用问题.
3. 能对所学知识进行归纳总结,从边、角、对角线和对称性等不同的角度出发,形成图形的性质和判定方法的知识框架.
4. 发展合情推理能力,进一步培养逻辑推理能力,规范推理的书写格式.



学法指导

1. 教材通过类比和探究发现的方法来介绍矩形、菱形和正方形的知识,先了解图形的性质定理,再从探究逆命题的正确性出发,在操作中直观感知,然后再通过逻辑证明得出图形的判定定理.这个过程实际上就是人类认识世界、发现知识的漫长过程的浓缩.要重视这个过程,并积极参与这个过程,忽视这个过程,仅限于记住几个结论,不是真正意义上的学习.
2. 由于矩形、菱形和正方形的知识十分丰富,有极大的思维空间,解题方法往往是多样的,因此,在解题过程中,要注意融会贯通,一题多解,增强分析问题、解决问题的能力.
3. 要注意发现不同问题之间的内在联系,养成多问“为什么”的好习惯,达到举一反三的效果,切实减轻自己的学习负担.
4. 平行四边形知识体系完整,逻辑关系清晰,通过对整个平行四边形知识系统的复习,锻炼自己归纳整理知识的能力,使所学知识框架化、结构化,以便于理解、记忆和运用.



§ 19.1 矩 形

第一学时



问题导学

大家都知道矩形是一种特殊的平行四边形,那么矩形具有平行四边形的所有性质吗?和平行四边形相比较,矩形有哪些特殊之处?

类比我们研究平行四边形性质的思路,你认为我们应该从哪些角度研究矩形的性质呢?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₉₈ 中的“试一试”部分.

(1) 改变角度后的平行四边形为什么还是平行四边形?

(2) 矩形是_____的平行四边形.

2. 阅读教材 P₉₈ 中的“思考”部分.

(1) 完成教材 P₉₉ 中的表格.

(2) 矩形有_____条对称轴,对称轴为_____;
矩形的对称中心是_____.

(3) 矩形的性质:

矩形的性质定理 1:_____.

矩形的性质定理 2:_____.

(4) 证明矩形的性质定理 1:矩形的四个角都是直角.

已知:如图,四边形 $ABCD$ 是矩形, $\angle A = 90^\circ$.

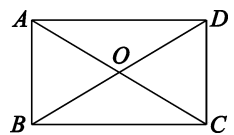
求证: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$.



(5) 证明矩形的性质定理 2:矩形的对角线相等.

已知:如图,四边形 $ABCD$ 是矩形.

求证: $AC = BD$.

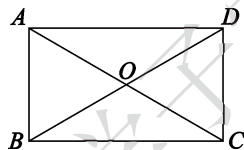


3. 阅读教材 P₉₉ 中的“例 1”部分.

例 1 的主要解题依据是_____.

自主测评

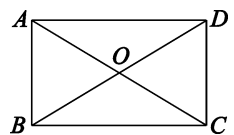
1. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC, BD 相交于点 O , $\angle ACB = 30^\circ$,则 $\angle AOB$ 的大小为 ()



- (A) 30° (B) 60°
(C) 90° (D) 120°

2. 已知矩形的边长为 10 和 15,其中一个内角的平分线分长边为两部分,这两部分长分别为_____.

3. 如图,矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O ,如果 $AC = 2AB$,求 $\angle AOD$ 的度数.



收获与问题 在自主学习中,你发现了什么呢?

矩形有但平行四边形没有的性质是什么?

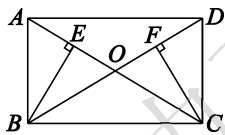


合作学习

难点探究

如图,在矩形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , $BE \perp AC$ 于点 E , $CF \perp BD$ 于点 F .

求证: $BE=CF$.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

要注意数形结合,以数释图,以图示意.

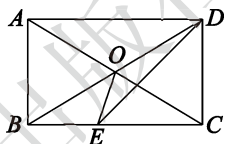


探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

如图,在矩形 $ABCD$ 中, DE 平分 $\angle ADC$,交 BC 于点 E , $\angle BDE = 15^\circ$,求 $\angle DOC$ 和 $\angle COE$ 的度数.



归纳梳理

我们研究四边形的性质,可以从边、角、对角线 and 对称性等角度进行分析,请你对矩形的性质作一个小结:

图形	边	角	对角线	对称性
平行四边形				
矩形				

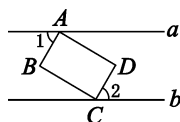


深化拓展

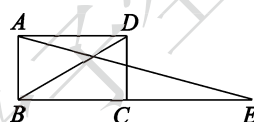
基础反思

1. 如图,矩形 $ABCD$ 的顶点 A, C 分别在直线 a, b 上,且 $a \parallel b$, $\angle 1 = 60^\circ$,则 $\angle 2$ 的度数为 ()

- (A) 30° (B) 45°
(C) 60° (D) 75°



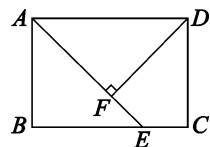
(第1题图)



(第2题图)

2. 如图,延长矩形 $ABCD$ 的边 BC 至点 E ,使 $CE = BD$,连结 AE ,如果 $\angle ADB = 30^\circ$,则 $\angle E =$ _____.

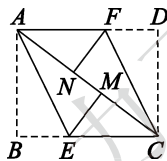
3. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AD = AE$, $DF \perp AE$ 于点 F . 求证: $AB = DF$.



◎ 能力提升

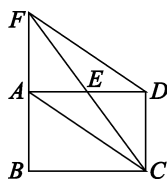
4. 如图, AC 为矩形 $ABCD$ 的对角线, 将边 AB 沿 AE 折叠, 使点 B 落在 AC 上的点 M 处, 将边 CD 沿 CF 折叠, 使点 D 落在 AC 上的点 N 处.

- (1) 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形;
- (2) 若 $AB = 6$, $AC = 10$, 求四边形 $AECF$ 的面积.



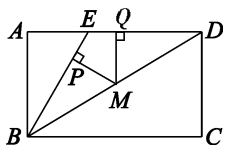
5. (2018 · 连云港) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是边 AD 的中点, 延长 CE , BA , 交于点 F , 连结 AC , DF .

- (1) 求证: 四边形 $ACDF$ 是平行四边形;
- (2) 当 CF 平分 $\angle BCD$ 时, 写出 BC 与 CD 的数量关系, 并说明理由.



6. 如图, E 为矩形 $ABCD$ 的边 AD 上的一点, 且 $BE = DE$, M 为对角线 BD 上的一点, $MP \perp BE$, $MQ \perp AD$, 垂足分别为 P, Q .

求证: $AB = MP + MQ$.



◎ 拓展创新

7. 阅读下列操作过程:

如图①, 小肖过 AB, CD 的中点画直线 EF , 把矩形 $ABCD$ 分割成甲、乙两部分.

如图②, 小徐过 A, C 两点画直线 AC , 把矩形 $ABCD$ 分割成丙、丁两部分.

回答下列问题:

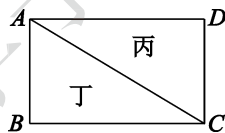
(1) 填空: $S_{\text{甲}}$ _____ $S_{\text{乙}}$, $S_{\text{丙}}$ _____ $S_{\text{丁}}$; (填“>”“<”或“=”)

(2) 根据小肖、小徐的分割原理, 你还能探索出其他的分割方法吗? 请在图③中任意给出一种;

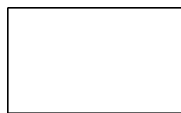
(3) 由本题的操作过程, 你发现了什么规律?



图①



图②



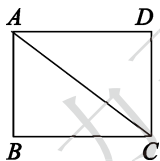
图③

第二学时



问题导学

如图,已知矩形 $ABCD$,连结对角线 AC ,若 $AB=6$, $AC=10$,你知道如何求矩形 $ABCD$ 的周长和面积吗?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P_{100} 中的“例 2”部分.

例 2 的主要解题依据是:

- ① _____ ;
 _____ ;
 ② _____ .

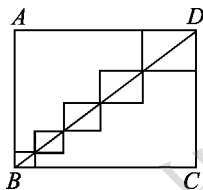
2. 阅读教材 P_{101} 中的“例 3”部分.

例 3 的主要解题依据是:

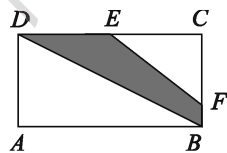
- ① _____ ;
 _____ ;
 ② _____ ;
 _____ ;
 ③ _____ .

自主测评

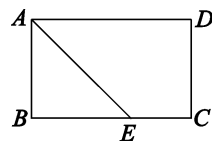
1. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=4$,则图中五个小矩形的周长之和为 _____ .



2. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=8$ cm, $CB=4$ cm, E 是 DC 的中点, $BF=\frac{1}{4}BC$,则四边形 $DBFE$ 的面积为 _____ cm^2 .



3. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=5$ cm, $AD=8$ cm, $\angle BAD$ 的平分线交边 BC 于点 E ,求这条角平分线 AE 分矩形所成两部分的面积比.



收获与问题 在自主学习中,你发现了什么呢?

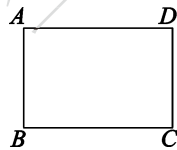
要灵活运用所学知识解决一些简单的问题.



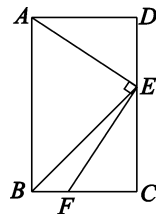
合作学习

难点探究

1. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=6$,若点 P 在边 AD 上,连结 BP , PC ,若 $\triangle BPC$ 是以 PB 为腰的等腰三角形,则 PB 的长为 _____ .



2. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, BE 是 $\angle ABC$ 的平分线, $AE \perp EF$. 求证: $AE=EF$.



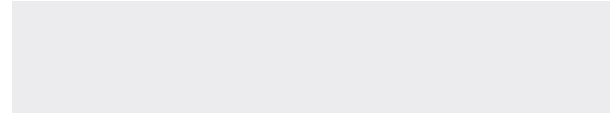
组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

要注意数形结合,以数释图,以图示意.



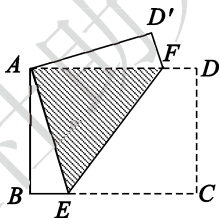
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

如图,在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=3\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$,现将纸片折叠压平,使点 C 与点 A 重合,如果设折痕为 EF ,求重叠部分 $\triangle AEF$ 的面积.



归纳梳理

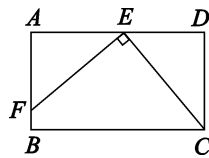
我们研究四边形的性质,可以从边、角、对角线和对称性等角度进行分析,请你对矩形的性质作一个小结.



深化拓展

基础反思

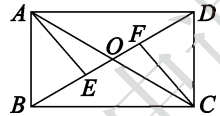
1. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, E, F 分别为 AD, AB 上的点,且 $EF=EC, EF \perp EC$,若 $DE=2$,矩形 $ABCD$ 的周长为 16,则矩形 $ABCD$ 的面积为 _____.



2. 如图,矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O ,点 E, F 在 BD 上, $BE=DF$.

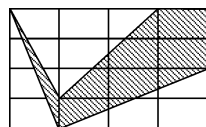
(1) 求证: $AE=CF$;

(2) 若 $AB=1, \angle COD=60^\circ$,求矩形 $ABCD$ 的面积.



能力提升

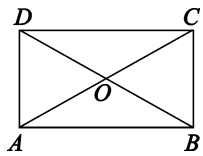
3. 如图,在由相同的小长方形组成的网格中,如果每个小长方形的面积均为 1,那么阴影部分的面积为 _____.



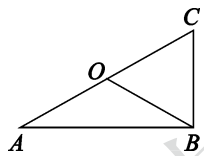
4. 如图①所示, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O .

(1) 猜想探究: BO 与对角线 AC 有怎样的数量关系, 并说明理由;

(2) 发现归纳: 如果擦掉 AD, DO, CD 三条线段, 如图②, 这时, BO 是 $\text{Rt} \triangle ABC$ 的斜边 AC 的什么线段? 由图①能发现什么结论? 试用语言描述;

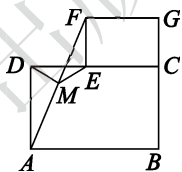


图①



图②

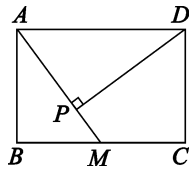
(3) 应用实践: 如图③, 摆放矩形纸片 $ABCD$ 与矩形纸片 $ECGF$, 使 B, C, G 三点在同一条直线上, CE 在边 CD 上, 连结 AF , 若 M 为 AF 的中点, 连结 DM, ME , 试猜想 DM 与 ME 的数量关系, 并证明你的结论. (提示: 延长 EM 交 AD 于点 H)



图③

◎ 拓展创新

5. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2 \text{ cm}, BC = 3 \text{ cm}$, M 是 BC 的中点, 求点 D 到 AM 的距离 DP .

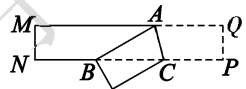


6. 如图, 将一个宽为 2 cm 的长方形纸条折叠, 折痕为 AC , 重叠部分为 $\triangle ABC$ (图中给出了一种折叠的情形).

(1) 求证: $\triangle ABC$ 是等腰三角形;

(2) 若 $\angle ABC = 30^\circ$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(3) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 2 cm^2 , 试画出大致的图形, 并求 $\angle BAC$ 的度数.

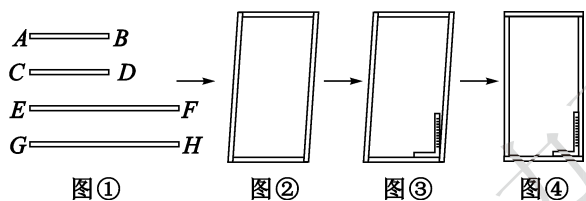


第三学时



问题导学

工人师傅做矩形窗框时分下面几个步骤进行, 如图所示.



首先截出两对符合规格的窗料, 如图①, 使 $AB=CD, EF=GH$; 其次摆成如图②所示的四边形; 接着用直角尺紧靠窗框的一个角, 如图③; 调整窗框的边框, 当直角尺的两条直角边与窗框无缝隙时, 如图④, 则说明窗框是合格的. 你知道这样做的道理吗?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₁₀₂ 中的“思考”前面的部分.

(1) 矩形的定义: _____ 的平行四边形是矩形.

(2) 矩形是 _____ 对称图形, 也是 _____ 对称图形.

(3) 矩形的性质:

① _____ ;

② _____ .

2. 阅读教材 P₁₀₂ 中的“思考”和“试一试”部分.

(1) 思考并填空:

① 有一个角是直角的四边形 _____ (填“一定”或“不一定”) 是矩形;

② 有两个角是直角的四边形 _____ (填“一定”或“不一定”) 是矩形;

③ 有三个角是直角的四边形 _____ (填“一定”或“不一定”) 是矩形;

④ 有四个角是直角的四边形 _____ (填“一定”或“不一定”) 是矩形.

(2) 请你按照教材 P₁₀₂ 中的“试一试”要求画图.

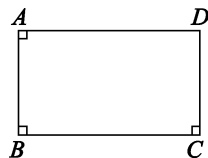
(3) 根据画图结果可以得出:

矩形的判定定理 1: _____ .

(4) 请回答教材 P₁₀₂ 云图中的问题: 你能证明矩形的判定定理 1 吗?

已知: 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$.

求证: 四边形 $ABCD$ 是矩形.



3. 阅读教材 P₁₀₃ 中的“思考”部分.

命题“矩形的两条对角线相等且互相平分”的逆命题是 _____ .

4. 阅读教材 P₁₀₃ 中的“试一试”部分.

(1) 请你按照教材 P₁₀₃ 中的“试一试”要求画图.

(2) 根据画图结果可以得出:

矩形的判定定理 2: _____ .

(3) 阅读教材 P₁₀₃ 中的对“矩形判定定理 2”的证明.

5. 阅读教材 P₁₀₄ 中的“例 4”部分, 说出每一步的依据.

其分析思路: 先证明四边形 $EFGH$ 是 _____, 再证明其 _____ 相等, 即可得证四边形 $EFGH$ 是 _____ .

自主测评

1. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 能判断其是矩形的条件是 _____ ()

(A) $AO=CO, BO=DO$

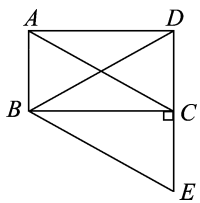
(B) $BD=AC, AO=CO, BO=DO$

(C) $AO=CO, BO=DO, AC \perp BD$

(D) $AO=BO, CO=DO$

2. 如图, BC 是等腰三角形 BED 底边 ED 上的高, 四边形 $ABEC$ 是平行四边形.

求证: 四边形 $ABCD$ 是矩形.



注意: 矩形一定是平行四边形, 但平行四边形不一定是矩形.



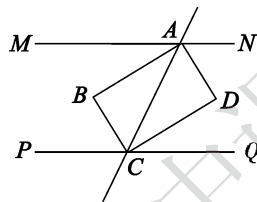
探究展示

问题共析 要积极发言, 及时总结哦!

展示交流

如图, $MN \parallel PQ$, 直线 AC 交 MN 于点 A , 交 PQ 于点 C , AB, AD, CB, CD 分别平分 $\angle MAC, \angle NAC, \angle ACP, \angle ACQ$.

求证: 四边形 $ABCD$ 是矩形.



收获与问题 在自主学习中, 你发现了什么呢?

在运用判定定理 2 判定矩形时, 必须先证明四边形是平行四边形, 再证明其对角线相等.

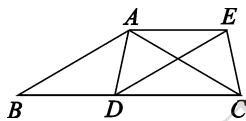


合作学习

难点探究

已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 为边 BC 上的一点, 以 AB, BD 为邻边作平行四边形 $ABDE$, 连结 AD, EC .

- (1) 求证: $\triangle ADC \cong \triangle ECD$;
- (2) 当点 D 在什么位置时, 四边形 $ADCE$ 是矩形, 请说明理由.



归纳梳理

矩形的判定方法:

(1) 矩形的定义: _____ 的平行四边形是矩形.

(2) 判定定理 1: _____ .

(3) 判定定理 2: _____ .



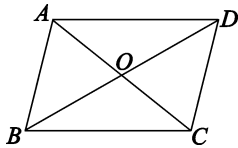
深化拓展

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.



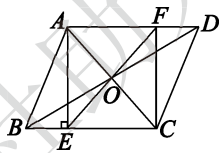
基础反思

1. 如图, 要使平行四边形 $ABCD$ 是矩形, 则应添加的条件是 _____ (只填一个).



2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 $O, AE \perp BC$ 于点 E, EO 的延长线交边 AD 于点 F , 连结 CF .

求证: 四边形 $AECF$ 是矩形.

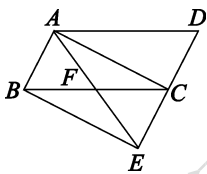


能力提升

3. 如图, 将 $\square ABCD$ 的边 DC 延长到点 E , 使 $CE = DC$, 连结 AE , 交 BC 于点 F .

(1) 求证: $\triangle ABF \cong \triangle ECF$;

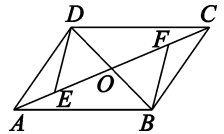
(2) 若 $\angle AFC = 2\angle D$, 连结 AC, BE , 求证: 四边形 $ABEC$ 是矩形.



4. (2018 · 新疆) 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O, E, F 是 AC 上的两点, 且 $AE = CF$, 连结 DE, BF .

(1) 求证: $\triangle DOE \cong \triangle BOF$;

(2) 若 $BD = EF$, 连结 EB, DF , 判断四边形 $EBFD$ 的形状, 并说明理由.



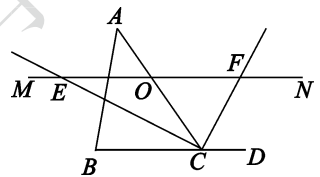
拓展创新

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, O 是边 AC 上的一个动点, 过点 O 作直线 $MN \parallel BC$, 设 MN 交 $\angle ACB$ 的平分线于点 E , 交 $\angle ACB$ 的外角平分线于点 F .

(1) 求证: $OE = OF$;

(2) 若 $CE = 12, CF = 5$, 求 OC 的长;

(3) 当点 O 在边 AC 上运动到什么位置时, 四边形 $AECF$ 是矩形? 并说明理由.



第四学时



问题导学

数学活动课上,老师准备了三角尺、量角器、卷尺等文具,让同学们检验自己的课桌桌面是不是矩形.如果是你,你会选择哪种文具?用怎样的方法检验呢?有不同的方法吗?



自主学习

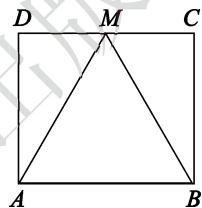
教材导读

1. 阅读教材 P₁₀₅ 中的“例 5”部分.
 - (1) 说出每一步的依据.
 - (2) 你还有其他的方法吗? 请写出证明过程.

2. 阅读教材 P₁₀₅ 中的“例 6”部分,说出每一步的依据.

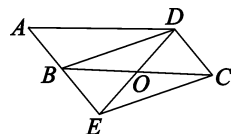
自主测评

1. 如图,在 $\square ABCD$ 中, M 为边 CD 的中点, $\triangle ABM$ 是等边三角形. 求证: 四边形 $ABCD$ 是矩形.



2. 如图,在 $\square ABCD$ 中, O 是边 BC 的中点,连结 DO 并延长,交 AB 的延长线于点 E ,连结 BD, EC .

- (1) 求证: 四边形 $BECD$ 是平行四边形;
- (2) 若 $\angle A = 50^\circ$, 则当 $\angle BOD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 时, 四边形 $BECD$ 是矩形.



收获与问题

在自主学习中,你发现了什么呢?

你能说出证明“有三个角是直角的四边形是矩形”是真命题的依据吗?

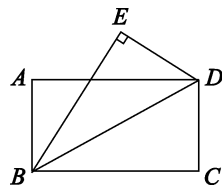


合作学习

难点探究

如图, $AB = CD = DE$, $AD = EB$, $BE \perp DE$ 于点 E .

- (1) $\triangle ABD$ 与 $\triangle EDB$ 全等吗? 为什么?
- (2) 你能添加一个条件(只需添加一个), 使四边形 $ABCD$ 为矩形吗? 请写出至少两种情况.



组内问题归结

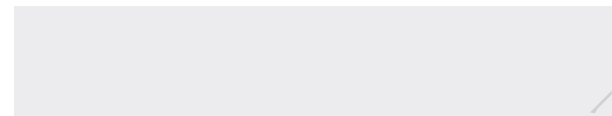
请把组内不能解决的问题记录在下面.

解决问题时,要注意灵活运用已学知识,根据已知条件选用相应的方法.



探究展示

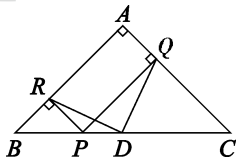
问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$, D 是边 BC 的中点,点 P 在 BC 上, $PR \perp AB$ 于点 R , $PQ \perp AC$ 于点 Q . 求证:

- (1) $DQ=DR$;
- (2) $\angle QDR=90^\circ$.



归纳梳理

矩形的判定方法:

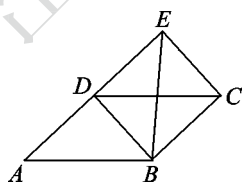
从边的角度	从角的角度	从对角线的角度
	① 有一个角是直角的平行四边形是矩形. ② 三个角是直角的四边形是矩形.	两条对角线相等的平行四边形是矩形.



深化拓展

基础反思

1. 如图,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,延长 AD 到点 E ,

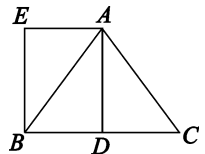


使 $DE=AD$,连结 EB, EC, DB ,添加一个条件,不能使四边形 $DBCE$ 为矩形的是 ()

- (A) $AB=BE$ (B) $BE \perp DC$
 (C) $\angle ADB=90^\circ$ (D) $CE \perp DE$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5, BC=6, AD$ 是 BC 边上的中线,四边形 $ADBE$ 是平行四边形.

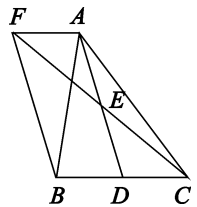
- (1) 求证:四边形 $ADBE$ 是矩形;
- (2) 求矩形 $ADBE$ 的面积.



能力提升

3. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上的一点, E 是边 AD 的中点,过点 A 作 BC 的平行线,交 CE 的延长线于点 F ,且 $AF=BD$,连结 BF .

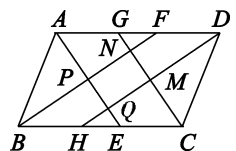
- (1) 求证: $BD=CD$;
- (2) 如果 $AB=AC$,试判断四边形 $AFBD$ 的形状,并证明你的结论.



拓展创新

4. 如图, $\square ABCD$ 的内角平分线分别相交于点 P, Q, M, N .

求证:四边形 $PQMN$ 是矩形.



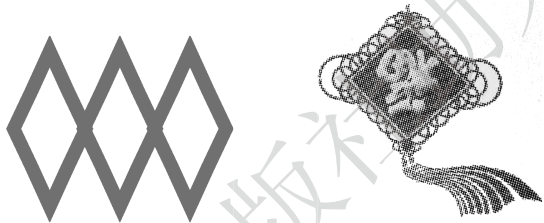
§ 19.2 菱 形

第一学时



问题导学

同学们,请欣赏下面美丽的图片,这些图片中都有菱形.



你知道什么样的图形是菱形吗? 你知道菱形和平行四边形的关系吗? 你知道菱形都具有哪些性质吗?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₁₁₀ 中的“做一做”部分.

(1) 请按照要求进行操作.

(2) 菱形是_____的平行四边形.

2. 阅读教材 P₁₁₀ 中的“思考”部分.

(1) 完成教材 P₁₁₀ 中的表格.

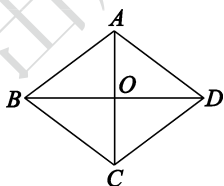
(2) 菱形有_____条对称轴, 对称轴为_____;
菱形的对称中心是_____.

(3) 菱形的性质:

菱形的性质定理 1: _____.

菱形的性质定理 2: _____.

(4) 证明菱形的性质定理 2: 菱形的对角线互相垂直.



3. 阅读教材 P₁₁₁ 中的“例 1”部分.

例 1 的主要解题依据是_____.

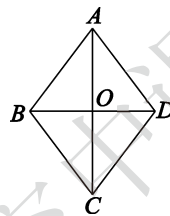
自主测评

1. 菱形的两条对角线长分别是 12 和 16, 则此菱形的边长是 ()

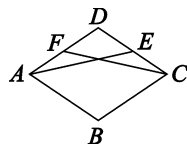
(A) 10 (B) 8

(C) 6 (D) 5

2. 如图, 在菱形 ABCD 中, $AB = 5$, $OA = 4$, 求这个菱形的周长与两条对角线的长度.



3. 如图, 在菱形 ABCD 中, E, F 分别为边 CD, AD 的中点, 连结 AE, CF, 求证: $\triangle ADE \cong \triangle CDF$.



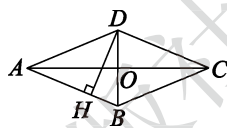
收获与问题 在自主学习中,你发现了什么呢?

总结菱形有哪些不同于平行四边形、矩形的特殊性质.

合作学习

难点探究

如图,四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC=24$, $BD=10$, $DH \perp AB$ 于点 H , 则线段 BH 的长为 _____.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

注意数形结合,画示意图.

探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

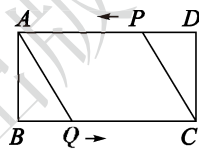
Blank area for student discussion and problem recording.

展示交流

如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$ cm, $BC=8$ cm, 点 P 从点 D 出发向点 A 运动,同时点 Q 从点 B 出发向点 C 运动,点 P, Q 的速度都是 1 cm/s.

(1) 在运动过程中,四边形 $AQCP$ 可能是菱形吗? 如果可能,那么经过多少秒后,四边形 $AQCP$ 是菱形?

(2) 求出此时菱形 $AQCP$ 的周长和面积.



归纳梳理

我们研究四边形的性质,可以从边、角、对角线 and 对称性等角度进行分析,请你对菱形的性质作一个小结:

图形	边	角	对角线	对称性
平行四边形				
矩形				
菱形				

深化拓展

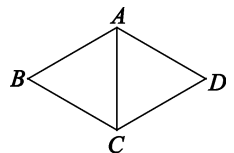
基础反思

1. 菱形具有而矩形不一定具有的性质是 ()

- (A) 对角相等且互补
- (B) 对角线互相平分
- (C) 一组对边平行,另一组对边相等
- (D) 对角线互相垂直

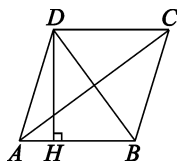
2. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, $AB=5$, $\angle BCD=120^\circ$, 则对角线 AC 的长是 ()

- (A) 20
- (B) 15
- (C) 10
- (D) 5



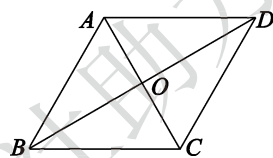
3. 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC=8$, $DB=6$, $DH \perp AB$ 于点 H , 则 DH 等于 ()

- (A) $\frac{24}{5}$
 (B) $\frac{12}{5}$
 (C) 5
 (D) 4



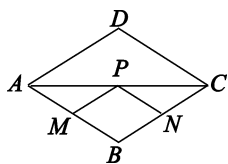
4. (2018·柳州) 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 且 $AB=2$.

- (1) 求菱形 $ABCD$ 的周长;
 (2) 若 $AC=2$, 求 BD 的长.



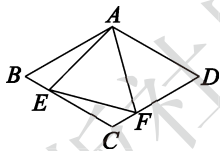
◎ 能力提升

5. 如图, P 是边长为 1 的菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的一个动点, M, N 分别是 AB, BC 边上的中点, $MP+NP$ 的最小值是 _____.



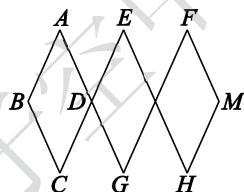
6. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle B=60^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上, $\angle EAF=60^\circ$.

- (1) 求证: $\triangle AEF$ 是等边三角形;
 (2) 如果 $\angle BAE=15^\circ$, 求 $\angle AFD$ 的度数.



◎ 拓展创新

7. 如图是由 3 个完全一样的菱形构成的活动衣帽架, 顶点 A, E, F, C, G, H 是上、下两排挂钩, 根据需要可以改变挂钩之间的距离(比如 A, C 两点可以上下自由活动). 若菱形的边长为 13 厘米, 要使两排挂钩之间的距离为 24 厘米, 并在点 B, M 处固定, 求 B, M 两点之间的距离.



第二学时



问题导学

同学们在进行教材 P₁₁₀“做一做”中的操作时,有没有发现打开后的图形被两条折痕分成了怎样的图形?它们之间又有怎样的关系呢?若已知两条对角线的长,能否求出其边长呢?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₁₁₂ 中的“例 2”部分.

例 2 的主要解题依据是:

- ① _____ ;
 ② _____ ;
 ③ _____ .

2. 阅读教材 P₁₁₃ 中的“例 3”部分.

例 3 的主要解题依据是:

- ① _____ ;
 ② _____ ;
 ③ _____ .

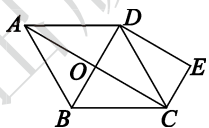
自主测评

1. 已知四边形 $ABCD$ 是菱形, O 是两条对角线的交点, $AC=30$ cm, $DB=16$ cm, 则菱形的边长是 _____ cm.

2. 菱形的一条边与它的两条对角线所夹的锐角大小之比为 $3:2$, 求它的各内角的大小.

3. 如图, O 是菱形 $ABCD$ 的对角线的交点, $DE \parallel AC$, $CE \parallel BD$.

求证: 四边形 $OCED$ 是矩形.



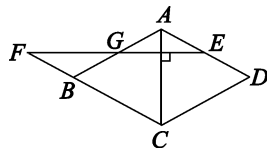
收获与问题 在自主学习中,你发现了什么呢?



合作学习

难点探究

如图,在菱形 $ABCD$ 中, E 是边 AD 的中点, $EF \perp AC$, 交 AB 于点 G , 交 CB 的延长线于点 F . 求证: AB 与 EF 互相平分.



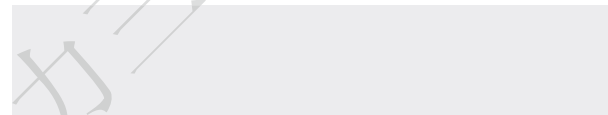
组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

注意数形结合.



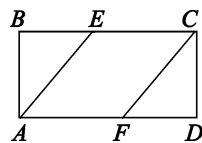
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!



展示交流

如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=4$, 四边形 $AFCE$ 为菱形, 求菱形 $AFCE$ 的面积.





归纳梳理

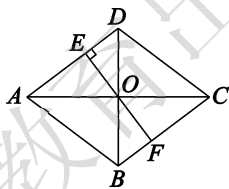
我们研究四边形的性质,可以从边、角、对角线和对称性等角度进行分析,请你对菱形的性质作一个小结.



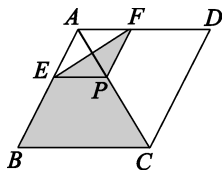
深化拓展

基础反思

1. (2018·甘孜州)如图,在菱形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AC=8$, $BD=6$, $OE \perp AD$ 于点 E , 交 BC 于点 F , 则 EF 的长为 _____.



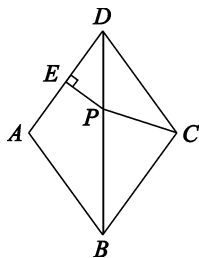
(第1题图)



(第2题图)

2. 如图,菱形 $ABCD$ 的对角线的长分别为 2 和 5, P 是对角线 AC 上任一点(点 P 不与点 A, C 重合),且 $PE \parallel BC$, 交 AB 于点 E , $PF \parallel CD$, 交 AD 于点 F , 则图中阴影部分的面积是 _____.

3. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ADC=72^\circ$, AD 的垂直平分线交对角线 BD 于点 P , 垂足为点 E , 连接 CP , 则 $\angle CPB=$ _____ $^\circ$.



能力提升

4. 菱形的一条边和等腰直角三角形的一条直角边等长,如果菱形有一个内角是 30° , 那么菱形和等腰直角三角形的面积之比是 ()

(A) 1:1

(B) 1:2

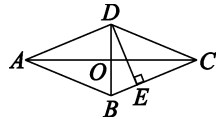
(C) 2:3

(D) 3:4

5. 如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AB=13$, $AC=24$.

(1) 求菱形 $ABCD$ 的面积;

(2) 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E , 求 DE 的长.

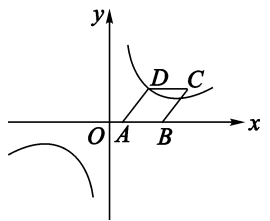


拓展创新

6. 在平面直角坐标系中,菱形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴上,已知点 $A(2,0)$, 点 $C(10,4)$, 双曲线经过点 D . 求:

(1) 菱形 $ABCD$ 的边长;

(2) 双曲线的表达式.



第三学时



问题导学

同学们,我们知道菱形的性质定理 1 是菱形的四条边都相等,那么反过来:如果一个四边形的四条边都相等,那么这个四边形是不是一定是菱形呢?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₁₁₃ 中的部分内容.

(1) 菱形的定义: _____.

(2) 菱形的性质:

边: _____;

角: _____;

对角线: _____;

对称性: _____.

2. 阅读教材 P₁₁₄ 中的“思考”和“试一试”部分.

(1) 命题“菱形的四条边都相等”的逆命题是 _____.

这个逆命题是 _____ (填“真”或“假”)命题.

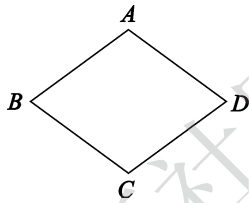
(2) 按照教材 P₁₁₄ 中的“试一试”的步骤进行操作.

(3) 菱形的判定定理 1: _____.

(4) 请回答教材 P₁₁₄ 云图中的问题:你能证明菱形的判定定理 1 吗?

已知:在四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = CD = DA$.

求证:四边形 $ABCD$ 是菱形.



3. 阅读教材 P₁₁₄ 中的“例 4”部分,并写出完整的证明过程.

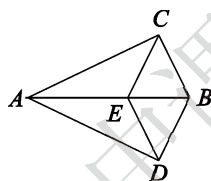
自主测评

1. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD = BC$, $AD \parallel BC$, $AB = BC$, 则四边形 $ABCD$ 是 _____.

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, 点 E 在 AB 上, $CE \parallel BD$, 连结 DE . 求证:

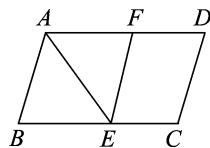
(1) $\angle CEB = \angle CBE$;

(2) 四边形 $CEDB$ 是菱形.



3. 已知:如图,在 $\square ABCD$ 中, AE 平分 $\angle BAD$, 与 BC 相交于点 E , $EF \parallel AB$, 与 AD 相交于点 F .

求证:四边形 $ABEF$ 是菱形.



收获与问题 在自主学习中,你发现了什么呢?

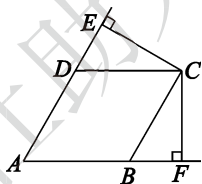
你能对菱形的判定方法给出证明吗?



合作学习

难点探究

如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AD = CD = BC = AB$, $CE \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 E , $CF \perp AB$, 交 AB 的延长线于点 F , 请你猜想 CE 与 CF 的大小关系, 并证明你的猜想.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

解决问题时, 要注意灵活地运用已学知识, 根据已知条件选用相应的方法.



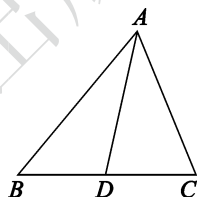
探究展示

问题共析 要积极发言, 及时总结哦!

展示交流

如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 过点 D 作 $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$, 分别交 AC , AB 于点 E , F .

- (1) 在图中画出线段 DE 和 DF ;
- (2) 连结 EF , 判断线段 AD 和 EF 的关系, 并说明理由.



归纳梳理

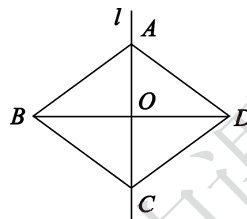
- (1) 菱形的定义: _____.
- (2) 菱形的判定定理 1: _____.



深化拓展

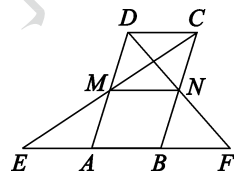
基础反思

1. 如图, 直线 l 是四边形 $ABCD$ 的对称轴, $AD \parallel BC$, 下列结论: ① $AB \parallel CD$; ② $AB = BC$; ③ $AB \perp BC$; ④ $AC = BD$; ⑤ $AO = CO$; ⑥ 四边形 $ABCD$ 是菱形中, 正确结论的序号是 _____.



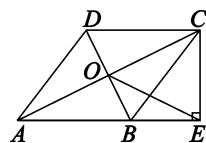
2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AD = 2AB$, 点 E, F 在直线 AB 上, CE 与 AD 交于点 M , DF 与 CB 交于点 N , 且 $AE = AB = BF$.

求证: 四边形 $CDMN$ 是菱形.



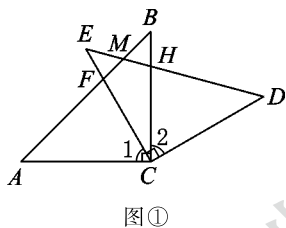
3. (2018 · 北京) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = AD$, 对角线 AC, BD 相交于点 O , AC 平分 $\angle BAD$, 过点 C 作 $CE \perp AB$, 交 AB 的延长线于点 E , 连结 OE .

- (1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形;
- (2) 若 $AB = \sqrt{5}$, $BD = 2$, 求 OE 的长.

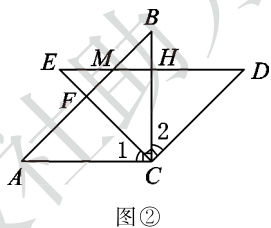


◎ 能力提升

4. 如图①, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中, $AC=CE=CB=CD$, $\angle ACB=\angle DCE=90^\circ$, AB 与 CE 交于点 F , ED 与 AB, BC 分别交于点 M, H .



图①

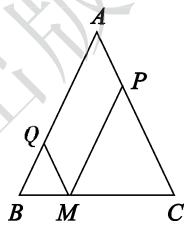


图②

- (1) 求证: $CF=CH$;
- (2) 如图②, $\triangle ABC$ 不动, 将 $\triangle EDC$ 绕点 C 旋转到 $\angle BCE=45^\circ$ 时, 试判断四边形 $ACDM$ 是什么四边形, 并证明你的结论.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=a$, M 为底边 BC 上任一点, 过点 M 分别作 AB, AC 的平行线, 交 AC 于点 P , 交 AB 于点 Q .

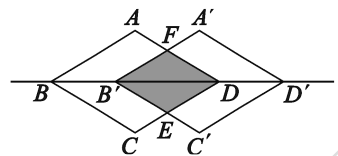
- (1) 求四边形 $AQMP$ 的周长;
- (2) 点 M 位于 BC 的什么位置时, 四边形 $AQMP$ 是菱形? 说明你的理由.



◎ 拓展创新

6. 如图, 把菱形 $ABCD$ 沿着 BD 的方向平移到菱形 $A'B'C'D'$ 的位置.

求证: 重叠部分的四边形 $B'EDF$ 是菱形.



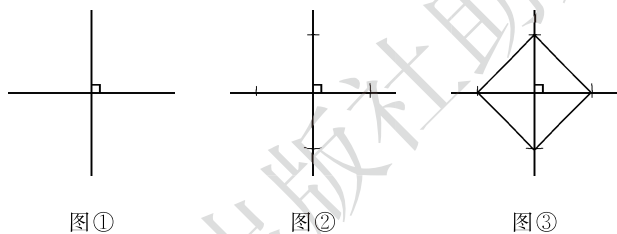
第四学时



问题导学

小亮是一个善动脑、爱钻研的学生,在学习了菱形的性质后,他又开始了他的奇思妙想. 首先他画了两条互相垂直的直线(如图①),然后以这两条直线的交点为端点,分别在每一条直线上截取两条等长的线段(如图②),依次连结各截点得到一个四边形(如图③). 小亮认为这个四边形一定是菱形. 你认为小亮的观点正确吗? 为什么?

你知道菱形的判定方法有哪些吗?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₁₁₅ 中的“思考”部分,得到一个猜想: _____.

2. 阅读教材 P₁₁₆ 中的“探索”和“试一试”部分.

(1) 请你按照教材 P₁₁₆ 中的“探索”要求进行探索.

当两根木棒之间的夹角等于 90° 时,得到的图形是 _____ 形.

(2) 按照教材 P₁₁₆ 中的“试一试”的步骤进行操作.

(3) 根据操作结果可以得出菱形的判定定理 2: _____.

(4) 请你阅读教材 P₁₁₇ 中的对“菱形的判定定理 2”的证明.

证明过程的依据是什么?

3. 阅读教材 P₁₁₇ 中的“例 5”部分.

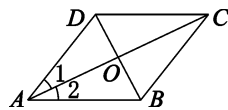
(1) 你注意到了吗? 要先证明四边形 AFCE 是 _____ 形,再证明 _____,从而得证.

(2) 例 5 的主要解题依据是:

- ① _____;
- ② _____.

自主测评

1. 如图,在 $\square ABCD$ 中,对角线 AC, BD 相交于点 O, 添加下列条件不能判定 $\square ABCD$ 是菱形的是 ()

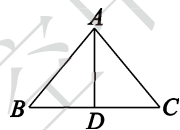


- (A) $AC \perp BD$ (B) $AB = BC$
 (C) $AC = BD$ (D) $\angle 1 = \angle 2$

2. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle ACB$, $\angle BAC$ 的平分线交边 BC 于点 D.

(1) 作图: 延长 AD 到点 E, 使得 $DE = AD$, 连结 BE, CE;

(2) 四边形 ABEC 是菱形吗? 为什么?



收获与问题

在自主学习中,你发现了什么呢?

注意: 菱形一定是平行四边形, 但平行四边形不一定是菱形.

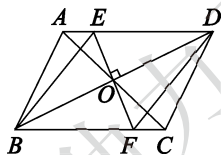


合作学习

难点探究

如图,在 $\square ABCD$ 中,对角线 AC, BD 相交于点 O ,过点 O 作直线 $EF \perp BD$,分别交 AD, BC 于点 E, F .

求证:四边形 $BEDF$ 是菱形.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

在运用菱形的判定定理 1 判定菱形时,必须先证明四边形是平行四边形,再证明对角线互相垂直.

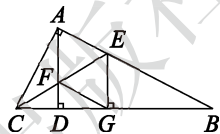


探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AD \perp BC$ 于点 D , CE 平分 $\angle ACB$,交 AB 于点 E ,交 AD 于点 F , $EG \perp BC$ 于点 G ,四边形 $AEGF$ 是菱形吗?为什么?



归纳梳理

菱形的判定方法:

从边的角度	从角的角度	从对角线的角度
① 有一组邻边相等的平行四边形是菱形; ② 四条边都相等的四边形是菱形.		① 对角线互相垂直的平行四边形是菱形; ② 对角线互相垂直平分的四边形是菱形; ③ 每条对角线平分一组对角的四边形是菱形.



深化拓展

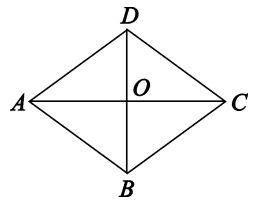
基础反思

1. $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 分别添加下列条件: ① $\angle ABC = 90^\circ$; ② $AC \perp BD$; ③ $AB = BC$; ④ AC 平分 $\angle BAD$; ⑤ $AO = DO$, 其中能使 $\square ABCD$ 是菱形的条件的序号有 _____.

2. 如图, $\square ABCD$ 的两条对角线 AC, BD 相交于点 O , $AB = 5, AC = 8, DB = 6$.

(1) AC, BD 互相垂直吗? 为什么?

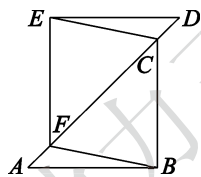
(2) 四边形 $ABCD$ 是菱形吗? 为什么?



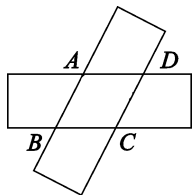
◎ 能力提升

3. (2018 · 呼和浩特) 如图, 已知 A, F, C, D 四点在同一条直线上, $AF = CD, AB \parallel DE$, 且 $AB = DE$.

- (1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$;
- (2) 若 $EF = 3, DE = 4, \angle DEF = 90^\circ$, 请直接写出使四边形 $EFBC$ 为菱形时 AF 的长度.



4. 如图, 把两张等宽的纸条交叉重叠在一起, 你能判断重叠部分 $ABCD$ 的形状吗? 为什么?



◎ 拓展创新

5. 问题情境

在综合与实践课上, 老师让同学们以“菱形纸片的剪拼”为主题开展数学活动, 如图①, 将一张菱形纸片 $ABCD$ ($\angle BAD > 90^\circ$) 沿对角线 AC 剪开, 得到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$.

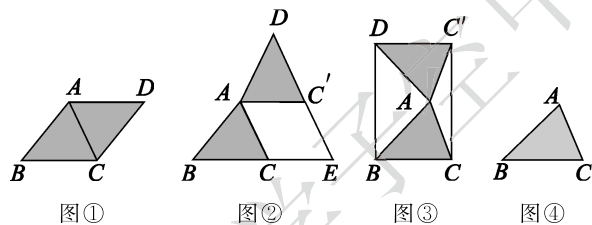
操作发现

(1) 将图①中的 $\triangle ACD$ 以点 A 为旋转中心, 按逆时针方向旋转角 α , 使 $\alpha = \angle BAC$, 得到如图②所示的 $\triangle AC'D$, 分别延长 BC 和 DC' 交于点 E , 你能判断四边形 $ACEC'$ 的形状吗? 说明理由;

(2) 创新小组将图①中的 $\triangle ACD$ 以点 A 为旋转中心, 按逆时针方向旋转角 α , 使 $\alpha = 2\angle BAC$, 得到如图③所示的 $\triangle AC'D$, 连结 $DB, C'C$, 得到四边形 $BCC'D$, 发现它是矩形, 请你证明这个结论;

实践探究

(3) 请你参照以上操作, 将图①中的 $\triangle ACD$ 在同一平面内进行一次平移, 得到 $\triangle A'C'D$, 在图④中画出平移后构造出的新图形, 标明字母, 说明平移及构图方法, 写出你发现的结论, 不必证明.



§ 19.3 正 方 形

第一学时

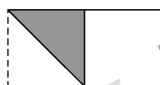


问题导学

同学们,图①是一张矩形纸片,你能用这张矩形纸片裁剪出一个面积最大的正方形吗?



图①



图②



图③

小敏是这样做的:首先以经过矩形一个顶点的直线为折痕折叠矩形,使矩形的短边叠在长边上,如图②;将重叠部分裁剪下来并展开,就得到一个正方形,如图③.小敏的做法正确吗?你知道小敏这样操作的依据是什么吗?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₁₁₉ 中的内容.

(1) 请分类总结正方形的性质.

边: _____;

角: _____;

对角线: _____.

(2) 回答教材 P₁₁₉ 第一个云图中的问题:

正方形是轴对称图形,正方形有 _____ 条对称轴. 它的对称轴分别是 _____.

正方形是中心对称图形,对称中心是 _____.

2. 阅读教材 P₁₁₉ 中的“例 1”部分.

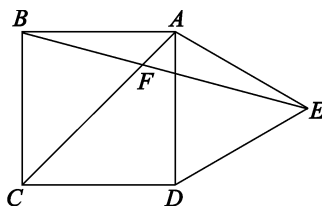
按照教材 P₁₁₉ 第二个云图中的要求,写出例 1 的完整的解答过程,并注意每个步骤的依据.

自主测评

1. 正方形具有而菱形不具有的性质是()

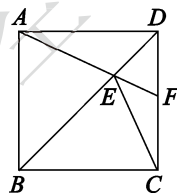
- (A) 四条边都相等
(B) 对角线互相垂直平分
(C) 对角线相等
(D) 对角线平分一组对角

2. 如图,在正方形 $ABCD$ 的外侧作等边三角形 ADE , AC , BE 相交于点 F , 则 $\angle BFC$ 等于 ()



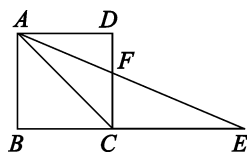
- (A) 45° (B) 55°
(C) 60° (D) 75°

3. 如图,在正方形 $ABCD$ 中, $\angle DAF = 25^\circ$, AF 交对角线 BD 于点 E , 那么 $\angle BEC$ 等于 ()



- (A) 45°
(B) 60°
(C) 70°
(D) 75°

4. 如图,延长正方形 $ABCD$ 的边 BC 至点 E , 使 $CE = AC$, 连结 AE , 交 CD 于点 F , 求 $\angle AEC$ 及 $\angle AFC$ 的度数.



收获与问题 在自主学习中,你发现了什么呢?

要灵活运用已学的知识.



合作学习

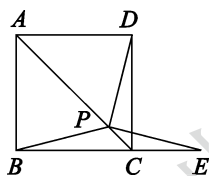
难点探究

如图①,在正方形 $ABCD$ 中, P 是对角线 AC 上的一点,点 E 在 BC 的延长线上,且 $PE=PB$.

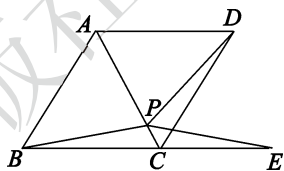
(1) 求证: $\triangle BCP \cong \triangle DCP$;

(2) 求证: $\angle DPE = \angle ABC$;

(3) 把正方形 $ABCD$ 改为菱形,其他条件不变(如图②),若 $\angle ABC = 58^\circ$,则 $\angle DPE =$ 度.



图①



图②

组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

要关注平行四边形、矩形、菱形、正方形之间的从属关系.



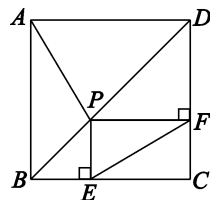
探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

如图,在正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上有一点 P , $PE \perp BC$ 于点 E , $PF \perp CD$ 于点 F .

求证: $AP = EF$.



归纳梳理

我们研究四边形的性质,可以从边、角、对角线 and 对称性等角度进行分析,请你对已学过的四边形的性质作一个小结:

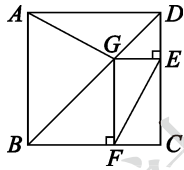
图形	边	角	对角线	对称性
平行四边形				
矩形				
菱形				
正方形				



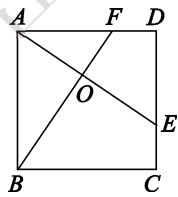
深化拓展

基础反思

1. 如图为某城市部分街道示意图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 点 G 在对角线 BD 上, $GE \perp CD$, $GF \perp BC$, $AD = 1\,500$ m, 小敏行走的路线为 $B \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow E$, 小聪行走的路线为 $B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$, 若小敏行走的路程为 $3\,100$ m, 则小聪行走的路程为 _____ m.



2. 如图, E, F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD, AD 上的点, 且 $CE = DF$, AE, BF 相交于点 O . 下列结论: ① $AE = BF$; ② $AE \perp BF$; ③ $AO = OE$; ④ $S_{\triangle AOB} = S_{\text{四边形} DEOF}$ 中, 错误的是 _____ (填序号).

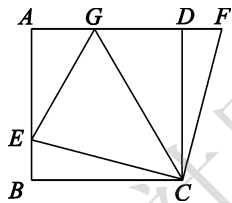


能力提升

3. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 AB 上的一点, F 是 AD 延长线上的一点, 且 $DF = BE$.

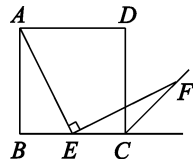
(1) 求证: $CE = CF$;

(2) 若点 G 在 AD 上, 且 $\angle GCE = 45^\circ$, 则 $GE = BE + GD$ 成立吗? 为什么?



拓展创新

4. 如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形, E 是 BC 的中点, $\angle AEF = 90^\circ$, EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F . 求证: $AE = EF$.



第二学时



问题导学

我们学习了平行四边形、矩形、菱形、正方形,也知道了正方形是特殊的矩形,也是特殊的菱形,还是特殊的平行四边形,那么它们之间有怎样的包含关系呢?

你有什么方法判定一个四边形是正方形?



自主学习

教材导读

1. 阅读教材 P₁₁₉ 中“例 1”前面的部分,回顾正方形的性质.

(1) 正方形既是 _____ 图形,又是 _____ 图形.

(2) 正方形的性质:

① _____ ;

② _____ ;

③ _____ .

(3) 阅读教材可得:

正方形的判定定理 1: _____ .

正方形的判定定理 2: _____ .

2. 阅读教材 P₁₂₀ 中的“讨论”部分.

(1) 你认为小明、小兵、小英三人之中,谁的检验方法是对的? 为什么?

(2) 你认为应该如何检验,才能又快又好又准确?

3. 阅读教材 P₁₂₀ 中的“读一读”部分.

了解平行四边形与矩形、菱形、正方形之间的相互关系.

自主测评

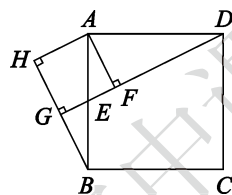
1. 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 请你添加一个适当的条件 _____, 使其成为正方形 (只填一个即可).

2. 菱形 $ABCD$ 添加一个条件: _____, 就可以得到正方形 $ABCD$.

3. 下列条件中, 能判定四边形是正方形的是 ()

- (A) 四个角都是直角
- (B) 对角线互相平分且垂直
- (C) 对角线相等且互相平分
- (D) 对角线相等且互相垂直平分

4. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是边 AB 的中点, 过点 A 作 DE 的垂线, 垂足为 F , 过点 B 作 DE 的垂线, 垂足为 G , 过点 A 作 BG 的垂线, 垂足为 H . 求证: 四边形 $AFGH$ 是正方形.



收获与问题 在自主学习中, 你发现了什么呢?

正确区分正方形和平行四边形的性质与判定定理.



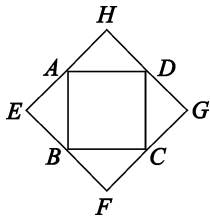
合作学习

难点探究

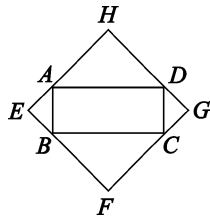
以四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 为斜边分别向外侧作等腰直角三角形, 直角顶点分别为 E, F, G, H , 顺次连结这四个点, 得到四边形 $EFGH$.

(1) 如图①, 当四边形 $ABCD$ 为正方形时, 我们发现四边形 $EFGH$ 是正方形; 如图②, 当四边形 $ABCD$ 为矩形时, 请判断四边形 $EFGH$ 的形状 (不要求证明);

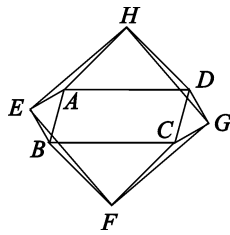
(2) 如图③, 当四边形 $ABCD$ 为一般平行四边形时, ①求证: $HE = HG$; ②四边形 $EFGH$ 是什么四边形? 并说明理由.



图①

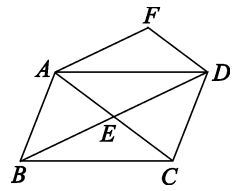


图②



图③

出此时 $\square ABCD$ 的形状,并证明你的结论;如果不可能,请说明理由.



组内问题归结 请把组内不能解决的问题记录在下面.

正方形是特殊的矩形、菱形、平行四边形.



探究展示

问题共析 要积极发言,及时总结哦!

展示交流

如图,已知 $\square ABCD$, AC 与 BD 相交于点 E , $AF \parallel BD$, $FD \parallel AC$.

- (1) 求证: 四边形 $AEDF$ 是平行四边形;
- (2) 当 $\square ABCD$ 是菱形时, 试判断四边形 $AEDF$ 是怎样的特殊平行四边形, 并证明你的结论;
- (3) $\square AEDF$ 可能是正方形吗? 如果可能, 指



归纳梳理

1. 矩形、菱形、正方形是特殊的 _____, 它们具有平行四边形的一般性质, 又具有各自的特殊性质.

2. 正方形的判定:

方法一: _____.

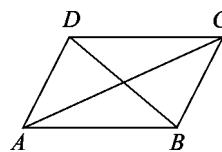
方法二: _____.



深化拓展

基础反思

1. 小明在学习了正方形之后, 给同桌小文出了一道题, 从下列四个条件: ① $AB = BC$; ② $\angle ABC = 90^\circ$; ③ $AC = BD$; ④ $AC \perp BD$ 中选两个作为补充条件, 使 $\square ABCD$ 为正方形 (如图), 现有下列四种选法, 其中错误的是 ()

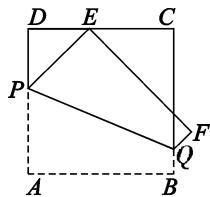


(A) ①②

(B) ②③

(C)①③ (D)②④

2. 如图,将一块边长为 12 的正方形纸片 $ABCD$ 的顶点 A 折叠至 DC 边上的点 E 处,使 $DE=5$,折痕为 PQ ,则 PQ 的长为 ()



(A)12 (B)13
(C)14 (D)15

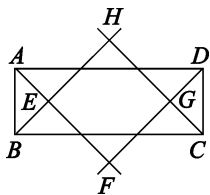
◎ 能力提升

3. 四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ,下列条件中,能判定它是正方形的是 ()

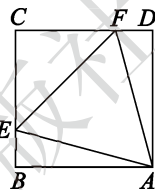
- (A) $AB=BC=CD=DA$
- (B) $AO=CO, BO=DO, AC \perp BD$
- (C) $AC=BD, AC \perp BD$, 且 AC, BD 互相平分
- (D) $AB=BC, CD=DA$

4. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,四个内角的平分线围成四边形 $EFGH$.

求证:四边形 $EFGH$ 是正方形.



5. (2018·舟山)如图,等边三角形 AEF 的顶点 E, F 在矩形 $ABCD$ 的边 BC, CD 上,且 $\angle CEF=45^\circ$. 求证:矩形 $ABCD$ 是正方形.



◎ 拓展创新

6. 四个动点 P, Q, E, F 分别从正方形 $ABCD$ 的四个顶点出发,沿 AB, BC, CD, DA 以同样的速度向 B, C, D, A 各点移动.

(1) 试判断四边形 $PQEF$ 是否是正方形,并证明;

(2) PE 是否恒过某一定点,并说明理由;

(3) 四边形 $PQEF$ 的顶点位于何处时,其面积最小、最大? 各是多少?

第 19 章数学能力提升与评价

在学习了平行四边形的性质及判定后,本章我们类比研究平行四边形的思路,继续探索矩形、菱形及正方形的性质及判定.同样的,在本章渗透了分类思想,体现了“让几何动起来”的思想,运用了动态的变换方法.第 18 章、第 19 章的学习过程像链条一样环环相扣,蕴含着“从一般到特殊”的思想,在学习过程中,同学们的运算能力、推理能力及空间观念又一次得到了提升.

推理能力

[能力提升]

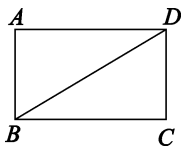
在学习矩形、菱形和正方形这三类特殊平行四边形的过程中,同学们的推理能力在观察、实验、猜想、证明的过程中得到了发展,教材中的例题均对此有所体现.在学习过程中,合情推理与演绎推理相结合,贯穿始终.

[典例解读]

如图,已知 BD 是矩形 $ABCD$ 的对角线.

(1)用直尺和圆规作线段 BD 的垂直平分线,分别交 AD,BC 于点 E,F (保留作图痕迹,不写作法和证明);

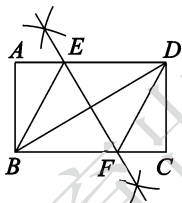
(2)连结 BE,DF ,四边形 $BEDF$ 是什么四边形?请说明理由.



分析:此题考查矩形的性质和菱形的判定.

(1)分别以 B,D 为圆心,大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径画弧,交于两点,确定出垂直平分线即可;(2)连结 BE,DF ,四边形 $BEDF$ 为菱形.

解:(1)如图所示, EF 为所求直线.



(2)四边形 $BEDF$ 为菱形.

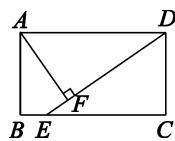
理由: $\because EF$ 垂直平分 BD ,

$\therefore BE=DE, \angle DEF=\angle BEF$.

$\because AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle DEF=\angle BFE$,
 $\therefore \angle BEF=\angle BFE$,
 $\therefore BE=BF$.
 $\because BF=DF$,
 $\therefore BE=ED=DF=BF$,
 \therefore 四边形 $BEDF$ 为菱形.

[自我评价]

1.如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AD > AB$, E 是 BC 上的一点,且 $DE=DA$, $AF \perp DE$,垂足为 F ,下列结论不一定正确的是 ()



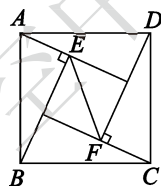
(A) $\triangle AFD \cong \triangle DCE$

(B) $AF = \frac{1}{2}AD$

(C) $AB=AF$

(D) $BE=AD-DF$

2.如图,在正方形 $ABCD$ 中, $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 为直角三角形, $\angle AEB=\angle CFD=90^\circ$, $AE=CF=5$, $BE=DF=12$,则 EF 的长是



(A) 7

(B) 8

(C) $7\sqrt{2}$

(D) $7\sqrt{3}$

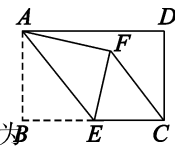
运算能力

[能力提升]

运算能力与推理能力是相辅相成的,特殊平行四边形的相关计算在教材 P_{100} 的例 2、 P_{101} 的例 3、 P_{112} 的例 2 及 P_{119} 的例 1 等例题中均有所体现.

[自我评价]

1.如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=6$, E 为 BC 的中点,将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠,使点 B 落在矩形内的点 F 处,连结 CF ,则 CF 的长为



(A) $\frac{9}{5}$

(B) $\frac{12}{5}$

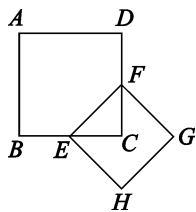
(C) $\frac{16}{5}$

(D) $\frac{18}{5}$

2.如图,正方形 $ABCD$ 的面积为 4,以相邻两边

中点连线 EF 为边的正方形 $EFGH$ 的周长为 ()

- (A) $\sqrt{2}$
- (B) $2\sqrt{2}$
- (C) $3\sqrt{2}$
- (D) $4\sqrt{2}$



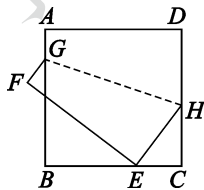
空间观念

[能力提升]

平行四边形、矩形、菱形和正方形的学习,是对学生空间观念的进一步考查,是一种特殊与一般的关系,图形越来越特殊,性质就越来越多,判定它需要的条件也就越来越多,这对于研究平行四边形、矩形、菱形和正方形有着重要的作用.教材 P₁₀₀ 的练习的第 2 题、P₁₁₈ 的练习的第 1 题等均对空间观念的考查有所体现.

[自我评价]

1. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 9,将正方形折叠,使顶点 D 落在 BC 边上的点 E 处,折痕为 GH ,若 $BE:EC=2:1$,则线段 CH 的长是 ()



- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6

2. 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle A=30^\circ$,在同一平面内,以对角线 BD 为底边作顶角为 120° 的等腰三角形 BDE ,则 $\angle EBC$ 的度数为 _____.

第 19 章测评

(测评时间:60 分钟 满分:100 分)

一、选择题(每小题 2 分,满分 20 分)

1. 下列命题中的真命题是 ()

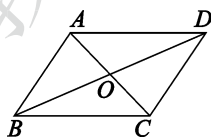
- (A) 对角线相等的四边形是矩形
 (B) 对角线互相垂直的四边形是菱形
 (C) 对角线互相平分的四边形是平行四边形
 (D) 对角线互相垂直平分的四边形是正方形

2. 如果矩形的边长分别为 8 cm, 15 cm, 那么这个矩形的对角线长是 ()

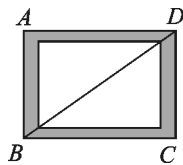
- (A) 15 cm (B) 16 cm
 (C) 17 cm (D) 18 cm

3. (2018·日照) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 $O, AO=CO, BO=DO$. 添加下列条件, 不能判定四边形 $ABCD$ 是菱形的是 ()

- (A) $AB=AD$ (B) $AC=BD$
 (C) $AC \perp BD$ (D) $\angle ABO = \angle CBO$



(第 3 题图)



(第 4 题图)

4. 如图, 为了体验四边形的不稳定性, 小贤将四根木条用钉子钉成一个矩形框架 $ABCD, B$ 与 D 两点之间用一根橡皮筋拉直固定, 然后向右扭动框架, 观察所得四边形的变化, 下列判断错误的是 ()

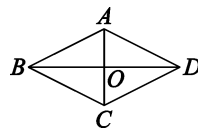
- (A) 四边形 $ABCD$ 由矩形变为平行四边形
 (B) BD 的长度增大
 (C) 四边形 $ABCD$ 的面积不变
 (D) 四边形 $ABCD$ 的周长不变

5. 已知对角线互相垂直平分的四边形的周长为 40 cm, 两条对角线的长度比为 3:4, 那么这两条对角线的长分别为 ()

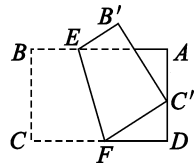
- (A) 6 cm, 8 cm
 (B) 3 cm, 4 cm
 (C) 12 cm, 16 cm
 (D) 24 cm, 32 cm

6. 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 求证: $AC \perp BD$. 以下是打乱的证明过程: ①又 $BO=DO$; ② $\therefore AO \perp BD$, 即 $AC \perp BD$; ③ \therefore 四边形 $ABCD$ 是菱形; ④ $\therefore AB=AD$, 证明步骤正确的顺序是 ()

- (A) ③ \rightarrow ② \rightarrow ① \rightarrow ④ (B) ③ \rightarrow ④ \rightarrow ① \rightarrow ②
 (C) ① \rightarrow ② \rightarrow ④ \rightarrow ③ (D) ① \rightarrow ④ \rightarrow ③ \rightarrow ②



(第 6 题图)



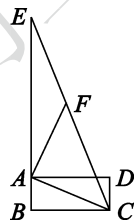
(第 7 题图)

7. 如图, 将矩形纸片 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠, 使点 C 落在 AD 边的中点 C' 处, 点 B 落在点 B' 处, 其中 $AB=9, BC=6$, 则 FC' 的长为 ()

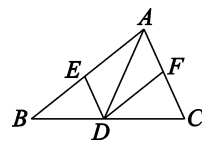
- (A) $\frac{10}{3}$ (B) 4
 (C) 4.5 (D) 5

8. 在探索“尺规三等分角”这个数学名题的过程中, 曾利用了下图, 该图中, 四边形 $ABCD$ 是矩形, E 是 BA 延长线上的一点, F 是 CE 上的一点, $\angle ACF = \angle AFC, \angle FAE = \angle FEA$, 若 $\angle ACB = 21^\circ$, 则 $\angle ECD$ 的度数是 ()

- (A) 7° (B) 21°
 (C) 23° (D) 24°



(第 8 题图)



(第 9 题图)

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上的点(与 B, C 两点不重合), 过点 D 作 $DE \parallel AC, DF \parallel AB$, 分别交 AB, AC 于 E, F 两点, 下列说法正确的是 ()

- (A) 若 $AD \perp BC$, 则四边形 $AEDF$ 是矩形
 (B) 若 AD 垂直平分 BC , 则四边形 $AEDF$ 是矩形

- (C)若 $BD=CD$,则四边形 $AEDF$ 是菱形
 (D)若 AD 平分 $\angle BAC$,则四边形 $AEDF$ 是菱形

10. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 下面四组条件: ① $AO=CO, BO=DO$; ② $AO=CO=BO=DO$; ③ $AO=CO, BO=DO, AC \perp BD$; ④ $AO=CO=BO=DO, AC \perp BD$, 其中能判定四边形 $ABCD$ 是正方形的条件是 ()

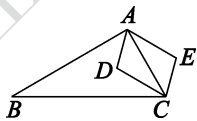
- (A)① (B)②
 (C)③ (D)④

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

11. 若矩形对角线的夹角为 60° , 较短的边长为 12 cm, 则其对角线长为 _____ cm.

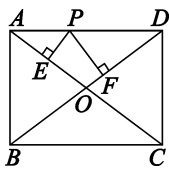
12. 若菱形的锐角是 60° , 边长是 20 cm, 则较短的对角线长是 _____ cm.

13. (2018·南通)如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD, CD 分别平分 $\angle BAC$ 和 $\angle ACB$, $AE \parallel CD, CE \parallel AD$. 若从三个条件: ① $AB=AC$; ② $AB=BC$; ③ $AC=BC$ 中选择一个作为已知条件, 则能使四边形 $ADCE$ 为菱形的是 _____ (填序号).



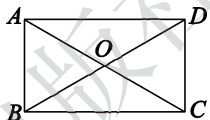
14. (2018·武汉)以正方形 $ABCD$ 的边 AD 为边作等边三角形 ADE , 则 $\angle BEC$ 的度数是 _____.

15. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3, BC=4, P$ 是边 AD 上的动点, $PE \perp AC$ 于点 $E, PF \perp BD$ 于点 F , 则 $PE+PF$ 的值为 _____.



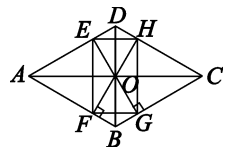
三、解答题(共 65 分)

16. (本题 8 分)如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , $\triangle AOB$ 是等边三角形, $AB=4$ cm. 这个平行四边形是矩形吗? 说明你的理由.

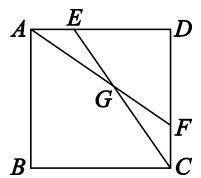


17. (本题 8 分)如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 过点 O 作 $EG \perp BC$, 分别交 AD, BC 于点 E, G , 过点 O 作 $HF \perp AB$, 分别交 AB, CD 于点 F, H .

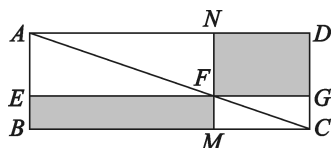
求证: 四边形 $EFGH$ 是矩形.



18. (本题 8 分)如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别为边 AD 和 CD 上的点, 且 $AE=CF$, 连结 AF, CE , 交于点 G . 求证: $AG=CG$.



19. (本题 6 分)数学家吴文俊院士非常重视古代数学家贾宪提出的“从长方形对角上任一点作两条分别平行于两邻边的直线, 则所容两长方形面积相等(如图所示)”这一推论, 他从这一推论出发, 利用“出入相补”原理复原了《海岛算经》九题古证.



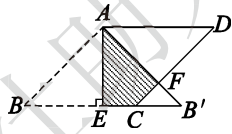
(以上材料来源于《古证复原的原理》《吴文俊与中国数学》和《古代世界数学泰斗刘徽》)

请根据该图完成这个推论的证明过程.

证明: $S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\text{矩}ADC} - (S_{\text{矩}ANF} + S_{\text{矩}FGC})$,
 $S_{\text{矩形}EBMF} = S_{\text{矩}ABC} - (\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}})$,
 易知, $S_{\text{矩}ADC} = S_{\text{矩}ABC}$, $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$,

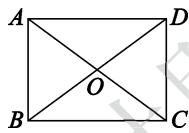
可得 $S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\text{矩形}EBMF}$.

20. (本题 6 分) 如图, 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = 45^\circ$, AE 为 BC 边上的高, 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 所在直线翻折后得到 $\triangle AB'E$, 求 $\triangle AB'E$ 与四边形 $AECD$ 重叠部分的面积.



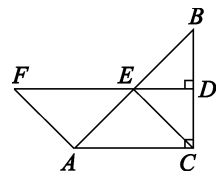
21. (本题 9 分) 如图, 已知平行四边形 $ABCD$, 对角线 AC, BD 相交于点 O , $\angle OBC = \angle OCB$.

- (1) 求证: 平行四边形 $ABCD$ 是矩形;
- (2) 请添加一个条件使矩形 $ABCD$ 为正方形.



22. (本题 10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, BC 的垂直平分线 DE 交 BC 于点 D , 交 AB 于点 E , 点 F 在 DE 上, 且 $AF = CE = AE$.

- (1) 求证: 四边形 $ACEF$ 是平行四边形;
- (2) 当 $\angle B$ 满足什么条件时, 四边形 $ACEF$ 是菱形, 并说明理由.



23. (本题 10 分) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 6 cm, 点 Q 在边 BC 上, $BQ = 2QC$.

- (1) 求 BQ 的长;
- (2) 如果 P 是对角线 BD 上的一点, 且 $PQ + PC$ 的值最小, 请画图确定点 P 的位置, 并加以证明;
- (3) 求 $PQ + PC$ 的最小值.

